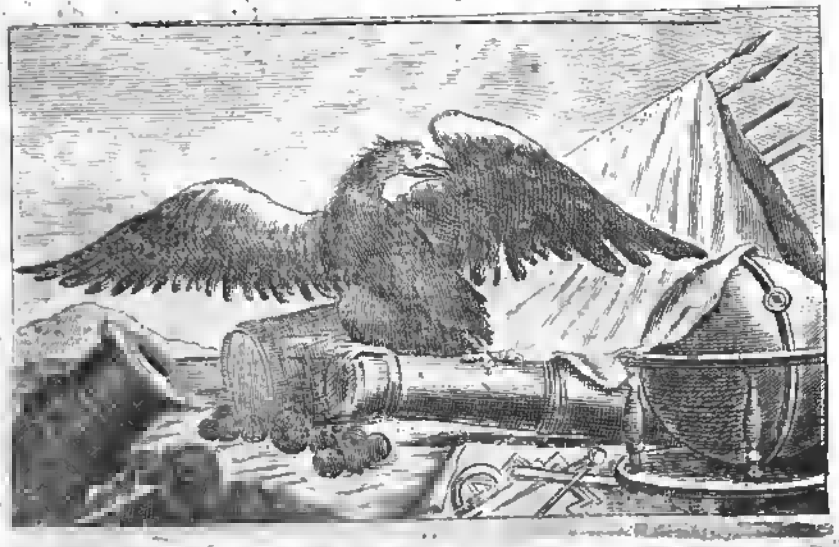
# HISTOIRE
DE
# L'ACADÉMIE ROYALE
DES
# SCIENCES
ET
# BELLES-LETTRES.

*ANNÉE MDCCLXVII.*



*A BERLIN*
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLXIX.

Imprimé

*par ordre de l'Académie.*

# TABLE.

## CLASSE
## DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.


Rélation *de la fécondation artificielle d'un Palmier femelle, réitérée pour la troiſieme fois, & avec un plein ſuccès, dans le Jardin Botanique de l'Académie Royale à Berlin*, par M. GLE'DITSCH. p. 3

Sur *la figure de l'Océan*, par M. LAMBERT. 20

Sur *les Ombres colorées*, par M. BE'GUELIN. 27

Diſſertation *ſur l'Art de la Teinture des Anciens & des Modernes*, par M. DE FRANCHEVILLE. 41


## CLASSE
## DE MATHÉMATIQUE.


Méthode *pour porter les verres objectifs des Lunettes à un plus haut degré de perfection*, par M. L. EULER. 131

Sur *la ſolution des Problemes indéterminés du ſecond degré*, par M. DE LA GRANGE. 165

Sur *la réſolution des équations numériques*, par M. DE LA GRANGE. 311

Solution *générale & abſolue du Probleme de trois Corps moyennant des Suites infinies*, par M. LAMBERT. 353

# CLASSE
## DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

Conſidérations *ſur ce qu'on peut regarder aujourd'hui comme le but principal des Académies, & comme leur effet le plus avantageux*, par M. FORMEY. 367

Sur *l'uſage du Principe de la Raiſon ſuffiſante dans le calcul des probabilités*, par M. BEGUELIN. 382

Obſervations *ſur l'influence réciproque de la raiſon ſur le langage & du langage ſur la raiſon*, par M. SULZER. 413

# CLASSE
## DE BELLES-LETTRES.

De *la vraie nature du Beau en général*, par M. DE CATT. 441

Diſcours *ſur la ſenſibilité pour autrui*, par M. TOUSSAINT. 452

De *l'influence des Belles-Lettres ſur la Philoſophie*, par M. BITAUBE'. 470

ELOGE de M. SUSSMILCH. 496

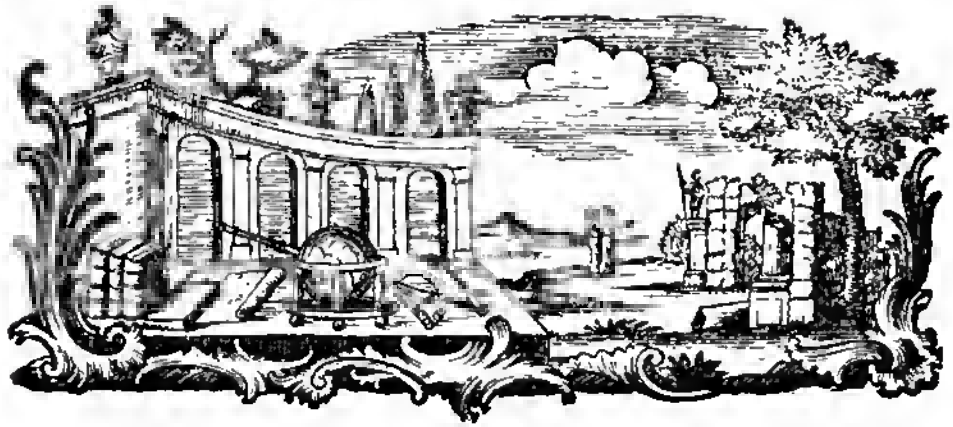
Obſervation *du Paſſage de Vénus ſur le Soleil*, par M. J. BERNOULLI. 506.

Mé-

# MÉMOIRES
DE
# L'ACADÉMIE ROYALE
DES
# SCIENCES
ET
# BELLES-LETTRES.

---

*CLASSE*
*DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.*



# RÉLATION

DE LA

## FÉCONDATION ARTIFICIELLE D'UN PALMIER FEMELLE,

RÉITÉRÉE POUR LA TROISIEME FOIS, ET AVEC UN PLEIN SUCCÈS, DANS LE JARDIN BOTANIQUE DE L'ACADÉMIE ROYALE À BERLIN.

PAR M. GLÉDITSCH. (*)

*Traduit de l'Allemand.*

La Nature, qui, conformément à ſes propres loix, n'a mis aucune différence entre l'importante famille des Palmiers, par rapport à la maniere naturelle de la fécondation & de la propagation, & les plus petites plantes, n'a pas laiſſé de la diſtinguer fort conſidérablement de toutes les autres à pluſieurs autres égards. Cette famille remarquable ne conſiſte juſqu'ici qu'en dix eſpe-



(*) Lû le 14 Juillet 1768.

eſpeces, dont huit ſeulement ont pû être bien déterminées par Mr. *de Linné*. Ce ſont des arbres qui reſſemblent, quant à la ſubſtance & à l'évolution, au roſeau ou aux tiges, ſi on peut les nommer ainſi, qui portent ou des bayes avec des ſemences, ou du moins des fruits charnus, avec des noyaux, pierres, ou noix. La ſtructure de leurs fleurs, qui, dans ces arbres, conſtituent les inſtrumens propres de la fécondation naturelle, eſt ſi ſimple & ſi facile à ſaiſir, qu'on peut aiſément parvenir à ſa connoiſſance au moyen de ſon analogie avec les autres fleurs connues.

Quant à ce qui concerne la différence des eſpeces, autant qu'il importe en général d'en être inſtruit, pour arriver à une idée exacte des circonſtances eſſentielles de leur fécondation & de leur propagation; voici en quoi elle conſiſte. La premiere eſpece de ces Palmiers, que *Linné* nomme *Phœnix*, & qui eſt proprement le *Palmier commun*, a une plante *mâle* à part, & une autre *femelle*, qui en differe & en eſt totalement ſéparée; quoique l'une & l'autre ſoient produites d'une maniere naturelle par une mere-plante commune, au moyen des fruits qui en tombent, & puiſſent ſe trouver tout près d'elle, ou vivre à une fort grande diſtance. Il ſe trouve quelquefois, dans les bouquets des fleurs femelles de ce palmier, des fleurs mâles à part qui y ſont diſperſées, leſquelles ſont, ou tout à fait cachées, ou parfaitement à découvert, comme nous l'avons obſervé ſur quelques uns de nos palmiers communs. Cette derniere circonſtance embarraſſa beaucoup, il y a quelques années, le célebre Profeſſeur d'Edimbourg, *Alſton*, parce qu'elle ne lui étoit pas connue, & qu'il ne pouvoit par conſéquent la ſoupçonner, ni deviner d'où venoient à de ſemblables plantes femelles des ſemences mûres & parfaites, tandis que, comme il l'avoit obſervé & l'affirmoit, il n'exiſtoit aucune plante mâle dans le voiſinage.

Dans les eſpeces de Palmiers qu'on nomme *Cocos*, *Areca*, *Elate* & *Caryota*, on rencontre de véritables fleurs mâles à part, parmi les femelles, dans un ſeul & même bouquet commun de fleurs; les eſpeces *Cycas* & *Zamia* ſont à cet égard encore indéterminées; il n'y

n'y a que la *Corypha* qui eſt un *Palmier* fécond, régulier, *à fleurs hermaphrodites*; & le *Boraſſus* a une plante mâle, tout à fait ſéparée de ſa femelle. Il reſte encore beaucoup d'incertitude par rapport à ce dernier.

Le *Chamærops* de *Linné*, autrement *Palmite*, & en Allemand *Butter-Dattel-Palme*, dont il doit être queſtion dans ce Mémoire, s'écarte manifeſtement de toutes les eſpeces qui viennent d'être mentionnées, en ce qu'elle a une *véritable* Plante *femelle hermaphrodite*, tout à fait privée de la partie mâle, avec une autre plante mâle, qui en eſt entierement diſtincte, deſtinée à la féconder. Il faut bien comprendre la circonſtance que j'indique ici, ſavoir que notre Palmier du Jardin Botanique Royal eſt une vraie plante femelle hermaphrodite, c'eſt à dire, ſuivant l'analogie qu'on peut déduire de la plûpart des animaux, une plante qui poſſede parfaitement toutes les parties femelles de la fécondation, ſans aucun défaut, ni aucune exception, tandis que les parties mâles qui s'y rapportent n'ont ni l'étoffe, ni la force, requiſes pour la fécondation de ces parties femelles; de ſorte qu'elle a néceſſairement beſoin d'un autre plante mâle ſéparée qui la féconde; & cette plante exiſte auſſi toujours. L'un de ces Palmiers ne pouvant donc pas ſubſiſter ſans l'autre, rélativement à la fécondation, & chacune de ces plantes à part demeurant inutile, il faut, ou qu'elles croiſſent tellement voiſines qu'elles puiſſent ſe féconder l'une l'autre ſans l'intervention d'aucun ſecours, ou que leur fécondation ſoit procurée, convenablement aux vues de la Nature, par le mouvement de l'air, par des inſectes, ou par l'induſtrie humaine.

C'eſt ainſi qu'arrive en effet la fécondation de cette eſpece de Palmiers, & de pluſieurs autres plantes, dans les régions chaudes Orientales & Méridionales, ſans le moindre déſordre. Il faut que les ſecours étrangers d'agens qui ſont hors de ces Palmiers mêmes, s'en mêlent, comme je viens de le dire, toutes les fois que les voies accoûtumées de la fécondation naturelle ſont détruites par quelques accidens contraires à la Nature. Et qu'y a-t-il de plus aiſé que ce que

la pouſſiere des fleurs propres à la fécondation s'échapant de ſes capſules, à l'ouverture de nouvelles fleurs, forme au lever du Soleil, une ſorte de nuage délié de pouſſiere, qui, tranſporté par un doux mouvement de l'air, paſſe ſur les fleurs de la plante femelle, ſituée dans le voiſinage, qui s'en impregnent avec force. Avec quelle abondance auſſi des inſectes ſans nombre ne portent-ils pas la pouſſiere des fleurs d'une plante ſur l'autre, (& ſans ce ſecours nous aurions peut-être de la peine à nous procurer des *melons*, des *angouries*, des *citrouilles* & des *concombres*,) pour raſſembler leur miel & l'étoffe de leur cire, auſſi bien que pour ſe régaler des ſucs doux & déliés que contiennent les piſtils! Que n'opere pas auſſi la main des Orientaux, & de pluſieurs Inſulaires aux Indes, qui tirent leur ſubſiſtance des fruits du Palmier commun, pour ne pas mourir de faim, ou plutôt pour chercher à ſe pourvoir par échange d'autres alimens néceſſaires! Cela s'eſt ainſi paſſé dans ces contrées depuis que les hommes les habitent & les cultivent; & les choſes ſont encore ſur le même pied. Cela n'empêche pas que les Savans ne mettent en queſtion pendant ce tems-là, ſi la choſe eſt poſſible, & ſi le fait eſt réel? D'où viennent donc, dans certaines années, tant de petites guerres entre les Negres, ſinon de ce que quelque déſordre dans les ſaiſons a fait manquer la récolte des dattes, ce qui les expoſe à la famine? Les miſérables Grecs, qui gémiſſent ſous le joug de la domination Turque, parviennent-ils à faire leurs proviſions de dattes & de piſtaches par d'autres voies que celles que j'ai indiquées? Qu'on ſépare donc les palmiers mâles de ces palmiers femelles, dont j'ai dit ci-deſſus que la proximité des mâles leur étoit abſolument néceſſaire pour la fécondation; on verra infailliblement arriver ce qui avoit eu lieu à Berlin, par rapport à notre palmier femelle, depuis le tems du feu Roi Fréderic I, ſavoir que cet arbre privé de ſon mâle étoit demeuré dans une parfaite ſtérilité juſqu'en 1749, au lieu que ſa fécondation a pleinement réuſſi trois fois depuis ce tems-là, & que ſes fruits ſont parvenus à maturité.

Quoiqu'il ſoit déjà ſuffiſamment connu, que les dattes mûres du *Chamærops*, tant dans les pays Orientaux, qu'en Italie, en Eſpagne

& en Portugal, n'ont pas un goût aſſez emmiélé, pour qu'on puiſſe s'en nourrir, on ſait d'un autre côté qu'elles peuvent être employées, comme la Terre du Japon nommée *Catechu*, contre la dyſenterie, dans les maux de poitrine, & pour toutes ſortes d'accidens de la bouche, du col & des dents. Leur odeur reſſemble à celle du vieux beurre, leur goût a beaucoup d'acreté & d'amertume, & fort peu de douceur; de ſorte qu'on peut les comparer à cet égard au fruit non-mûr du *Siliqua dulcis* (en Allemand *Johannis-Brod*). La fécondation de cette eſpece de Palmier s'exécute dans les contrées ſusdites avec le même ſuccès que celle du Palmier commun (*Palma dactylifera vulgaris*). Mais on ne la cultive pas partout pour l'amour de ſes fruits, & même on ne la connoit pas bien en pluſieurs endroits, comme cela paroit par ce que dit le ci-devant Profeſſeur à Padoue *Pontedera*, des fruits imparfaits de ce Palmier qu'on trouve en divers lieux de l'Eſpagne & de l'Italie. C'eſt ce qui a engagé *Belon* à appeller notre palmier femelle *Palma abortiva*, l'ayant trouvé aſſez abondamment dans les régions Orientales, mais jamais avec des dattes parvenues à la maturité qu'ont celles que j'ai l'honneur de préſenter à l'Académie. Perſonne en effet ne confondra jamais les débris infécondés que produiſoit tous les ans notre palmier, & que je place ici à côté des effets de la fécondation, avec ces fruits parfaits, & ſurtout avec celui qui a ſervi à produire un jeune palmier qui tire ſon extraction du premier.

Le palmier femelle que nous conſervons dans le Jardin Botanique Royal, eſt fort vieux & de belle apparence, ſans avoir jamais porté de dattes, juſqu'aux années 1749 & 1750, où je le fécondai pour la premiere & la ſeconde fois avec de la pouſſiere des fleurs du palmier mâle que j'avois fait venir de Leipſig par la poſte. J'ai fait rapport dans le tems même à l'Académie de ces deux expériences; & j'ai produit, au moyen des dattes parfaitement mûres, de jeunes palmiers qui exiſtent encore dans le Jardin. Cette fécondation ſi complette, dans une contrée auſſi ſeptentrionale que l'eſt la Marche, fut alors pour tous les Connoiſſeurs & les Amateurs des ſingularités de la Nature, un

cas

cas auſſi inattendu & agréable, qu'il eſt devenu depuis un fait important pour ceux qui s'appliquent plus particulierement à l'étude des choſes naturelles & pour tous les Philoſophes. L'effet en fut dès le moment tel qu'il devoit être pour lever un des doutes les plus embarraſſans, & décider une des controverſes les plus vives; puiſqu'il mit ſous les yeux avec une pleine évidence la diverſité réelle des ſexes dans les plantes, leur fécondation, & la maniere de les féconder; le tout de la maniere la plus abrégée & la plus diſtincte. Car la ſimplicité des deux expériences faites ſur ce palmier eſt ſi lumineuſe & ſi convaincante, & les ſuites ont pouſſé cette force à un ſi haut point, qu'il ne ſauroit plus naître à cet égard la moindre conteſtation.

En attendant, on peut regarder ici comme une circonſtance bien digne d'attention, que la matiere fécondante du palmier mâle ſoit venue de vint milles de diſtance; & que la troiſieme fois je l'aye reçue de Carlsruhe, par conſéquent de 80 milles, dans une mince enveloppe de papier, ſans qu'elle ait perdu quoi que ce ſoit de ſa propriété eſſentielle. Cette particularité confirme les rélations que nous avons de la culture & de la fécondation des palmiers en Orient, où l'on nous dit que, dans le tems de la fleur de ces arbres, les habitans vont chercher partout juſqu'au fonds des deſerts les fleurs mâles, qu'ils cueillent de deſſus les palmiers ſauvages; après quoi ils en font de gros bouquets, qu'ils mettent à côté des fleurs femelles, dans leur étui (*ſpata*), afin que la pouſſiere des premieres ſerve à féconder les autres. On aſſure que, pendant de ſemblables voyages, les fleurs mâles reſtent quelquefois quinze jours, ou trois ſemaines, en chemin, avant qu'on les emploie à la fécondation.

Avant que d'entreprendre les deux premieres expériences ſur le palmier, j'en fis d'autres préliminaires dans le Jardin Botanique Royal ſur l'arbre du maſtic (*Lentiſcus*), & ſur l'arbre de la térébenthine (*Piſtacia Terebinthus*), leſquelles eurent l'une & l'autre un bon ſuccès, ſurtout celle que je fis ſur le dernier de ces arbres, dont je recueillis une demi-meſure (*Metze*) de noix, qui ont ſervi à produire de jeunes plantes.

Ce

Ce furent ces eſſais qui me conduiſirent aux ſuivans, que j'eus enſuite occaſion de faire ſur le palmier.

Après la double réuſſite dont il a été fait mention, j'avois laiſſé repoſer le palmier dix-huit ans, ſans lui procurer aucune fécondation ultérieure, ne laiſſant pas pourtant de prendre beaucoup de peine pour me procurer de la pouſſiere de fleurs d'autres endroits. A la fin je m'adreſſai au célebre Docteur *Kœhlreuter*, Conſeiller du Margrave de Bade-Dourlach, un des plus habiles Naturaliſtes de notre tems, qui m'envoya, au mois de Mai, de cette pouſſiere de fleurs que je cherchois depuis ſi longtems en vain, avec une petite quantité de la même pouſſiere qu'il conſervoit déjà depuis un an, pour eſſayer l'une & l'autre. La derniere n'a déployé aucune vertu fécondante ſur notre palmier; mais la premiere a fait d'autant plus d'effet, comme le témoignent les palmes chargées de dattes qui ſont ſous vos yeux.

Ce fut l'année paſſée, entre le 9 & le 26 de Mai, que notre palmier pouſſa ſucceſſivement onze bouquets de fleurs; j'en fécondai trois à la fois de la maniere dont je vais rendre compte. Le Sr. *Müller*, Jardinier du Jardin Botanique Royal, avoit très bien préparé ce palmier à l'expérience projettée, en le nettoyant de la pouſſiere des vieilles feuilles, des autres débris & des bouquets de fleurs ſeches; & la force avec laquelle il évaporoit & attiroit depuis ce tems-là, rendoit tout à fait ſenſible le bon effet de ces précautions. Il avoit auſſi, à cauſe de la grande hauteur de cet arbre & de ſon emplacement, dreſſé au deſſous de la couronne un échaffaudage, qui mettoit en état de féconder régulierement les fleurs, & dans les commencemens de les conſidérer avec attention, auſſi longtems que cela étoit néceſſaire.

Les onze bouquets de fleurs étant ſortis de leurs étuis, pouſſerent tout à la fois une multitude de fleurs autour du palmier, qui répandoient une odeur extrêmement forte & pénétrante, mais en même tems très agréable, reſtaurante & vineuſe, qui parfumoit toute la ſerre, & engageoit ceux qui y entroient à la reſpirer longtems. Cet-

te odeur dura autant que ces fleurs continuerent à s'ouvrir les unes après les autres; mais, quand cela vint aux dernieres, elle s'affoiblit aſſez ſenſiblement. On avoit dans l'odeur dont je viens de parler l'indice le plus certain que les parties des fleurs deſtinées à la fécondation étoient parfaitement ouvertes; & le point précis de cette fécondation étoit reconnoiſſable par la forte affluence des ſucs. Les antheres étoient non ſeulement émouſſées & vuides de la matiere requiſe pour la fécondation, mais elles n'exhaloient point la bonne odeur reſtaurante, qu'on a coûtume de ſentir dans pluſieurs autres fleurs.

De cette maniere, les fleurs du palmier ſe trouvant dans leur plus grande force, & les parties feminines qui y étoient ouvertes, ayant leur enduit ordinaire d'humidité huileuſe, j'entamai le travail de la fécondation, qu'il falloit encore réitérer une fois à cauſe des fleurs tardives; & pour y procéder avec plus d'exactitude, je me ſervis la premiere fois de l'aſſiſtance de M. *Behrens*, habile Etudiant en Médecine, & la ſeconde, de celle de M. le Docteur *Martini*, ſavant Naturaliſte.

Des onze bouquets de palmier fleuris, je choiſis les trois de devant, qui étoient le plus près des fenêtres de la ſerre, & le mieux expoſés à la chaleur du Soleil. Le premier étoit le plus petit; je le couvris exactement de la vieille pouſſiere de fleurs qui avoit été gardée plus d'un an; mais elle ne produiſit aucun effet, comme je pus d'abord l'obſerver au bout d'une quinzaine de jours. Je ne regarde pourtant pas cet eſſai comme une tentative abſolument vaine. Le ſecond bouquet, qui étoit le plus conſidérable, fut fécondé par la pouſſiere des fleurs fraîches, autant que le permettoit la quantité des fleurs qui ſe trouvoient alors ouvertes. Le dernier ne reçut l'imprégnation qu'à ſa partie inférieure, ſans que les fleurs d'en haut retinſſent quoi que ce ſoit de la pouſſiere des fleurs. Ayant donc été obligé de garder encore huit jours la pouſſiere fécondante qui m'avoit été envoyée de Carlsruhe, je procédai à la ſeconde fécondation, de la maniere que j'ai déjà rapportée, dans les derniers jours du mois de Mai. Quand j'examinai enſuite quel avoit été l'effet de la pouſſiere des fleurs, je trouvai que le bord des fleurs avec les antheres émouſſées étoit tombé; ou du

moins

moins avoit ſouffert quelque changement; les petits ovaires s'étoient amollis, avoient pris un peu d'accroiſſement, leur couleur avoit varié & ils commençoient à devenir brillans.

La maniere dont les fleurs femelles ſont fécondées par la pouſſiere des fleurs mâles, eſt ſi ſimple, qu'il n'y a perſonne qui ne ſoit en état de l'exécuter; auſſi c'eſt le commun peuple qui s'en acquitte dans les pays Orientaux: il ne s'agit, comme je l'ai déjà dit, que de mettre le bouquet de fleurs mâles près des fleurs femelles, dans un étui, ſur le palmier, ou bien de répandre la pouſſiere ſur les fleurs ſans autre art. C'eſt de cette derniere façon que j'ai été obligé de m'y prendre dans mes premiers eſſais, ayant détaché avec une cueiller à caffé la pouſſiere qui tenoit à l'enveloppe de papier, & l'ayant enſuite fait tomber doucement ſur les fleurs. Au contraire, dans les dernieres expériences, j'ai poſé régulierement la pouſſiere ſur les fleurs ouvertes, avec un petit pinceau de cheveux, pareil à celui dont les Peintres ſe ſervent, & j'ai poudré doucement les fleurs, ſans en omettre une ſeule. Ce que j'ai fait, ſuffiſoit parfaitement; & la ſituation des fleurs, jointe à la conformation de leurs parties ouvertes, ne demandoit pas qu'on y employât l'art auquel on a recours quand il s'agit de fleurs plus petites, ou dont la ſtructure a quelque choſe de particulier. Tous les autres bouquets de fleurs laiſſerent tomber la plûpart de leurs petits fruits, que je n'avois pas fécondés; & ceux dont l'affluence du ſuc avoit un peu gonflé les parties charnues, n'eurent aucun noyau, mais porterent ſeulement une petite ſemence imparfaite & ſtérile; & leur groſſeur ne parvint à peu près qu'à celle d'un pois chiche ordinaire, comme on peut s'en convaincre en conſidérant les bouquets de fruits imparfaits que j'expoſe ici.

Au contraire le gros bouquet fécondé produiſit, ſur la fin du ſeptieme mois, des dattes mûres & parfaites, avec cette différence, que celles des premieres fleurs ſont les plus groſſes, au lieu que celles des ſecondes ſont de diverſes groſſeurs, à cauſe que dans les mois ſuivans la chaleur du Soleil a diminué; & en général elles ſont plus peti-

tes que les autres. La figure des dattes parfaites reſſemble à celle des olives; leur couleur eſt d'un brun de noix, & dans les plus belles, d'un brun de châtaigne. L'écorce extérieure eſt mince & fort brillante; celle du milieu au contraire eſt épaiſſe, filamenteuſe & grisâtre: ſous celle-ci ſe trouve l'enveloppe charnue & molle du noyau, qui a la couleur de la fleur de muſcade (*macis*) fraîche, quand elle entoure la coquille dure de la noix muſcade. L'odeur de cette ſubſtance charnue eſt déſagréable, tirant à celle du vieux beurre, ce qui eſt un ſigne de la maturité de ces dattes, qui, à cauſe de cela, ont reçu en Allemand le nom de *Butter-Dattel*. Quant au goût de ces dattes, qui a peu de douceur & beaucoup d'acreté, à quoi l'on peut ajoûter qu'il répond en quelque choſe à l'odeur, on peut le comparer à certains égards au goût du fruit non-mûr de la *Siliqua dulcis*, en Allemand *Johannis-Brod*, comme il a déjà été dit ci-deſſus. La multitude des fruits qui ſont fort ſerrés l'un près de l'autre dans la grappe, eſt cauſe que la plûpart ſont reſtés petits, quoiqu'ils ayent leur noyau parfait & fertile. On appelle *noyau* dans les dattes, la partie ſupérieure allongée, plus pointue que l'inférieure, auſſi pierreuſe que *Jean Bauhin* la caractériſe dans ſes Eſpeces des plantes, & avec cela un peu polie, & marquée de traits profonds. La reſſemblance qu'ont ces dattes avec les fruits des premieres expériences dans leſquelles la fécondation a réuſſi, met en état de prédire avec certitude qu'elles ſont propres à produire de jeunes palmiers.

Voici les conſéquences qu'on eſt en droit de tirer des eſſais entrepris avec ſuccès ſur notre palmier.

1. Que, dans certaines familles des plantes, il y a des tiges ſéparées les unes des autres, qui dépendent abſolument l'une de l'autre par rapport à leur fécondation naturelle, puiſqu'elles ſont produites l'une & l'autre de leurs ſemences par la même plante-mere; comme les animaux mâles & femelles proviennent ſans diſtinction des œufs fécondés d'une ſeule & même femelle.

2. Que

2. Que les deux tiges ſusdites agiſſent régulierement l'une ſur l'autre, & doivent agir de façon que de l'une ſoit tranſportée dans l'autre une certaine matiere formatrice particuliere, qui y produit un changement manifeſte, lequel conſiſte dans une véritable fécondation, de laquelle s'enſuit la propagation & la conſervation conſtante des eſpeces naturelles; comme le Regne végétal en fournit des preuves abondantes. Tout cela ne pourroit arriver, & n'arrive effectivement jamais ſuivant l'expérience commune, à moins que l'action efficace d'une des deux plantes ſur l'autre n'ait précédé.

3. Que l'action qui y eſt requiſe pour produire un changement auſſi conſidérable, n'a & ne peut avoir lieu ſans un contact réel, immédiat ou médiat, des deux palmiers, comme cela eſt requis dans les animaux mâles & femelles, conformément aux loix générales de la Nature & au témoignage manifeſte de l'expérience. Ce contact arrive en effet dans les plantes; mais, autant que nous en ſommes inſtruits juſqu'à préſent, l'unique voie conſiſte dans la pouſſiere des fleurs de la plante mâle, où, ſuivant l'idée diſtincte que la ſcience peut nous en fournir, ſe trouve contenu ce qui ſert à la fécondation de l'autre plante, & à toutes les ſuites qui en dépendent; tout comme la ſemence du mâle, chez les animaux, féconde l'œuf de la femelle.

4. Que, dans l'état naturel des choſes, après ce contact des deux ſexes, le changement dont il a été ſouvent fait mention, & au moyen de celui-ci la fécondation telle qu'elle a communément lieu dans le Regne végétal, arrivent immanquablement. Tout cela eſt ſubordonné à une loi unique, impoſée aux plantes & à leurs différentes eſpeces, dans leur premiere deſtination; loi ſuivant laquelle elles produiſent & tirent d'elles-mêmes leur propre ſemence fertile, qui ſert à les propager.

Ce qu'il y a d'eſſentiel dans l'ouvrage ſouverainement important de la génération des plantes, autant que les plus habiles Naturaliſtes

liſtes modernes ont pu parvenir à le découvrir en quelque maniere, en ſe fondant ſur les expériences les plus exactes & les plus fréquemment réitérées, eſt appuyé entr'autres choſes ſur les principales circonſtances ſuivantes, qui ne conſiſtent pas en de ſimples conjectures, ou en de vaines imaginations, mais qui ont été miſes à l'abri de toute conteſtation par des expériences phyſiques réelles. Mr. le Conſeiller & Docteur *Kœhlreuter* s'eſt rendu particulierement recommandable de nos jours par ſes découvertes dans ce genre; & il a fait peut-être lui ſeul à cet égard plus que n'avoient fait tous ceux qui l'ont précédé.

La pouſſiere des fleurs eſt dans les plantes ce qu'eſt la ſemence des mâles dans les animaux. Elle contient une matiere active, ſouverainement déliée, qui féconde les plantes femelles, & doit pour cet effet y être introduite; & alors elle y déploie ſa vertu pénétrante & expanſive avec une promtitude inconcevable: ce qui paroit par la ſubite défloreſcence de quelques fleurs, qui ſe contractent tout à la fois & tombent; ce qui arrive & doit arriver dans l'eſpace de ſept heures. La flêtriſſure & l'effeuillement des fleurs rendent témoignage de ce qui a précédé, auſſi bien que le fruit tendre qui ſubſiſte & continue à croître.

Cette pouſſiere des fleurs conſiſte uniquement en petites veſſies, de pluſieurs figures différentes, quoiqu'en général globuleuſes, rondes ou allongées, qui tiennent plus ou moins les unes aux autres, ou ſont même tout à fait iſolées; elles ſont formées d'une double pellicule écailleuſe en forme de rets, où eſt renfermée une véritable moëlle celluleuſe friable. Cette moëlle eſt une propagation des plus ſubtiles de la moëlle qui eſt répandue dans toute la plante, à commencer des fibres extérieures preſque inviſibles du chevelu de la racine, d'où elles montent dans le corps de la plante, & parvenant juſqu'aux fleurs & à leurs antheres, entre finalement dans les petites veſſies de la pouſſiere ſéminale, s'y termine, & renferme dans ſes cellules une humidité ſéparée & préparée pour le but le plus eſſentiel des plantes.

Cette

Cette humidité qui, avant que de ſortir des véſicules de la pouſſiere, n'eſt pas encore fluide, & demeure exempte de tout mêlange étranger, ſort à diverſes repriſes, ſans la moindre violence, à travers les petites ouvertures, les points, les canalicules, les crochets, les épines, ou autres parties de telle configuration qu'on voudra ſe les repréſenter; ce qui eſt procuré par une douce & alternative contraction de ces parties vivantes & ſouverainement irritables. C'eſt ce dont on peut ſe convaincre en obſervant que les globules de la pouſſiere des fleurs, lorſque quelque action trop forte les ſollicite extérieurement, comme l'eau le fait aiſément avant leur maturité, laiſſent ſortir rapidement & même éclater leur matiere encore crue & fluide. Au contraire, cette matiere de la pouſſiere des fleurs, quand elle eſt parfaite, & que ſon tems de ſortir eſt venu, ne le fait que peu à peu, ſans que ſes véſicules crevent pour cet effet, & elle s'étend ſur l'eau comme une huile tout à fait déliée. C'en eſt auſſi une, puiſqu'elle fournit proprement aux abeilles l'étoffe pour leur cire. Cette matiere huileuſe ſe manifeſte diſtinctement, quand on prend de la pouſſiere de fleurs fraîches, ou ſeches, par exemple, de pin, & qu'on la laiſſe fort longtems dans un mortier de verre avec du mercure courant pur en friction, ou même qu'on réitere la trituration fréquemment & longtems, juſqu'à ce que le mercure ſe ſoit diſtribué dans cette pouſſiere, au point qu'on ne puiſſe plus le remarquer que par l'accroiſſement de la peſanteur. La maſſe entiere de la pouſſiere change de couleur, elle tient enſemble, & repréſente une ſubſtance pareille à de la cire, qu'on peut pêtrir juſqu'à un certain point entre les doits, mais qui n'eſt pourtant pas encore de la cire; & quand on l'enveloppe dans du papier fin, comme cela m'eſt arrivé par hazard, elle pénetre tout ce papier de ſon huile ſubtile de façon qu'il a enſuite l'air d'avoir été imbibé d'huile de pavôt. Peut-être que cet eſſai peut encore conduire à quelque choſe de plus important, ſi, comme je l'ai auſſi fait, on forme des mêlanges de chaux métalliques, ou de limailles très déliées de métaux, ou de métaux mêmes, d'une maniere analogue à la précédente, avec diverſes pouſſieres de fleurs.

Quand

Quand la pouſſiere des fleurs a obtenu la perfection requiſe pour la féconda tion, de façon que ſes anthieres doivent s'ouvrir, ce qui a coûtume d'arriver ſucceſſivement à meſure que les fleurs s'épanouiſſent, & qui doit même ſe réitérer à diverſes repriſes; alors auſſi ees fleurs ont toujours une ſituation parfaitement adaptée à la féeondation de l'organe femelle, e'eſt à dire, qu'elles peuvent approcher plus près, ou retirer en arriere, le *ſtigma* du piſtil, ou la fente de l'ouverture qui eſt au tuyau de l'*uterus*, autant que cela eſt néeeſſaire, & que l'irritation dure, (comme on peut l'obſerver dans toutes les autres fleurs hermaphrodites fertiles.) Ce *ſtigma* eſt pour l'ordinaire velu en dehors, & garni, comme le ſont en dedans les canaux qui conduiſent le fruit à l'ovaire, ou à ſon *uterus*, de verrues déliées, de différentes figures, entre leſquelles la pouſſiere des plantes eſt portée extérieurement, & répand ſon huile. Ces verrues ſont de petits canaux, qui, lorſque les fleurs viennent à s'ouvrir, fourniſſent auſſi auparavant une quantité conſidérable d'une ſinguliere humidité, fort analogue à eelle que les véſieules de la pouſſiere de fleurs tranſſudent. C'eſt alors proprement le point de la féeondation: & elle arrive, ou avant, ou après. Cette circonſtance mérite d'être remarquée, & il ne faut pas la négliger, comme on le fait quelquefois, quand on veut féeonder les fleurs. Il y a quelque affinité entre cette liqueur végétale femelle, & la liqueur vaginale des animaux, deſquels peut-être les plus petits inſectes ne doivent pas être exceptés. Mais, ſi l'on faiſoit ſcrupule de ſe déeider à leur égard, juſqu'à ce qu'on ait atteint une plus grande certitude, il eſt toujours très important d'obſerver cette eireonſtanee, c'eſt que la fécondation n'arrive jamais dans les fleurs, avant que les canaux du fruit & le *ſtigma* ſe ſoient ouverts, & que cette eſpece partieuliere de baume en ſoit ſortie. Mais eomment les choſes ſe paſſent-elles à cet égard dans la multitude innombrable des animaux, même des plus petits inſectes & de toutes leurs eſpeees? Il y a tout à la fois de l'analogie & de très grandes variétés. Dans les animaux femelles, avant leur accouplement avec le mâle, les parties génitales s'ouvrent d'une maniere tout à fait manifeſte; les menſtrues en déeoulent aupa-

ravant,

ravant, ou s'il s'agit d'eſpeces qui n'y ſoient pas ſujettes, il y a tout au moins une humidité qui s'exhale en forme de globules les plus déliés, ou en forme de vapeurs humides, du vagin de leur uterus ou des tubes de leurs ovaires.

Les deux ſortes ſingulieres d'humidités qui ſont particuliérement filtrées dans les fleurs, & dont l'une tranſude de la pouſſiere des fleurs mâles, l'autre du tuyau de l'ovaire, ou du ſtyle de la fleur femelle, ſe réuniſſent & ſe confondent enſemble; par où l'une altere les propriétés de l'autre, ce qui produit une ſubſtance d'une troiſieme nature, laquelle participe à celles des deux précédentes: & cela ſe manifeſte plus ou moins dans les jeunes plantes, après la fécondation & la propagation. La partie la plus déliée de ces deux ſubſtances fluides nouvellement réunies, eſt portée par voie de ſuction dans l'ovaire, d'où elle entre dans les gouſſes des ſemences à peine formées & non développées; & en peu de tems elle y cauſe par la force qui lui eſt propre un ſi grand changement, qu'elle étend d'une maniere incroyable le point moëlleux qui s'y trouve, lui fournit la premiere nourriture, & poſe par là les fondemens du développement ultérieur du germe de la plante nouvellement formée. Pendant ce merveilleux changement, qui ſe manifeſte ſeulement dans les parties de la fleur, cette partie déliée de la moëlle qui, venant de la plante, s'eſt terminée dans l'ovaire des fleurs, paroit acquérir au moyen de l'humidité active qui a été décrite, l'addition d'un fluide vivant, qui la met en état de s'étendre, & qui eſt en même tems ſon premier aliment. Nous n'avons juſqu'à préſent qu'une idée tout à fait confuſe de ſa conſtitution eſſentielle & de ſa vraie maniere d'opérer; nous ne pouvons nous hazarder à en juger que d'après les ſuites viſibles de l'expanſion & du développement dont on vient de parler.

Cependant, comme l'étoffe primordiale de tous les fluides conſiſte en parties dures ou ſolides, qui, ſuivant leur eſpece, ont leur figure propre & déterminée, mais qui ne ſauroient conſerver leur fluidité

dité & les propriétés qui en dépendent hors d'une ſemblable liaiſon, dans pluſieurs circonſtances variables, qui peuvent & doivent s'y manifeſter dès qu'on y ajoûte ou qu'on en ôte quelque choſe; voilà pourquoi elles ceſſent fort aiſément de demeurer fluides. Cela s'exécute ſans grande difficulté, quand cette matiere ſouffre alternativement quelque évaporation, ou filtration, ou même dès qu'il s'y paſſe quelque eſpece de mouvement intérieur, qui a pour fondement la ſéparation de certaines parties conſtitutives; par où une certaine eſpece de particules de toute la maſſe entrent dans une liaiſon plus étroite, & s'approchent plus près les unes des autres, ſuivant un ordre déterminé, dont elles ſont plus ſuſceptibles que les autres, en vertu de leur nature particuliere. On ne ſauroit pourtant entrer à cet égard dans de grands détails, à moins qu'on ne ſoit porté à tirer des conſéquences de ce qui ſuit à ce qui a précédé; quoiqu'on demeure toujours fort éloigné de la certitude.

Pour ne pas être plus prolixe ſur ce ſujet que ne le permettent les bornes de ce Mémoire, je n'indiquerai que ce qu'il y a de plus néceſſaire à ſavoir ſur ce qui ſe manifeſte extérieurement, & de la maniere la plus ſenſible, après la fécondation des fleurs femelles. Auſſitôt que le ſuc huileux nouvellement introduit dans l'ovaire, comme je l'ai déjà dit, a pénétré dans les gouſſes des ſemences, il arrive un changement marqué dans toute la fleur. D'abord les antheres tombent avec tout ce qui étoit requis du côté de la partie mâle avant la fécondation, après quoi ſuivent la corolle & le calyce, à moins que cela ne leur ſoit déjà arrivé en même tems qu'aux antheres, ou peu auparavant, pendant la fécondation, lorſque les fleurs viennent à s'ouvrir. L'ovaire s'élargit peu à peu, ſa couleur change, & il prend l'apparence d'un fruit, tel que celui qui eſt propre à chaque eſpece. Mais, comme le premier dévéloppement des parties eſſentielles du fruit eſt procuré par la force & l'action de l'humidité ci-deſſus décrite, la ſeve auſſi du reſte de la plante ſert à faire croître tout le fruit, & à le conduire à ſa parfaite maturité.

Depuis

Depuis que j'ai rendu compte de la fécondation artificielle du palmier femelle dans le Jardin Botanique Royal, tous les effets & tous les changemens néceſſaires pour produire une ſemence parfaite & féconde, ont eu lieu; & cette ſemence eſt propre à donner de jeunes palmiers de ſon eſpece. La pouſſiere des fleurs mâles a été régulierement appliquée à cet uſage; & les dattes mûres avec leurs noyaux parfaitement durs témoignent du ſuccès de cette opération. A juger par leur état, on n'a aucun lieu de douter que, vers la fin du mois d'Avril prochain, ou dans le cours du mois de Mai, ces dattes ne fourniſſent déjà de jeunes palmiers, comme ont fait celles qui étoient nées dans le même Jardin en 1749 & 1750; & qu'en mémoire d'une expérience auſſi déciſive, on n'en demande dans pluſieurs Jardins étrangers. Ceux qui exiſtent & qui reſteront dans notre Jardin, ont un feuillage qui s'embellit d'année en année; & dans cent ans, ou fort au delà, ils inſtruiront nos deſcendans de la cauſe de leur exiſtence.

# SUR LA FIGURE DE L'OCÉAN.

## PAR M. LAMBERT.

Les changemens arrivés à la ſurface & dans l'intérieur de la Terre doivent ſans contredit être attribués, partie à des tremblemens de terre, partie à des inondations. Ce ſont du moins les deux cauſes les plus univerſelles & les plus violentes que nous connoiſſions. Je dis les plus violentes; car pour peu qu'on parcoure les pays montagneux, & qu'on repaſſe les différentes couches dans l'intérieur de la Terre, les rochers fendus, les pétrifications & les coquillages qui ſe trouvent en quantité dans des endroits élevés & fort éloignés de la mer & de leur lieu natal, on n'aura point de peine à ſe convaincre que des cauſes lentes & ſucceſſives ne ſuffiſent pas pour produire tous ces effets.

Les deux cauſes dont je viens de parler, ſubſiſtent encore, en ce que de tems en tems il arrive quelque inondation & qu'il ſe paſſe peu d'années ſans quelque ſecouſſe de tremblement de terre. Mais, quelque violent que puiſſe en être l'effet, il s'en faut de beaucoup qu'on puiſſe le comparer à ceux qui doivent avoir été produits dans les anciens tems, & dont nous voyons encore les marques. En effet, ſi dans le ſiecle où nous vivons un tremblement de terre étoit aſſez fort pour élever du fond de l'Archipel une nouvelle Isle, il s'en faudroit de beaucoup que cet effet fût comparable à celui d'un tremblement de terre, qui du fond des eaux pouvoit avoir élevé les rochers immenſes des Alpes ou des Cordelieres, avant que le feu ſouterrain pût s'ouvrir un paſſage libre par le ſommet des volcans.

Il en

Il en eſt de même des inondations. Elles ne ſe manifeſtent plus que dans les cas où des pluies trop abondantes font déborder les rivieres, & où les rivieres en continuant de charier du ſable, du limon, des pierres, les dépoſent vers leurs embouchures & ſe ferment par-là le paſſage dans la mer, & enfin où la mer agitée par la marée, ou par des tremblemens de terre, & aidée par les vents, s'éleve au deſſus de ſon rivage. Ces effets ſont peu de choſe vis à vis de ceux où la mer alloit dépoſer ce qui ſe trouvoit dans ſon fond ſur les ſommets des montagnes les plus éloignées.

Il paroit donc que le ſyſteme de notre globe s'eſt mis dans un certain état de permanence. Les volcans ſont ouverts & donnent une iſſue libre aux feux ſouterrains. De tems en tems il s'en ouvre un nouveau, tandis que d'autres ſe ferment. On conçoit auſſi qu'il pourroit s'en ouvrir au fond de la mer, ſi l'eau ne rempliſſoit pas d'abord la caverne qui commence à ſe former. Ce qui étant, on conçoit auſſi que la plûpart des tremblemens de terre tirent leur origine du fond de la mer, & que les terres maritimes ſont par-là même le plus ſujettes aux ſecouſſes violentes. Quelquefois auſſi, les feux ſouterrains vomiſſant aſſez de matériaux pour élever du fond de la mer une eſpece de montagne, on conçoit d'où vient qu'il ſe trouve des volcans en forme de petites Isles au milieu de l'Océan. Enfin, on ne ſauroit douter que le terrain s'affaiſſant peu à peu par les pluies & par ſon propre poids, n'ait beſoin de tems en tems d'être rendu plus poreux & plus ſpongieux, & que les ſecouſſes d'un tremblement de terre n'y contribuent d'autant plus efficacement que par-là les feux ſouterrains l'impregnent de nouveau de toutes ces parties ſalines, nitreuſes, & ſulphureuſes, qui par les eaux de pluie pouvoient avoir été emmenées dans l'intérieur de la Terre. Ce qui étant, on ne ſauroit douter que les tremblemens de terre ne renouvellent ſa fertilité, & qu'ils ne ſoient plus ou moins néceſſaires pour l'état de permanence dont je viens de parler.

Quant aux inondations, elles ne ſont ni ſi fréquentes ni ſi étendues que les tremblemens de terre. Comme leurs cauſes ſont moins cachées, l'induſtrie des hommes eſt parvenue à en arrêter & diminuer les effets. On laiſſe déborder le Nil, on en empêche les autres rivieres; & les Hollandois ſe mettent à l'abri des inondations qu'ils ont à craindre de la mer. Dans tous les autres pays, le terrain a plus d'élévation, & la mer elle-même s'eſt fait un lit de ſable élevé vers le rivage, qui ſert de digue. Et à cet égard, l'état de permanence eſt rétabli depuis des tems immémoriaux, ou, ce qui revient au même, depuis que la mer en découlant des parties élevées s'eſt retirée dans le lit que la conſtitution intérieure de la Terre lui a permis de creuſer.

Quoique de cette façon les tremblemens de terre & les inondations qui reviennent de tems en tems, ne nous offrent qu'un tableau en mignature de ces grands bouleverſemens que le globe terreſtre doit avoir ſoufferts dans les anciens tems, les loix générales de la Nature ne laiſſent pas d'être les mêmes. Suppoſons toute la ſurface du globe unie & couverte d'eau; les feux ſouterrains ne tarderont pas d'élever par-ci par-là la croûte de la Terre, qui les couvre & les enveloppe avec d'autant plus de violence qu'il n'y a point encore de volcans dont les ſommets ouverts pourroient leur laiſſer un paſſage libre. Que cette croûte ſoit de rochers, je vois ces rochers ſe fendre & s'élever dans des poſitions plus ou moins verticales. Ces feux ſe trouvant au deſſous du fond de la mer, on ne pourra leur donner moins d'une ou de deux lieues de profondeur. Or la denſité de l'air augmentant à meſure qu'on deſcend plus bas, on trouve, par une ſupputation aſſez facile, que cette denſité doit être 3, 6, ou même 9 fois plus grande dans cette profondeur qu'elle n'eſt à la ſurface de la Terre. Par-là elle eſt à peu près égale à celle de l'air comprimé dans la boëte d'un fuſil à vent. L'action du feu pourra encore augmenter juſqu'au quadruple l'élaſticité qui naît de cette compreſſion. Ainſi, dès qu'on ſuppoſe cet air enfermé dans une caverne entourée de rochers, les feux ſouterrains s'en approchant ne pourront manquer de produire des effets énormes, & répan-

répandus par une grande étendue de pays. Je ne trouve rien d'impoſſible à en déduire l'origine des Cordelieres, des Alpes, des Pirénées & en général des rochers les plus élevés qui ſe trouvent répandus ſur la ſurface de la Terre. Le mouvement & le bouillonnement des eaux, & l'enfoncement de la croûte qui en formoit le fond, en devoient être des ſuites naturelles.

Jettons maintenant un coup d'œil ſur les pays montagneux, pour retrouver de quelle maniere les eaux en découlerent. On a obſervé généralement, que les angles ſaillans d'une ſuite de montagnes ſont oppoſés aux angles rentrans de ceux d'une autre ſuite, qui en eſt ſéparée par la vallée. Je n'en alléguerai qu'un ſeul exemple, qui eſt aſſez grand pour être retrouvé dans les Cartes géographiques. On ſait que le Rhin coule de l'Orient vers l'Occident, depuis le Lac de Conſtance juſqu'à Bâle, & que depuis Bâle il prend ſon cours vers le Nord, en formant à très peu près un angle droit. Les montagnes de la Forêt noire ſe trouvent dans cet angle, & oppoſent par-là leur angle ſaillant à la ville de Bâle. De l'autre côté, les montagnes de la Suiſſe ſe joignent à celles qui ſéparent la Lorraine de l'Alſace, & forment par là l'angle rentrant.

On voit bien qu'à cet égard je regarde les montagnes de la Forêt noire comme une ſeule montagne, quoiqu'elles ſoient entrecoupées par pluſieurs vallées. Mais, outre que toutes ces vallées ſont fort étroites & plus élevées que le Rhin, je ne fais à cet égard autre choſe que d'appliquer à un plus grand diſtrict de pays ce qui s'obſerve à l'égard des montagnes d'une moindre étendue. On n'a qu'à paſſer le St. Gotthard pour voir que ſon joug eſt compoſé de monts & de vallées, qu'on prendroit pour telles, ſi on ne ſavoit pas combien il a fallu monter pour y parvenir. C'eſt ainſi que le terme de montagne eſt rélatif à la plaine qui en forme la baſe. Cette plaine peut faire partie d'une montagne plus étendue. Ainſi, à l'égard des plaines de l'Alſace, les montagnes des Vauges qui la ſéparent de la Lorraine, ne forment dans leur tout qu'une ſeule montagne, parce qu'elles ont une

baſe

baſe ou une racine commune. Il en eſt de même de celles de la Forêt noire, des Alpes, des Cordelieres &c.

Je reviens à la remarque, que les angles ſaillans ſont généralement oppoſés aux angles rentrans. J'ajoute que l'angle rentrant forme une petite vallée, qui entrecoupe plus ou moins la continuité du joug de la ſuite de montagnes qui bordent la grande vallée. Cette circonſtance produit à l'égard des vallées un certain parallélisme, qui les fait reſſembler aux lits des rivieres. Auſſi n'étoit-il gueres poſſible que les eaux découlaſſent autrement, lorſqu'en abandonnant les hauteurs elles alloient ſe rendre dans les enfoncemens qui forment actuellement le lit des mers. Ces eaux perdoient de leur viteſſe à meſure qu'elles pouvoient s'élargir, & par-là même elles devoient dépoſer le limon, le ſable, les pierres & les rochers qu'elles avoient chariés avant que d'avoir gagné une plaine plus ouverte. Les inondations qui arrivent encore quelquefois, nous font voir que les eaux, en dépoſant le ſable & les pierres qu'elles charient, d'un côté de leur courant, s'en vont de l'autre côté ſe creuſer un nouveau lit, pour acquérir enſuite un nouveau degré de viteſſe. C'eſt encore une circonſtance qui éclaircit les différens plis & les différentes courbures des vallées, qui exiſtent comme aiant été une fois creuſées par les eaux qui découloient des hauteurs vers les enfoncemens qui forment le lit des mers.

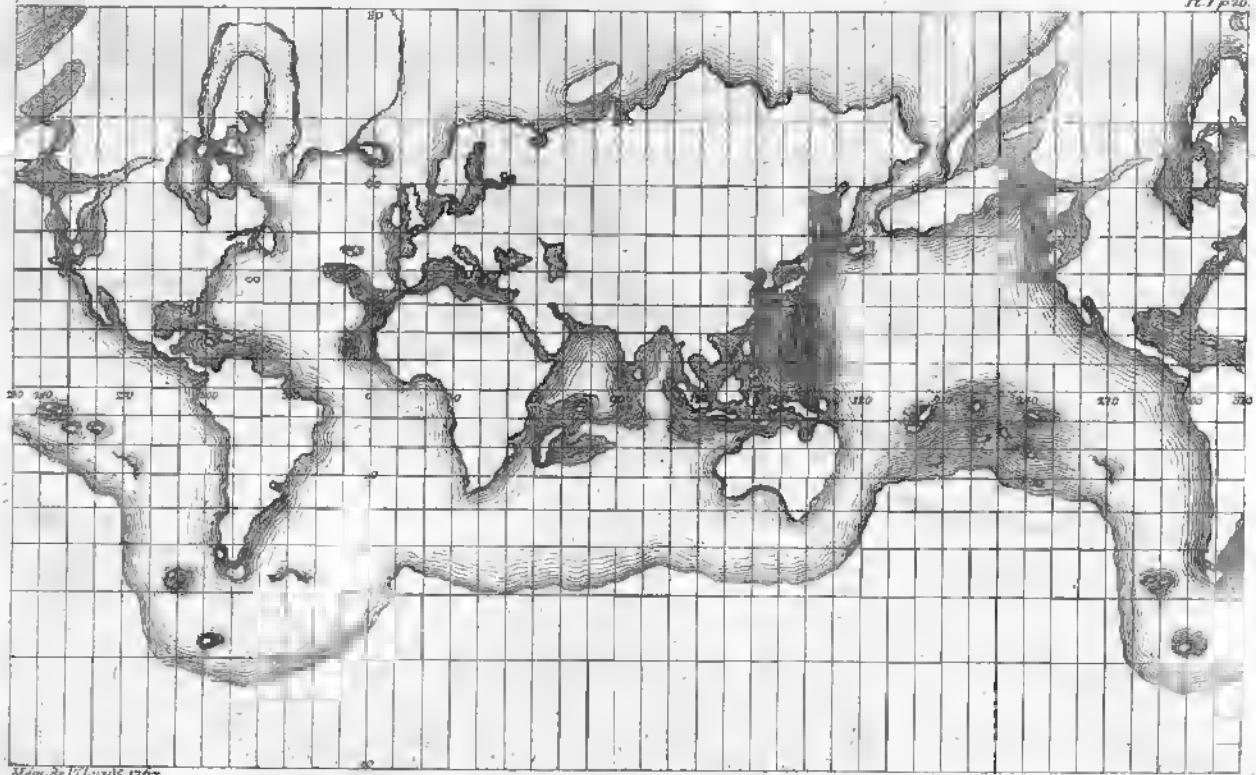
L'exemple que j'ai rapporté des angles ſaillans & rentrans aux environs de Bâle, nous fait déjà voir, que cette obſervation ne ſe borne pas aux petites vallées, mais qu'elle s'étend juſques ſur celles qui, pour embraſſer des plaines d'une vaſte étendue, ne ſont plus miſes au rang des vallées. Mais je vais plus loin, & ſans me reſtreindre à l'étroite ſignification des termes, je dirai que tout le continent du globe terreſtre peut être regardé comme une montagne, dont la véritable baſe eſt le fond de l'Océan. Dans cette dénomination il n'y a rien d'exagéré ni de gigantesque, quoiqu'à l'imitation des anciens Poëtes

on

on pourroit imaginer que les Géans pour entaſſer montagne ſur montagne avoient commencé leur travail au fond de la mer.

Mais la principale queſtion eſt de voir ſi nous retrouverons encore ici nos angles ſaillans oppoſés aux angles rentrans, ou ce qui revient au même, ſi l'Océan garde en grand un paralléliſme ſemblable à celui que nous avons remarqué avoir lieu à l'égard des montagnes & des vallées d'une beaucoup moindre étendue? Je dirai d'abord que les cauſes productrices étant les mêmes, il n'y a aucun lieu d'en douter. J'en connoiſſois une partie il y a 9 ans; elle me ſauta aux yeux en deſſinant, pour d'autres vues, une mappemonde ou une carte nautique ſuivant la méthode de *Mercator*. C'eſt le paralléliſme de la Mer Atlantique. Je le connoiſſois alors ſeul, parce que les rivages de cette mer ſont le plus complettement exprimés ſur les cartes. On ſait qu'il n'en eſt pas de même de la Mer Pacifique, parce que les Terres Auſtrales ſont encore fort inconnues. Les recherches de Mr. le Comte *de Redern*, & les deux hémiſpheres que l'Académie a fait publier d'après ces recherches, m'ont mis en état de completter ma mappemonde & en même tems le paralléliſme qu'il s'agiſſoit de trouver. C'eſt ce qui m'engagea à la deſſiner ſur une demi-feuille, en gardant la forme de *Mercator*, & en prolongeant l'équateur de 90 degrés au delà des 360, afin de faire d'autant mieux voir de quelle maniere les parties de devant ſe joignent à celles de derriere. Cette carte me diſpenſe d'en faire une longue deſcription. On y voit d'un coup d'œil que l'Océan forme une eſpece de riviere, qui coupe l'équateur dans la *Mer du Sud* & aux *Isles Philippines*, qu'une branche de cette riviere paſſe au haut de *Kamſchatka* vers le pole & qu'elle vient la rejoindre en formant la *Mer Atlantique*. Cette branche paroit être une eſpece de débordement. Car la Terre par ſon mouvement de rotation devoit faire couler les eaux d'Orient en Occident. La largeur de la Mer Pacifique rallentit ſon mouvement, & par-là elle devoit dépoſer ce qu'elle charioit, là où ſont les *Isles des Indes Orientales*, ce qui étoit encore d'autant plus poſſible, ſi on veut ſuppoſer qu'il y avoit eu là des rochers iſolés.

Mais la mer en ſe rétréciſſant le paſſage par ce qu'elle dépoſoit, & devenant par-là moins chargée, pouvoit d'autant plus aiſément ſe creuſer de côté & d'autre un nouveau lit. Nous voyons qu'elle prit ſon chemin, partie vers la *Sibérie*, partie au deſſous de la *Nouvelle Hollande*. Mr. le Comte *de Redern* ne décide pas ſi les Terres Auſtrales ſont partagées en deux continens. Mais, ſi cela étoit, il ſeroit très poſſible qu'il y eût encore une autre branche qui, en paſſant au deſſous de la *Nouvelle Hollande* vers le pole auſtral, revienne joindre la riviere principale au deſſous de l'*Amérique méridionale*. Quoi qu'il en ſoit, le courant de la branche ſeptentrionale, en revenant par la *Mer Atlantique*, ne pouvoit creuſer ſon lit ſans jetter de côté & d'autre le limon, le ſable & les pierres qui en occupoient la place. Cela nous fait concevoir d'où il peut venir, que l'*Europe* penche lentement vers le Nord, & que l'*Amérique méridionale* penche lentement vers l'Eſt. Enfin, comme la figure ſphérique de la Terre fait que la grande riviere qui coule le long de l'équateur rentre en elle-même, elle peut être revenue pluſieurs fois à la charge & avoir fait pluſieurs tours avant que de s'être miſe dans l'état d'équilibre & de permanence, où nous la voyons actuellement. Je n'entrerai plus dans aucun détail, parce qu'il y en a beaucoup plus qu'on ne peut s'imaginer.



# MÉMOIRE
## SUR
# LES OMBRES COLORÉES.
## PAR M. BÉGUELIN. (*)

M. *de Buffon* annonça en 1743, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, un phénomene qui lui avoit cauſé la plus grande ſurpriſe, & dont aucun Aſtronome, aucun Phyſicien, perſonne avant lui, n'avoit parlé, quoique le fait fût certain, & pût être obſervé par tous ceux qui ont des yeux: c'eſt que les ombres ſont toujours colorées au lever & au coucher du Soleil; qu'elles ſont quelquefois vertes, & ſouvent bleues, & d'un bleu auſſi vif que le plus bel azur. Il ſe contenta alors de donner le précis de cette obſervation, & ni lui, ni l'hiſtorien de l'Académie qui la rapporta, n'entreprirent d'en expliquer la cauſe.

J'ai bien du regret que le Mémoire que M. de Buffon promettoit à cette occaſion ſur la lumiere du Soleil levant & du Soleil couchant, & ſur celle qui paſſe à travers différens milieux colorés, n'ait point paru. On pouvoit s'attendre à y trouver d'excellentes recherches ſur ces objets, & ſur le phénomene dont je parle ici. Dix ans s'écoulerent depuis cette annonce, ſans que perſonne, que je ſache, eût tenté d'expliquer ce fait ſingulier. Le premier qui l'ait entrepris eſt M. l'Abbé *Mazéas*, dont le Mémoire imprimé en 1755 fait partie de l'Hiſtoire de notre Académie pour l'année 1752. Mais, comme ce n'étoit qu'incidemment qu'il y parloit des ombres colorées, on ne ſera pas ſurpris que l'explication qu'il en donne ne ſoit, ni auſſi préciſe, ni auſſi claire qu'on

 auroit

(*) Lû à l'Académie le 12 Févr. 1767.

auroit pû l'attendre de lui, ſi cette matiere avoit fait l'objet de ſon Mémoire. J'avoue ingénûment que, loin d'en être ſatisfait, c'eſt l'explication même propoſée alors par M. l'Abbé Mazéas qui me fit naître la premiere idée d'en chercher une plus ſatisfaiſante. Ce n'étoit d'abord, & dans des recherches de cette nature ce ne ſauroit être qu'une conjecture phyſique ; mais aiant eu depuis occaſion de la vérifier par un grand nombre d'obſervations, cette conjecture ſur la véritable cauſe de la couleur des ombres ſe trouve appuïée ſur un fait que tout le monde ſera à portée de confirmer ou de détruire par des obſervations ultérieures.

Je commencerai par rapporter le fait annoncé par M. de Buffon, dans les propres termes de ſon Mémoire:

„Au mois de Juillet dernier (c'étoit en 1743) comme j'étois," dit-il, „occupé de mes couleurs accidentelles, & que je cherchois à „voir le Soleil, dont l'œil ſoutient mieux la lumiere à ſon coucher qu'à „toute autre heure du jour, pour reconnoître enſuite les couleurs, & „les changemens de couleurs cauſés par cette impreſſion, je remarquai „que les ombres des arbres, qui tomboient ſur une muraille blanche, „étoient vertes. J'étois dans un lieu élevé, & le Soleil ſe couchoit „dans une gorge de montagne, enſorte qu'il me paroiſſoit fort abaiſ„ſé au deſſous de mon horizon; le ciel étoit ſerein, à l'exception du „couchant, qui, quoiqu'exemt de nuages étoit chargé d'un rideau „tranſparent de vapeurs d'un jaune rougeâtre; le Soleil lui-même étoit „fort rouge, & ſa grandeur apparente au moins quadruple de ce qu'elle „eſt à midi. Je vis donc très diſtinctement les ombres des arbres qui „étoient à 20 & 30 pieds de la muraille blanche, colorées d'un verd ten„dre, tirant un peu ſur le bleu. L'ombre d'un treillage qui étoit à „trois pieds de la muraille, étoit parfaitement deſſinée ſur cette murail„le, comme ſi on l'avoit nouvellement peinte en verd de gris. Cette „apparence dura près de cinq minutes, après quoi la couleur s'affoi„blit, avec la lumiere du Soleil, & ne diſparut entierement qu'avec „les ombres.

„Le

„Le lendemain au lever du Soleil, j'allai regarder d'autres om-„bres ſur une autre muraille blanche; mais au lieu de les trouver ver-„tes comme je m'y attendois, je les trouvai bleues, ou plutôt de la „couleur de l'indigo le plus vif; le ciel étoit ſerein, & il n'y avoit „qu'un petit rideau de vapeurs jaunâtres au levant; le Soleil ſe levoit „ſur une colline, enſorte qu'il me paroiſſoit élevé au deſſus de mon „horizon; les ombres bleues ne durerent que trois minutes, après „quoi elles me parurent noires; le même jour je revis au coucher „du Soleil les ombres vertes comme je les avois vues la veille.

„Six jours ſe paſſerent enſuite ſans pouvoir obſerver les om-„bres au coucher du Soleil, parce qu'il étoit toujours couvert de nua-„ges. Le ſeptieme jour, je vis le Soleil à ſon coucher; les ombres „n'étoient plus vertes, mais d'un beau bleu d'azur; je remarquai que „les vapeurs n'étoient pas fort abondantes, & que le Soleil aiant avan-„cé pendant ſept jours, ſe couchoit derriere un rocher qui le faiſoit „diſparoître, avant qu'il pût s'abaiſſer au deſſous de mon horizon. „Depuis ce tems j'ai très ſouvent obſervé les ombres, ſoit au lever, ſoit „au coucher du Soleil, & je ne les ai vues que bleues; quelque-„fois d'un bleu fort vif, d'autres fois d'un bleu pâle, d'un bleu foncé, „mais conſtamment bleues, & tous les jours bleues."

Voilà le récit de M. de Buffon, ſur lequel je remarque d'abord que, de plus de trente aurores, & d'autant de ſoleils couchans qu'il avoit obſervés l'été de 1743, & juſques fort avant dans l'automne, il ne fait mention que de deux ſeules ombres vertes, apperçues en Juillet, deux jours conſécutifs, au coucher du Soleil. Toutes les autres obſervations qu'il rapporte n'ont donné que des ombres bleues de différentes nuances, mais conſtamment bleues. Il eſt donc très vraiſemblable que les ombres des corps, lorſque le Soleil eſt proche de l'horizon, ſont régulierement & naturellement bleues, & que ce n'eſt que par accident que cette couleur bleue ſe change en verd. On ſait que le verd n'eſt qu'un compoſé des couleurs bleues & jaunes. Il ſuffit donc pour produire ce changement accidentel qu'il ſe mêle quelque choſe de jau-

ne à l'ombre bleue, ſoit que ce jaune vienne de la couleur jaunâtre du mur même qui reçoit l'ombre, ou qu'il tombe des raïons jaunes, de quelque part que ce ſoit, ſur la partie ombrée.

La queſtion principale à diſcuter, revient donc à ſavoir pourquoi les ombres du ſoir & du matin paroiſſent régulierement bleues? Or il eſt évident, ce me ſemble, que la raiſon de cette apparence conſtante ne ſauroit être tirée de la nature même des ombres. Elles n'expriment à nos yeux que l'abſence de la lumiere ſolaire interceptée par des corps opaques. Mais l'abſence de la lumiere n'eſt ni bleue ni verte; elle n'auroit même point de couleur, ſi l'uſage n'étendoit la notion des couleurs juſqu'au noir; ou plutôt, s'il y avoit un noir parfait, une ombre complette dans la Nature. Toutes les couleurs, & par conſéquent celles des ombres auſſi, doivent leur être à la lumiere qui les produit; & nous ne voïons la lumiere elle-même qu'entant qu'elle eſt colorée. Car, au fond, le ſens de la vue ne repréſente abſolument rien que des couleurs, & ce n'eſt que les diverſes nuances de ces couleurs qui nous font diſtinguer les divers objets, ou les parties différentes d'un même objet. On doit donc dire que les ombres, entant qu'elles ſont des ombres, ſont inviſibles, & qu'entant qu'elles ſont viſibles, ce ne ſont pas des ombres, mais des couleurs, produites par une certaine quantité de lumiere qui tombe ſur l'endroit où les raïons directs du Soleil ont été interceptés par l'interpoſition du corps opaque; & puiſque les ombres ſont viſibles depuis le lever du Soleil juſqu'à ſon coucher, on ne ſe trompera pas en diſant que les ombres ſont conſtamment colorées à toutes les heures du jour. Reſte donc à chercher la raiſon pourquoi elles affectent la couleur bleue lorſque le Soleil eſt peu élevé au deſſus de l'horizon, & que hors de là elles ont une couleur griſe plus ou moins approchante du noir.

Auſſi longtems que les cas ſont les mêmes, les apparences doivent être auſſi les mêmes: quand donc celles-ci varient, on ne peut chercher la raiſon de cette variation que dans la diverſité des circonſtances relatives à ces apparences. Voïons en quoi les circonſtances peuvent varier ici. D'abord, à la même hauteur du Soleil au deſſus de

l'hori

l'horizon, ſoit à ſon lever, ſoit à ſon coucher, les ombres ont la même couleur bleue. Cela indique que c'eſt le peu d'élévation du Soleil qui influe à donner cette couleur, & non certains degrés de chaleur, ou certaine conſtitution de l'air, puiſque ces dernieres circonſtances ſont rarement les mêmes le matin & le ſoir.

Mais quelle différence par rapport aux ombres peut-on trouver dans les diverſes hauteurs du Soleil au deſſus de l'horizon? J'en remarque deux principales: l'une c'eſt qu'au lever & au coucher, les ombres ſont les plus longues qu'il eſt poſſible, & qu'elles vont en décroiſſant par degrés juſqu'au moment du paſſage du Soleil par le méridien; la ſeconde différence, c'eſt que la lumiere du Soleil eſt la plus foible au moment de ſon lever & de ſon coucher, & qu'elle augmente en force à meſure que cet aſtre s'approche du point du midi.

Il ne paroit pas que la premiere de ces circonſtances puiſſe contribuer à donner aux ombres une couleur bleue. Que ces ombres ſoient plus longues, & ſi l'on veut plus dilatées, en un tems qu'en un autre, cela ne doit produire qu'une ombre plus foible, plus délaïée, au matin & au ſoir qu'en plein midi, mais de là ne ſauroit réſulter du bleu. D'ailleurs, les ombres verticales ne ſont pas ſenſiblement allongées quand le Soleil eſt à l'horizon; elles ne laiſſent pas néanmoins d'être auſſi bien colorées que les ombres horizontales.

La ſeconde circonſtance ne renferme pas non plus tout ce qui eſt requis pour donner l'apparence du bleu. Plus la lumiere du Soleil eſt foible, plus le contraſte entre la partie ombrée & la partie illuminée d'une muraille blanche eſt adouci; mais cet adouciſſement ne met point de nouvelle couleur dans l'ombre; tout ce qu'il peut, & ce qu'il doit naturellement produire, c'eſt de laiſſer mieux paroître la couleur qui ſeroit actuellement dans la partie ombrée. C'eſt ainſi que la lumiere affoiblie du Soleil à ſon lever & à ſon coucher laiſſe paroître des planetes qui, quoiqu'elles envoient à midi la même quantité de raïons ſur notre rétine, n'excitent alors en nous aucune perception ſenſible. C'eſt ainſi enco-

encore que l'éclat de la pleine Lune nous empêche d'appercevoir un grand nombre d'étoiles que nous voïons bien diſtinctement dans ſon déclin. Je conclus de cela que la partie du mur qui eſt dans l'ombre doit recevoir réellement des raïons bleus pendant tout le jour, & que ce n'eſt que parce que l'éclat du grand jour obſcurcit en nous la ſenſation de ces raïons, qu'ils ne colorent point l'ombre auſſi longtems que le Soleil eſt élevé de pluſieurs degrés au deſſus de l'horizon; mais qu'à meſure que l'éclat du Soleil s'affoiblit, les raïons bleus commencent à faire ſenſation, non à la vérité dans les endroits illuminés par la lumiere directe du Soleil, trop vive encore pour ne pas offuſquer une lueur ſi douce, mais dans les endroits où les raïons immédiats du Soleil ne pénetrent point, & où nos yeux n'étant plus frappés de l'éclat d'une vive lumiere peuvent ſentir une impreſſion plus foible.

Il ne s'agit donc plus que de trouver la ſource de ces raïons bleus qui, toujours préſens à notre vue, ne paroiſſent que dans les ombres du matin & dans celles du ſoir. Or cette ſource ſe trouve tout naturellement dans l'air pur, qui nous paroit lui-même bleu, & qui par conſéquent reflêchit les raïons qui excitent la ſenſation de cette couleur préférablement à tous les autres. Tous les objets à portée de recevoir les raïons directs du Soleil, ſont en même tems expoſés à recevoir une quantité plus ou moins grande de raïons que l'air reflêchit; & comme ceux-ci ne ſont pas néceſſairement interceptés quand ceux qui viennent immédiatement du Soleil le ſont, il n'eſt pas ſurprenant que la partie qui eſt dans l'ombre en puiſſe reflêchir quelques uns vers nous, & que nous les appercevions auſſitôt que la lumiere qui les offuſquoit s'eſt affoiblie juſqu'à un certain degré.

Il eſt bon cependant de ſe défier en Phyſique du raiſonnement le plus plauſible auſſi longtems qu'on ne peut pas le vérifier par des expériences déciſives. Le ſéjour de la ville n'étoit pas propre à celles que je ſouhaitois de faire pour conſtater mes conjectures; mais j'ai eu dans la ſuite occaſion de les vérifier à la campagne: & je vai donner le précis de ce que j'ai obſervé.

Me

Me trouvant en Juillet 1764, au village de Boucholtz, j'y obſervai en raſe campagne, & par un ciel ſerein, les ombres projettées ſur le papier blanc de mes tablettes. A' ſix heures & demie du ſoir, le Soleil étant encore élevé d'environ quatre degrés, ou de huit de ſes diametres au deſſus de l'horizon, je remarquai que l'ombre de mon doigt, ou celle des corps interpoſés, qui tomboit ſur ce papier, étoit encore d'un gris obſcur, tant que je tenois les tablettes verticalement oppoſées au Soleil; mais, lorſque je les couchois preſque horizontalement, en ſorte que les raïons du Soleil les raſoient fort obliquement, le papier éclairé prenoit une teinte bleuâtre, & l'ombre qui tomboit ſur ce papier paroiſſoit d'un beau bleu clair.

Quand l'œil étoit placé entre le Soleil & le papier horizontal, ce papier, quoiqu'éclairé du Soleil, montroit toujours une teinte bleuâtre; mais, quand je tenois mes tablettes ainſi couchées entre le Soleil & l'œil, je pouvois diſtinguer ſur chaque point élevé, produit par les petites inégalités du papier, les principales couleurs priſmatiques; on les apperçoit de même ſur les ongles, & ſur la peau de la main. Cette multitude de points colorés de rouge, de jaune, de verd, & de bleu, fait preſque diſparoître la couleur propre des objets.

A' ſix heures & trois quarts, l'ombre commença d'être bleue, même lorſque les raïons du Soleil tomboient perpendiculairement ſur le papier vertical. La couleur étoit plus vive quand les raïons tomboient ſous une inclinaiſon de 45 degrés. Même à une moindre déclinaiſon du papier, j'appercevois déjà diſtinctement que l'ombre bleue avoit une bordure plus bleue à ſon extrémité horizontale qui regardoit le ciel, & une bordure rouge à l'extrémité horizontale qui étoit tournée vers la terre. Mais, pour voir ces bordures, il faut que le corps opaque ſoit fort proche du papier: plus il en eſt voiſin, plus la bordure rouge eſt ſenſible; à la diſtance de trois pouces, toute l'ombre eſt bleue.

A' chaque obſervation, après avoir tenu les tablettes ouvertes contre le ciel, je les tournois vers la terre qui étoit tapiſſée de verdure;

re; je les y tenois de maniere que le Soleil pût les éclairer, & les corps y projetter des ombres; mais, dans cette poſition, je n'ai jamais pû appercevoir d'ombre bleue ou verte, ſous aucune obliquité d'incidence des raïons ſolaires que ce pût être.

A ſept heures, le Soleil paroiſſant encore élevé d'environ deux degrés, les ombres étoient d'un très beau bleu, même lorſque les raïons tomboient perpendiculairement ſur le papier. La couleur ſembloit embellir quand le papier récliné du Soleil par ſa partie ſupérieure embraſſoit, pour ainſi dire, depuis le couchant une amplitude verticale de 45 degrés au delà du zénith. Cependant je ne dois pas paſſer ſous ſilence une ſingularité à laquelle je ne m'attendois pas; c'eſt que, dans ce même tems, un champ du ciel plus vaſte n'étoit pas favorable à la couleur bleue; & que l'ombre tombant ſur les tablettes tournées horizontalement vers le ciel, n'étoit plus colorée, ou que du moins je n'y démêlois qu'un bleu très foible, & très délaïé. Cette ſingularité réſulte ſans doute du peu de différence qu'il y a dans cette ſituation, quant à la clarté, entre la partie du papier qui eſt éclairée, & celle qui eſt dans l'ombre. On ſait que la quantité de lumiere qui tombe ſur un objet diverſement incliné ſuit la raiſon du ſinus de cette inclinaiſon. Ainſi, quand mes tablettes étoient verticales, l'éclat de la partie éclairée étoit à ſon *maximum*, exprimé par le ſinus totus ou l'unité; à une inclinaiſon de 45 degrés, cet éclat n'eſt plus que la $\frac{7}{10}$ partie de l'éclat total. Dans une ſituation préciſément horizontale, il ſeroit nul, & ſon interception ne produiroit par conſéquent pas même de l'ombre. Il n'eſt donc pas étrange que la perception des raïons bleus ne ſoit preſque pas plus ſenſible ſur la partie du papier qui eſt dans l'ombre, que ſur celle qui n'eſt plus éclairée du Soleil que très foiblement. Ainſi le trop & le trop peu d'éclat de la lumiere ſolaire produiſent, mais par des raiſons différentes, à peu près un même effet; c'eſt de rendre inſenſible dans l'ombre la lumiere bleue que le ciel y reflêchit.

Il ſeroit ſuperflu de rapporter ici un grand nombre d'obſervations pareilles à celle dont je viens de rendre compte. Il me ſuffira de dire

dire qu'elles m'ont toujours exactement donné le même réſultat ; & que je n'en ai fait aucune qui n'ait confirmé ma conjecture ſur la cauſe de la couleur bleue des ombres. Je n'en ai jamais vû de vertes, que lorſque je faiſois tomber l'ombre ſur un papier jaune, ou ſur un mur jaunâtre ; & en général la couleur des ombres ſe modifie ſur la couleur du corps qui les reçoit. Je ne voudrois pourtant pas aſſûrer qu'il n'y ait d'autres ombres vertes que celles qui paroiſſent ſur des corps jaunâtres. Car, ſi c'eſt ſur la même muraille que M. de Buffon a apperçu au coucher du Soleil des ombres bleues, ſept jours après avoir vû ces ombres vertes, il ſeroit prouvé que la raiſon de la couleur verte n'étoit pas dans la couleur propre de la muraille ; il la faudra chercher dans la couleur du ciel vers le couchant, qui, comme Mr. de Buffon le rapporte, étoit alors, quoiqu'exempt de nuages, chargé d'un rideau tranſparent de vapeurs d'un jaune rougeâtre ; la lumiere d'un ciel ainſi coloré tomboit ſur la muraille, & s'y combinoit avec autant de raïons bleus que l'expoſition du mur lui permettoit d'en recevoir du reſte de l'atmoſphere ; de ce mélange a pû réſulter une couleur verte, inviſible ſur un fond blanc éclairé par le Soleil, & très ſenſible ſur la partie de ce fond que le Soleil n'éclairoit pas. Il ſe pourroit encore que le verd, apperçu par M. de Buffon, vint du reflêt occaſionné par le treillage qui n'étoit qu'à trois pieds de la muraille. Cette muraille étoit expoſée aux raïons du Soleil couchant ; elle reflêchiſſoit ſans doute ces raïons en tous ſens ſur la verdure voiſine, & celle-ci les renvoïoit peut-être à ſon tour colorés de verd ſur la muraille, en y interceptant même une partie de la lumiere du ciel. J'avoue cependant que je n'ai jamais apperçu ce reflêt verd, auquel je m'attendois de la part des arbres voiſins d'une muraille blanche oppoſée au Soleil couchant.

Au reſte les ombres bleues ne ſont pas préciſément aſtreintes aux heures du lever & du coucher du Soleil. Je les ai obſervées à trois heures après midi, le 19 de Juillet, ainſi dans la ſaiſon où le Soleil a le plus de force ; mais c'eſt que le Soleil étoit enveloppé d'un brouillard très clair, qui en affoibliſſoit la lumiere ; le ciel entier étoit brouillé, & la partie la plus claire étoit d'un bleu trouble.

Quand le ciel eſt ſerein, les ombres commencent d'être bleues lorſque l'ombre horizontale a huit fois en longueur, la hauteur du corps qui la produit, ce qui par les tables des ſinus indique l'élévation du centre du Soleil de 7°, 8′, au deſſus de l'horizon. Mais, comme cette obſervation pourroit ne pas convenir également à toutes les ſaiſons, je dois ajoûter que c'eſt au commencement d'Août que je l'ai faite.

Outre les ombres colorées dont j'ai parlé juſqu'ici, qui ſont produites par l'interception des raïons directs du Soleil, on en peut obſerver de ſemblables, preſque à toutes les heures du jour, dans tous les appartemens où la lumiere du Soleil pénetre par la refléxion de quelque corps blanc; pourvû, & c'eſt une ſuite néceſſaire de mon explication, que de l'endroit ſur lequel on fait tomber l'ombre on puiſſe découvrir quelque partie du ciel ſerein. Ainſi, dans une chambre qui ne recevra les raïons du Soleil que par le reflêt d'une maiſon blanche ſituée vis à vis, ou du jambage extérieur de la fenêtre, on verra, ſi par exemple l'expoſition eſt au couchant, juſqu'à midi & plus tard encore, l'ombre de la croiſée ſe colorer d'un bleu très vif ſur le jambage intérieur & oppoſé de la même fenêtre, s'il eſt peint en blanc, & qu'on ait ſoin d'affoiblir le jour de la chambre au moïen de rideaux autant qu'il ſera néceſſaire. A l'aide de cet affoibliſſement on peut, même lorſque le Soleil éclaire immédiatement la chambre, donner aux ombres la couleur bleue à toutes les heures du jour; & l'on pourra ainſi ſe convaincre que cette couleur diſparoit préciſément aux endroits de l'ombre d'où l'on ne ſauroit plus appercevoir aucune partie du ciel.

J'ai déjà fait mention ci-deſſus d'une bordure, ou ombre jaune rougeâtre, qu'on apperçoit ſouvent au deſſous de l'ombre ordinaire, lorſque celle-ci eſt teinte en bleu. Toutes les obſervations que j'ai faites là-deſſus me portent à croire que cette ombre rouſſe réſulte de l'interception de la lumiere céleſte, c'eſt à dire, de l'interception des raïons bleus reflêchis par le ciel. Ainſi, de même que l'abſence de la lumiere ſolaire laiſſe voir dans l'ombre d'une croiſée la clarté bleue de

la

la lumiere du ciel, de même auſſi l'interception de cette lumiere bleue ne laiſſe voir dans l'endroit où la croiſée l'intercepte que la clarté jaune rougeâtre, produite ou par les raïons du Soleil à ſon lever & à ſon coucher, ou par le ſimple reflêt des corps terreſtres circonvoiſins. C'eſt là ſans doute la raiſon pourquoi cette ombre jaune ne paroit au deſſous de la bleue, que lorſque le corps opaque qui intercepte la lumiere eſt très proche du corps blanc ſur lequel l'ombre eſt reçue. Car il eſt aiſe de démontrer généralement que l'interception de la lumiere du ciel ne ſauroit commencer d'avoir lieu, que lorſque la largeur du corps opaque ſera à ſa diſtance du fond blanc qui reçoit l'ombre, comme le double ſinus de la demi-amplitude du ciel eſt à ſon coſinus. Ainſi, pour une amplitude de 126 degrés, par exemple, où l'on auroit la raiſon du ſinus de 63° à ſon coſinus, environ comme 2 à 1, il faudra, pour que l'ombre jaune commence à exiſter, que le corps opaque qui produit l'ombre ait une largeur quadruple de ſa diſtance au papier, ou au corps blanc ſur lequel l'ombre doit paroître; & ce ne ſera qu'en rapprochant d'avantage cette diſtance, que l'ombre deviendra ſenſible; la diminution de la diſtance étant toujours dans ce cas-ci égale au quart de la largeur de l'ombre.

Avant de quitter les ombres bleues, je vais en rapporter d'une troiſieme eſpece, qui ſans doute ont encore la même origine. Je les ai ſouvent apperçues au commencement du printems lorſque liſant le matin à la clarté d'une bougie, la lumiere du jour naiſſant, qui n'eſt autre choſe que les raïons bleus reflêchis par le ciel, ſe confondoit ſur la muraille avec celle de la bougie. Dans cette circonſtance l'ombre formée par l'interception de la bougie, à la diſtance d'environ ſix pieds, étoit d'un beau bleu clair; ce bleu devenoit plus foncé à meſure que le corps interceptant étoit rapproché du mur, & très foncé lorſque l'intervalle n'étoit plus que de quelques pouces. Mais, partout où la lumiere du jour ne pénétroit pas, par exemple ſur le papier du livre que je liſois, & qui ne recevoit que la lumiere de la bougie, l'ombre étoit noire ſans le moindre mélange de bleu. Pareillement auſſi les

endroits qui n'étoient éclairés que par la ſimple lumiere du jour naiſſant, & où la bougie ne luiſoit point, ne préſentoient que des ombres ordinaires. A meſure que le jour naturel augmente, l'ombre occaſionnée par l'interception de la lumiere s'affoiblit; le bleu devient de plus en plus blanchâtre, & ſe diſſipe enfin totalement.

L'obſervation rapportée par M. l'Abbé Mazéas dans le Mémoire dont j'ai fait mention dès l'entrée, eſt entierement analogue à celle que je viens d'indiquer; mais l'explication qu'il en donne, & qu'il étend à toutes les ombres colorées, ne me paroit, comme je l'ai déjà inſinué, ni claire, ni ſatisfaiſante. Je vais la tranſcrire ici, pour laiſſer à chacun la liberté de choiſir entre deux diverſes explications d'un même fait:

„La lumiere de la Lune," dit M. l'Abbé Mazéas, „& celle „d'une bougie placée à ſix pieds de diſtance d'une muraille très blan„che, alloient toutes les deux frapper un corps opaque, qui n'étoit „éloigné du mur que d'un pied. Ces deux lumieres me donnoient „deux ombres du même corps. L'ombre que formoit le corps opa„que en interceptant la lumiere de la Lune donnoit du rouge, & l'om„bre que formoit le même corps en interceptant la lumiere de la bou„gie donnoit du bleu. Ces deux lumieres formoient un angle de 45 „degrés; d'où il ſuit que l'ombre formée par l'interception de la lu„miere de la Lune devoit être éclairée par celle de la bougie, & que „l'ombre formée par l'interception de la lumiere de la bougie devoit „être éclairée par celle de la Lune."

Voilà le fait: voici maintenant l'explication que Mr. l'Abbé en donne.

„Il eſt donc évident, (pourſuit-il,) que dans ce cas les couleurs „ne venoient que de l'affoibliſſement de la lumiere, qui, en frappant no„tre organe avec plus ou moins de vivacité, peut y produire la même „ſenſation à peu près que produiſent les raïons de la lumiere ſéparée „& rompue par le priſme — — Les couleurs qui ſont ici produites

par

„par l'affoibliſſement de la lumiere, me paroiſſent devoir être regardées „comme une conſéquence de l'action des corps ſur cette même lumie„re; ſuivant qu'elle ſera plus ou moins forte, elle ſera plus ou moins „attirée par le corps opaque, & par conſéquent les raïons d'une eſpe„ce ſe ſépareront des autres, & nous donneront par conſéquent la ſen„ſation des couleurs qu'elles doivent nous imprimer par leur nature.

„C'eſt pareillement, ajoute M. Mazéas, à ce principe qu'on „doit rapporter, à ce qu'il me ſemble, les ombres colorées des corps „au lever & au coucher du Soleil, c'eſt à dire lorſque la lumiere de „cet aſtre eſt très foible. Ce phénomene, dont M. de Buffon nous „a donné les détails dans un Mémoire ſur les couleurs accidentelles, „auſſi bien que les couleurs obſervées par M. Halley à différentes pro„fondeurs de la mer, ne me paroiſſent donc venir que de la *diffraction* de „la lumiere, découverte par *Grimaldi*, & depuis éclaircie par M. *New„ton.* Mais ce principe que la Nature emploie pour ſéparer les raïons „de la lumiere, n'eſt pas à beaucoup près auſſi puiſſant que la *reflexion*, „ni celle-ci auſſi puiſſante que la *refraction.* Les couleurs qui ſont „l'objet de ce Mémoire, & qui ont été produites par la reflexion des „raïons de deſſus une ſurface mince, étoient très impures, comme je „l'ai déjà remarqué; mais celles dont je viens de parler, qui ont été „produites par la lumiere de la Lune & d'une bougie, l'étoient infini„ment davantage."

Il paroit donc, ſi je ne me trompe, que, ſuivant la penſée de M. l'Abbé Mazéas, la cauſe phyſique des ombres colorées doit être attribuée à l'attraction plus foible qu'exercent les corps opaques ſur une lumiere plus foible; cette attraction produit une diffraction d'où réſultent des couleurs infiniment impures, telles que celles des ombres colorées.

Sans entrer dans une diſcuſſion phyſique ſur les difficultés que cette explication pourroit renfermer, il ſuffira d'obſerver qu'en l'adoptant

doptant on ne ſauroit rendre raiſon pourquoi le même degré de lumiere étant expoſé à l'action du même corps opaque produit, tantôt une ombre du plus beau bleu, tantôt une ſimple ombre ordinaire? Je ne vois pas trop bien non plus pourquoi, dans l'obſervation de M. l'Abbé Mazéas, le même corps opaque ne ſépare que des raïons bleus d'un des corps lumineux, & des raïons rouges de l'autre. Il me paroit bien plus ſimple de dire: que là où la lumiere de la bougie ne pouvoit pas pénétrer, l'ombre qui receevoit la lumiere de la Lune mêlée à l'azur du ciel, devoit être bleue, & que là où ni les raïons reflêchis par le ciel, ni ceux de la Lune ne pénétroient pas, l'ombre devoit être rouge, puiſqu'elle étoit éclairée par la lueur rouge d'une bougie; qu'enfin partout ailleurs où les raïons venant du ciel, de la Lune, & de la bougie ſe mêloient également, la couleur devoit être d'un éclat ſupérieur aux deux ombres, & d'un ton proportionné à la quantité de blanc, de rouge, & de bleu, que ces diverſes lumieres contenoient.

# DISSERTATION
## SUR
# L'ART DE LA TEINTURE
## DES ANCIENS ET DES MODERNES.

PAR M. DE FRANCHEVILLE.

Je dois dire d'abord par forme d'Avant-propos, qu'en 1743, tems où le Roi renouvellant l'Académie me fit l'honneur de m'y admettre, je lus dans une des premieres aſſemblées cette Diſſertation, telle qu'elle étoit alors. Mais comme depuis, en compoſant le poëme du *Bombyx*, j'avois occaſion d'y décrire la Teinture de la ſoie; cela m'a mis dans le cas d'étudier plus à fond, non ſeulement la théorie, mais auſſi la pratique de cet art: & par ce même moyen j'ai rendu ma Diſſertation plus utile, en l'augmentant d'une ſeconde partie qui eſt celle de la Teinture des Modernes, que je n'avois fait qu'effleurer. C'eſt dans ce nouvel état que je produis aujourd'hui cette Diſſertation.

## PREMIERE PARTIE.
### *De la Teinture des Anciens.*

On ne ſauroit douter que l'art de la Teinture ne ſoit extrêmement ancien; pluſieurs Hiſtoriens le témoignent: mais on n'en voit rien dans l'Ecriture avant le Déluge. Je croi même que ce qu'on y lit de cette robe *bigarrée* que Jacob fit, plus de 600 ans après, à ſon fils Joſeph, ne doit être entendu que d'un aſſemblage de peaux marquetées, des agneaux, des brebis & des chevres, qui avoient été le partage de Jacob, après les vingt années qu'il avoit paſſées au ſervice de Laban ſon beau-pere. Geneſe ch. 37. v. 3.

Cependant, ſi la Teinture n'étoit pas dès-lors inventée, il eſt certain qu'elle ne tarda pas à l'être. Car dans le même ſiecle (ſavoir l'an du monde 2371) il eſt fait mention d'un fil d'*Ecarlate* qui fut attaché au bras de l'un des jumeaux que Thamar avoit conçus de Juda ſon beau-pere qui étoit fils de Jacob. Cette Ecarlate étoit le κόκκινον, ſuivant la verſion des Septante, c'eſt à dire la couleur de roſe tirée du *coccum* des Latins, qui eſt la *graine d'Ecarlate* ou *de Vermillon* des François, que les Hébreux & les Arabes rendent par le mot *Kermès*, qui ſignifie *Vermiſſeau:* d'où les François l'ont appellée *Graine de Vermillon.*

Idem, ch. 38. v. 27 – 30.

D. Hieronymus ad Fabiolam.

Cette étymologie revient parfaitement à l'idée que l'on a aujourd'hui de cette graine, qui eſt l'ouvrage d'un ver, & non pas la ſemence de l'arbriſſeau ſur lequel on la recueille. Cet arbriſſeau eſt une eſpece de Houx ou de petit Chêne verd. Au milieu du printems, après que les pluies ont ceſſé, l'on obſerve ſur ſes feuilles & ſur ſes jeunes pouſſes une ſorte de petite veſſie de la groſſeur & de la couleur d'un pois, laquelle eſt produite par la piquûre d'un inſecte qui y dépoſe ſes œufs. On donne le nom de *mere* à cette veſſie, parce que c'eſt d'elle que ſortent toutes les graines, qui au commencement de l'Eté deviennent des inſectes preſque imperceptibles à la vue. Ces petits animaux s'attroupent & gagnent le haut de l'arbriſſeau. Là groſſiſſant & prenant une couleur blanchâtre, ils ſont bientôt de la grandeur d'un grain de millet. Leur blancheur ſe change en une couleur de cendre: mais alors quittant la figure d'inſecte, ils deviennent ſemblables à un pois; & lorſque ces grains ſont parvenus à un degré de maturité que connoiſſent ceux qui les recueillent, ils les détachent de l'arbre, & les trouvent remplis de vermiſſeaux de couleur rouge. En les tranſportant, il arrive ſouvent qu'on rompt la pellicule qui les enveloppe, parce qu'elle eſt fort délicate. Pendant ce tems-là ces vermiſſeaux ſont immobiles & comme endormis. La ſaiſon propre étant arrivée, on les jette ſur un linge & on les expoſe au Soleil. Alors, la chaleur les ranimant, ils s'efforcent de ſe ſauver; mais celui qui en a ſoin & qui ne les perd pas de vue, ſecouant le linge par les coins, les rejette dans le

Petr. Quiqueranus, in lib. 2. de laud. Provinciæ, fol. 48.

le milieu, juſqu'à ce qu'ils meurent. Enfin les grains qui ont échappé à ſes recherches en les recueillant, forment bientôt un nombreux eſſain de petits moucherons qui s'élevent en l'air, & qui reviennent dans la ſaiſon ſur les mêmes arbriſſeaux pour y recommencer leur ouvrage. Ces obſervations que m'a fourni un auteur du milieu du XVI. Siecle (*) qui aſſure les avoir faites dans la Crau d'Arles en Provence, où la récolte de la graine d'Ecarlate produiſoit de ſon tems *11* mille écus d'or chaque année; ces obſervations, dis-je, cadrent aſſez avec celles de quelques autres Ecrivains plus récens (**), ſi ce n'eſt que ceux-ci diſent que quand les grains ſont mûrs & qu'on en a fait la récolte, on en tire le ſuc ou la pulpe, ou bien on l'arroſe de vinaigre pour tuer les inſectes qui ſont renfermés au dedans, & qui ſans cette précaution venant à éclore, laiſſeroient les coques vuides, qui ne ſeroient preſque plus d'aucune utilité, ſoit pour la Médecine qui en tire le Syrop d'Alkermès, ſoit pour la Teinture.

On peut mettre au rang de cette graine animale, la Cochenille qui n'en differe apparemment qu'à cauſe de la diverſité des climats & des arbriſſeaux qui produiſent l'une & l'autre. Cette derniere, au rapport du P. Labat, dans ſes Nouveaux Voiages aux Isles de l'Amérique, eſt auſſi l'ouvrage d'un inſecte qui ſe trouve dans ces Isles, partout où il y a des Acacias & des Raquettes, prenant naiſſance ſur les uns & ſe nourriſſant du fruit des autres, qui lui donnent la couleur rouge qui en fait le prix. L'Acacia eſt un arbriſſeau qui ne monte gueres plus haut que cinq ou ſix pieds, & qui eſt très-épineux. La Raquette eſt une plante qu'on éleve en Europe ſous les noms de *Figuier des Indes* & de *Poirier piquant*. Elle produit à l'extrémité de ſes feuilles un fruit approchant de la forme d'une figue. Lorſque ce fruit commence à paroître, il eſt verd & dur; à meſure qu'il croît, il rougit peu à peu, & devient enfin d'une couleur vive & éclatante quand il eſt tout à fait mûr. Alors il s'ouvre comme une grenade ou une figue laiſſée trop longtems ſur l'arbre; les grains ou pepins qu'il contient, ont au de-

 dans

(*) Petrus Quiqueranus, ubi ſupra.

(**) Mem. de M. Geofroi le Cadet dans ceux de l'Acad. des Sciences pour l'année 1714.

dans une ſubſtance blanche & paroiſſent au dehors d'un très-beau rouge incarnat : & tous ces pepins ſont entourés d'une eſpece de gelée du plus beau rouge du monde & d'un très-bon goût. C'eſt dans ce fruit & de cette chair dont il eſt rempli que ſe nourriſſent les inſectes qu'on appelle *Cochenilles*. Il eſt aſſez incertain s'ils y prennent auſſi naiſſance ; du moins le P. Labat paroît-il incliner à croire qu'ils naiſſent indifféremment ſur pluſieurs autres arbres, des fruits deſquels ils ſe nourriſſent également ; mais il convient que ce n'eſt que dans le fruit des Raquettes qu'ils contractent cette belle couleur rouge qui les fait tant eſtimer. Ce précieux inſecte eſt à peu près de la taille d'une groſſe punaiſe ; ſa tête ne ſe diſtingue du reſte du corps que par deux petits yeux qu'on y remarque, & une très-petite gueule ; le deſſous du ventre eſt garni de ſix pieds ; ſon dos eſt couvert de deux aîles ſi déliées & ſi foibles, qu'elles lui ſont inutiles pour ſe ſoutenir dans l'air, ne pouvant lui ſervir tout au plus qu'à voltiger quelques momens quand on le force à ſortir du fruit qui le nourrit, au tems qu'on en veut faire la récolte. Les pieds & les extrémités de la tête auſſi bien que les aîles ſont ſi délicats, qu'étant aiſément conſumés par l'ardeur du Soleil, ce ver aîlé ne conſerve plus alors aucune figure d'animal, ne paroiſſant quand il eſt ſec, que comme une graine de médiocre groſſeur, brune & preſque noire, chagrinée, luiſante & comme argentée, ou du moins legérement couverte d'une pouſſiere blanche impalpable, & tout à fait adhérente à la peau de l'inſecte. Il multiplie infiniment ; & l'on ne ſauroit dire la quantité prodigieuſe qu'on en trouve, malgré le dégât qu'en font les fourmis, les vers, & les poules qui en ſont très-friandes.

Pour revenir à la graine d'Ecarlate, on ne voit rien dans l'Hiſtoire de plus ancien que ce qu'en rapporte celle des Juifs. Car, à ſuppoſer qu'il fût vrai que Phénix qui fonda, dit-on, le Royaume de Tyr & de Sidon avec Cadmus ſon frere, eût trouvé le ſecret de teindre en pourpre avec un vermiſſeau, comme le dit Diodore de Sicile : il en réſulteroit tout au plus que Phénix, étant contemporain de Moyſe, n'auroit

roit fait que perfectionner une découverte qui avoit été faite plus de 150 ans auparavant.

Il paroît d'ailleurs par pluſieurs paſſages de l'Ecriture (*) que dans le même ſiecle, je veux dire au tems de Moyſe & de Phénix, en l'an du monde 2510, il y avoit déja quatre autres ſortes de Teintures inventées: ſavoir, l'Hyacinthe, ὑάκινθος, la Pourpre, πορφύρα, l'Ecarlate double ou Cramoiſi, κόκκινον διπλοῦν, & le ſimple rouge ἐρυθρόδανον.

L'Hyacinthe, que les Traducteurs François rendent quelquefois par le mot de *Pourpre*, (comme ils rendent ſouvent auſſi l'Ecarlate par le même terme,) en différoit & par la couleur & par la matiere avec laquelle on la compoſoit. L'Hyacinthe étoit ce que les Latins appelloient autrement *color ianthinus*, violet-pourpre, du mot Grec ἴα qui eſt le nom de la fleur de violette. Les Anciens, ſuivant le témoignage de Pline, tiroient cette couleur du *Vaciet*. Surquoi quelques uns diſent que le *Vaciet* eſt la même choſe que l'Hyacinthe, c'eſt à dire une fleur de couleur de pourpre. Mais d'autres expliquant ces deux vers de la ſeconde Eglogue de Virgile:

Hiſt. Natur. lib. 16.

*Alba liguſtra cadunt, Vaccinia nigra leguntur . . . .*
*Mollia luteolâ pingit Vaccinia Caltha;*

& remarquant que ce Poëte parle ici du *Vaciet* par rapport à ſon utilité, prétendent que c'eſt un arbriſſeau dont les baïes noires donnent une teinture ſemblable à la couleur de la pierre d'Hyacinthe, d'où l'on a donné le nom de couleur d'Hyacinthe à la couleur violette ou pourpre: car les couleurs n'ont pas toujours pris leur nom des matieres dont on a commencé à les tirer, comme il eſt prouvé par le Violet même, auſſi-bien que par la Pourpre-Améthyſte des Anciens: l'Améthyſte étant une

 pier-

(*) Exode, ch. 25. v. 3–5. ch. 26. v. 1. 4. 5. 14. 31. 36. ch. 27. v. 16. ch. 28. v. 2–6. 8. 15. 28. 31. 33. 34. 36. 37. 39. ch. 35. v. 4–7. 23. 25. 30. 34. 35. ch. 36. v. 8. 11. 19. 35. 37. ch. 38. v. 18. 22. 23. ch. 39 v. 1. 3. 5. 8. 21. 22. 24–29. 30. 31. 34. Nombres, ch. 4. v. 5–14. 24. 25. ch. 15. v. 37–39.

pierre précieuſe, tout auſſi peu propre à la Teinture que la pierre d'Hyacinthe & que la fleur de Violette. Au reſte Pline concilie ces divers ſentimens en diſtinguant deux ſortes de Vaciet, l'un qui naît en Italie & l'autre dans les Gaules. Il dit que ce dernier eſt propre à teindre en pourpre; ce que Vitruve confirme & éclaircit en ajoutant que du mêlange du *Vaciet* & du lait on tire un très-beau pourpre. Ce ne peut être ſans doute que celui dont Virgile parle dans les vers que j'ai cités. Le P. Hardouin, qui eſt un de ceux qui veulent que ce *Vaciet* ſoit la même plante que l'Hyacinthe, ou le Glaieul de France, fonde cette ſuppoſition ſur ce que Pline, après avoir dit dans le XVI Livre de ſon Hiſt. Natur. que le Vaciet ſert à teindre en pourpre, écrit dans ſon XVIII Livre, qu'une certaine couleur, qu'il appelle *Hyſginum*, ſe fait du mêlange de la graine d'Ecarlate avec la Pourpre marine de Tyr; & enſuite dans ſon XXI. Livre ajoûte, que l'Hyacinthe qui croit en abondance dans les Gaules, y ſert auſſi à faire la même couleur *Hyſginum*. Ainſi, conclud le P. Hardouin, cette couleur n'eſt autre choſe qu'un violet ou pourpre tirant ſur le rouge; & par une ſuite néceſſaire, la teinture du *Vaciet* dont parlent Virgile & Pline, eſt la même que l'Hyacinthe des Juifs.

Loco citato.

Ibidem.

La Pourpre (πορφύρα) étoit une Teinture de la couleur d'une roſe parfaitement rouge. On la tiroit de certains Poiſſons teſtacés de différentes eſpeces nommées par les Latins *Purpura*, *Pelagia*, *Murex*, *Conchylium* & *Buccinum*. Cette teinture fut découverte par hazard, s'il eſt vrai, comme le dit Caſſiodore, qu'elle ne ſervit d'ornement aux Rois qu'après qu'on eut remarqué qu'un chien affamé aiant dévoré de ces coquillages qui avoient été jettés par la mer ſur le rivage de Tyr, leur ſang avoit eu la propriété de teindre en écarlate les poils de ſon muſeau. Suidas, qui rapporte auſſi la même hiſtoire ſur le témoignage d'un Auteur anonyme, ajoute que cette remarque fut faite par Hercule le Phénicien ou le Tyrien, qui vivoit du tems de Minos II. Roi de Crete, c'eſt à dire 1300 ans avant J. C. ce qui revient à l'an du monde 2735, & que cet homme aiant par là découvert l'art de la Teintu-

Lib. I. Var. ep. 2.

re

re de Pourpre, communiqua ce ſecret au Roi de Phénicie, qui porta le premier un habit de pourpre. Mais comment ſe peut-il que cette découverte n'ait été faite qu'en l'année 2735, tandis qu'il eſt prouvé par la Chronologie de l'Hiſtoire des Juifs, que la Teinture de pourpre étoit connue de ces Peuples 225 ans auparavant. Cependant, comme j'ai fait voir plus haut que Diodore de Sicile s'eſt trompé en attribuant à Phénix Roi de Tyr l'honneur d'avoir le premier trouvé le ſecret de teindre en pourpre avec un vermiſſeau, cette erreur pourroit conſiſter ſeulement dans ces derniers mots: car, ſuppoſant que Diodore ait pris dans ce paſſage la Pourpre d'écarlate pour la Pourpre marine, il s'enſuivra que ce fut celle-ci qu'inventa Phénix, ou plutôt qui fut découverte ſous ſon régne; & que comme ce Prince étoit contemporain de Moyſe, c'eſt la raiſon pour laquelle il n'eſt point parlé de pourpre dans l'Hiſtoire des Juifs avant ce tems-là. Ainſi je ne vois pas ſur quelle autorité M. Geofroi le Cadet, Membre de l'Acad. des Sciences de Paris, a avancé dans une Diſſertation qui eſt parmi les Mém. de cette Acad. pour l'année 1714, que la premiere Teinture qui fut découverte fut celle de la Pourpre marine, & que le Kermès ou la graine d'Ecarlate ne le fut que long tems après. Le contraire réſulte évidemment des faits que je viens de rapporter.

Pline le Naturaliſte, qui eſt de tous les Anciens, après Ariſtote, celui qui eſt entré dans un plus grand détail ſur les diverſes ſortes de Teintures, dit que les Poiſſons appellés Pourpres, *Purpuræ*, vivent ordinairement ſept ans. Elles ſe cachent, auſſi bien que le *Murex* dont elles ſont une eſpece, s'il en faut croire Columna; elles ſe cachent, dis-je, pendant 30 jours vers le tems où ſe leve la Canicule. Elles s'attroupent au printems, & ſe frottant les unes contre les autres, elles jettent une humeur gluante & viſqueuſe comme de la cire. Il en eſt auſſi de même du *Murex*. Mais la Pourpre a dans le fond de la gorge cette *fleur* recherchée pour la Teinture; cette précieuſe liqueur eſt en petite quantité dans une veine blanche, d'où étant enlevée, elle prend une couleur de roſe foncée ou tirant ſur le noir. Le reſte du corps ne Lib. 9.

ſert

ſert à rien. On tâche d'attraper ces Pourpres en vie, parce qu'elles rendent cette liqueur en mourant. On la tire des plus grandes après les avoir arrachées de leur coquille; mais pour les petites, on les écraſe toutes vivantes avec l'écaille, & alors elles jettent leur liqueur. La Pourpre a une langue de la longueur du doigt, armée d'un aiguillon avec lequel elle perce les moules & d'autres coquillages pour s'en nourrir. Elle meurt dans l'eau douce & à toutes les embouchures des fleuves. Pêchée dans les autres endroits de la mer, elle vit de ſa ſeule eau ſalée l'eſpace de cinquante jours. Tous les poiſſons à coquil, le croiſſent très-vîte, principalement les Pourpres. Une année leur ſuffit pour atteindre à leur juſte grandeur. Les différentes couleurs de Pourpre ſe tirent de deux coquillages, dont l'un eſt le *Buccinum* & l'autre la *Pourpre:* car, quoique tous deux ſoient de même matiere, les liqueurs qu'ils produiſent ont des propriétés différentes. Le *Buccinum* eſt attaché aux pierres & ne ſe trouve qu'alentour des rochers. La Pourpre ſe nomme autrement *Pelagie.* Il y en a de pluſieurs ſortes, que l'on diſtingue par les lieux où elles ſe nourriſſent. Celles qui vivent dans la vaſe ou le limon, auſſi bien que dans l'algue, eſpece d'herbe qui croît ſur le bord de la mer, ne ſont pas eſtimées. Celles qui ſe pêchent aux bancs de roche qui ſont ſous l'eau, valent mieux; cependant ce ne ſont pas encore les meilleures. Celles qui ſe tirent du gravier ſont confondues avec les conchyles, *conchylia.* Enfin les plus excellentes de toutes, ſont celles dont le ſéjour participe de tous ces différens ſols. Les Pourpres ſe prennent dans de petites naſſes peu ſerrées que l'on jette dans la mer. On met dedans des moules pour ſervir d'appât aux Pourpres qui les aiment fort. Ces moules ſont à demi-mortes; mais, dès qu'elles ſentent l'eau de la mer, elle reprennent leurs forces: les Pourpres les voiant ouvertes les piquent avec leur langue, ce que les moules n'ont pas plutôt ſenti qu'elles ſe referment; & c'eſt un plaiſir, dit Pline, de voir alors les Pourpres priſes par la langue ſans pouvoir ſe dégager. Il eſt bon, continue-t-il, de les prendre après le lever de la Canicule ou avant le printems, parce que quand elles ont jetté l'humeur dont j'ai parlé, elles ont une teinture ſujette à

ſe

ſe paſſer. Les Teinturiers ignorent cette circonſtance, quoiqu'elle ſoit eſſentielle. On leur ôte enſuite la veine où cette liqueur eſt renfermée: on y ajoute le ſel néceſſaire pour la conſerver, ce qui va à 20 onces de ſel ſur cent livres de liqueur. On la laiſſe ſe macérer ainſi pendant trois jours ſeulement, parce qu'elle a d'autant plus de vertu qu'elle eſt plus récente. On met ce quintal de liqueur dans une chaudiere de plomb, celles d'airain ou de fer n'y étant pas ſi propres, & on le fait bouillir ſur un feu modéré juſqu'à ce qu'il ſoit réduit au poids de 50 livres. On en ôte avec l'écumoire les chairs qui étoient adhérentes aux veines & qui s'en ſont détachées en cuiſant, afin qu'il n'y reſte rien d'inutile. La liqueur étant ainſi épurée & cuite au bout de dix jours, on y plonge de la laine préparée pour en faire l'épreuve; & juſqu'à ce qu'on ſoit ſatisfait de cette épreuve, la chaudiere reſte ſur le feu. Si la couleur tire plutôt ſur le noir que ſur le rouge, on en eſt content. La laine y trempe pendant cinq heures. Après quoi on la carde & on la replonge de nouveau juſqu'à ce qu'elle ait pris toute la liqueur. Le *Buccinum* employé tout ſeul ne vaut rien, parce que ſa teinture s'affoiblit. On l'allie toujours à la Pourpre, qui étant trop noirâtre en reçoit la vivacité & l'éclat de l'écarlate, qui eſt ce qu'on recherche. Ainſi l'une & l'autre perdent ou acquierent ce qu'elles ont de trop ou ce qui leur manque. La proportion eſt de 200 livres de *Buccinum* & 110 livres de Pourpre pour 50 livres de laine. C'eſt ainſi que ſe teind la belle couleur d'améthyſte, ce que nos Teinturiers modernes appellent *violet-clair*. Mais celle de Tyr ſe teind d'abord avec la Pourpre dans une chaudiere qui n'eſt ni épurée ni achevée; & enſuite on la change avec le *Buccinum*. Son prix conſiſte à prendre une couleur de ſang figé, noirâtre à la vue & éclatante quand on la regarde d'en bas. Dans les premiers tems on n'eſtimoit que la pourpre violette telle que Cornelius Nepos dit qu'elle ſe faiſoit dans ſa jeuneſſe à Rome, où elle coûtoit alors cent deniers la livre, ce qui peut faire environ 62 écus & demi de notre monnoie d'Allemagne, à prendre le denier ſur le pied de 15 gros ou de 50 ſols de France, ſuivant l'eſtimation de Denys le Chartreux. Enſuite on lui préféra la pourpre rouge de Ta-

rente, où les Voyageurs diſent que l'on voit encore aujourd'hui les ruines des anciens atteliers dans leſquels on préparoit cette Teinture, & de grands monceaux de coquillages qui en ſont des monumens aſſez remarquables. Après cela, la pourpre Tyrienne teinte deux fois & appellée par cette raiſon *Dibapha*, vint à la mode. Sous le Conſulat de Cicéron, la livre de drap qui en étoit teinte, coûtoit plus de mille deniers ou 622 écus & demi; ſomme ſi exceſſive que je ſerois preſque tenté de croire que le denier Romain valoit moins que Denys le Chartreux l'eſtime. Mais du tems de Pline on teignoit à meilleur marché toute ſorte de pourpre. Dans les teintures d'étoffes qui ſe faiſoient avec la pourpre, on ne mêloit point de *Buccinum:* c'eſt tout ce qu'elles avoient de différent, ſi ce n'eſt encore qu'on fortifioit la liqueur en y jettant une demi-meſure d'autre liqueur de pourpre, c'eſt à dire la moitié de ce qu'il y en avoit déja, à quoi l'on ajoutoit de l'eau & de l'urine en égale portion. De cette maniere, on faiſoit une couleur d'autant plus claire que la laine prend beaucoup plus de teinture que l'étoffe. Les prix de ces couleurs différoient à proportion qu'on étoit plus ou moins éloigné des côtes maritimes, où l'on pêchoit les coquillages qui les fourniſſoient: cependant, du tems de Pline, la liqueur de pourpre ne paſſoit point 50 ſeſterces les cent livres, ce qui fait de notre monnoie 7 écus $\frac{2}{3}$, & celle du *Buccinum* 100 ſeſterces valant 15 écus $\frac{1}{3}$. Quant aux lieux où l'on pêchoit ces coquillages, Pline dit qu'on en trouvoit principalement du côté de Tyr en Aſie, à Meninge en Afrique, auſſi bien que ſur les bords de l'Océan vers la Gétulie & dans la Laconie en Europe. Il eſt certain que la pourpre qui avoit le plus de réputation étoit celle de Tyr; mais il paroît par quelques paſ-
Ch. 27. v. 7. 16. 20. 23. 24. ſages du Prophete Ezéchiel qui vivoit environ 600 ans avant Pline, que les Tyriens faiſoient uſage de l'Hyacinthe & de la Pourpre des Isles d'Eliſa (*). A quoi le docte Calmet ajoute, dans ſa traduction de ce Prophete, que les Syriens eux-mêmes expoſoient en vente de la pourpre dans les marchés de Tyr, ce qui fait entendre que les Tyriens ne faiſoient

(*) νησῶν Ἐλισᾶ, porte la Verſion des Septante, & la Vulgate *de inſulis Eliſæ.*

ſoient autre choſe que teindre avec cette liqueur des draps qu'ils envoyoient en différens pays. Ce ſeroit donc donner un démenti formel à Ariſtote, à Pline, à Caſſiodore & à d'autres Auteurs dignes de foi, que de dire que les Tyriens n'avoient point de pourpre ſur leurs côtes. Mais cette difficulté ſeroit bientôt éclaircie s'il étoit poſſible de déterminer, comme je le penſe, la poſition certaine des Isles d'Eliſa dont parle Ezéchiel. Calmet, dans ſon Commentaire ſur ce Prophete, croit que c'eſt l'Elide, province du Péloponeſe, dont la Pourpre étoit, dit-il, fort connue des Anciens. Il cite à ce ſujet Pline, Pauſanias & quelques autres (*), quoique le premier n'en ait rien dit; & il ajoute qu'il eſt étonnant que les Tyriens employaſſent de la pourpre étrangere, vû qu'ils en avoient de meilleure & de plus eſtimée dans leur pays. Pour moi je ne ſuivrai point l'avis de ce Savant, parce que je ſuis perſuadé qu'il ne faut pas chercher hors de la Phénicie les Isles dont il s'agit. Ce qui me le fait croire, eſt que la célebre Didon, fille de Methirès ou de Belus II, Roi des Tyriens, eut le nom d'*Eliſe* qu'elle porta toute ſa vie, celui de Didon ne lui aiant été donné qu'après ſa mort; & je préſume qu'il y avoit aux environs de Tyr des Isles d'Eliſa d'où cette Princeſſe avoit emprunté le nom d'*Eliſe*, parce que dans la Langue Phénicienne ce terme ſignifie *un Lieu de délices & de joie.* Auſſi eſt-ce par cette raiſon que les Phénicieins appellerent *Champs Eliſées* ou *Eliſiens* les lieux où ils croyoient que les ames des gens de bien étoient reçues après leur mort. On me répondra qu'il eſt plus naturel de rapporter le nom de ces Isles à celui d'*Eliſa*, fils de Javan & petit-fils de Japhet, duquel ainſi que de ſes freres étoient deſcendus les Peuples qui avoient partagé entr'eux les Isles des Nations, ſuivant le Chapitre X. de la Geneſe. Mais en pourra-t-on conclure pour cela que les Isles d'où l'on apportoit de la Pourpre & de l'Hyacinthe à Tyr, n'étoient pas dans la Phénicie? Et quand on le ſuppoſeroit même, s'enſuivra-t-il encore qu'elles fuſſent dans le Péloponeſe, lorſqu'on ſait qu'il y avoit dans la Paleſtine une ville du nom d'*Eliſa*, &

 qu'on

(*) Plin. lib. 9. cap. 35. Pauſan. & alii apud Bochart. Phaleg. lib. 3. cap. 4.

qu'on fera attention que les Hiſtoriens Juifs, tels par exemple que Joſephe, ont compris ſouvent la Paleſtine ſous la Syrie? Il me ſemble plutôt que, ſi l'on pouvoit conclure quelque choſe de tout cela, ce ſeroit que la pourpre des Isles d'Eliſa étoit la même que celle qui étoit apportée par les Syriens à Tyr. Mais, après tout, ce paſſage d'Ezéchiel ſur la pourpre de Syrie, ne ſe trouve ni dans les Septante ni dans la Vulgate. Ainſi concluons plutôt que la critique de Calmet porte à faux, & qu'elle eſt d'autant moins fondée, qu'ajoutant enſuite que la pourpre de Syrie n'étoit pas connue dans l'Antiquité, il ſe trompe viſiblement, en ce qu'il ne fait point attention 1°. que dans le tems d'Ezéchiel il y avoit plus de deux cens ans que les Syriens & les Aſſyriens ne faiſoient plus qu'un peuple; 2°. que la pourpre d'Aſſyrie aiant été célébrée par les Anciens; témoin ce vers de Virgile: *Alba nec Aſſyrio fucatur lana veneno;* Ezéchiel a fort bien pu déſigner cette pourpre ſous le nom de celle de Syrie. Au reſte, pour achever ce que j'avois à dire de celle des Isles d'Eliſa, quand on ſuppoſeroit encore avec Calmet, que ces Isles ſeroient l'Elide, comme il le prétend, ou ſi l'on veut même, les Isles Eoliennes ſituées entre l'Italie & la Sicile, loin que le témoignage d'Ezéchiel en fût pour cela contraire à la vraiſemblance, toute l'induction qu'on en pourroit tirer, ſe réduiroit à dire que les habitans de ces Isles, ne ſachant pas employer cette pourpre auſſi parfaitement que les Tyriens, ſe contentoient de la ramaſſer ſur leurs côtes & de l'aller vendre aux marchés de Tyr, ce qui n'en procuroit néceſſairement qu'une plus grande abondance aux Teinturiers de cette ville, qui n'en pouvoient trop avoir à cauſe du prodigieux débit des laines & des étoffes qu'ils teignoient, ayant le ſecret d'y réuſſir beaucoup mieux que les autres Nations. On a cru fort longtems avoir perdu cette pourpre: les François ſurtout n'en avoient jamais gueres connu que le nom, parce qu'au tems où l'on commença à lui ſubſtituer le ſuc des plantes, les Gaulois, qui apprirent ce ſecret aux Romains ignoroient eux-mêmes, au rapport de Pline, qu'ils euſſent ſur leurs côtes des poiſſons teſtacés propres à leur fournir la teinture de pourpre, & qu'ils en négligerent la recherche, vû qu'avec le ſuc des plantes ils faiſoient des tein-

Lib. 2. Georgic. v. 465.

Plin. Hiſt. Natur. lib. 22.

teintures auſſi belles, plus diverſifiées & moins cheres que celles qui ſe tiroient de la pourpre marine. Mais, comme il étoit impoſſible qu'un ſecret, autrefois ſi connu, ſe perdît dans le ſein de la Nature & échapât à la ſagacité d'un Siecle auſſi éclairé que le nôtre, auſſi n'avons-nous plus lieu d'envier aux Anciens celui de la pourpre marine, quoique nos Teinturiers n'en ayent pas encore fait uſage juſqu'à préſent. Thomas Gage eſt le premier qui nous ait appris dans le XVII Siecle que le poiſſon à coquille nommé *Pourpre* ſe trouve aujourd'hui dans les Mers des Indes Eſpagnoles, aux environs du port de Nicoya, petite ville de l'Amérique ſeptentrionale, dépendante de la province de Coſtarica. Mais il en fait une deſcription ſi ſemblable à celle de Pline, qu'il ſemble l'avoir copiée d'après cet Auteur. Cependant il ajoûte que l'uſage de cette teinture commence à s'établir aux Indes; que le drap de Ségovie qui en eſt teint, ſe vend juſqu'à 20 écus l'aune; & que par cette raiſon il n'y a que les plus grands Seigneurs Eſpagnols qui puiſſent en faire emplette. Les parties des Isles Antilles, qui appartiennent à la France, ont auſſi une ſorte de pourpre marine, ſuivant le P. Labat. Le poiſſon dont on la tire, ſe nomme *Burgan de Teinture.* Il eſt de la groſſeur du bout du doigt & reſſemble aux Limaçons ordinaires qu'on appelle *Vignaux.* Sa coquille eſt aſſez forte quoique mince: elle eſt de couleur d'azur brun: la chair eſt blanche & les inteſtins d'un rouge très-vif, dont la couleur paroît au travers de ſon corps. C'eſt ce qui teind l'écume qu'il jette quand il eſt pris, laquelle eſt d'abord d'un violet tirant ſur le bleu. Pour obliger ces animaux à jetter plus d'écume, on les met dans un plat, on les agite & on les bat les uns contre les autres, avec la main ou avec des verges: dans un moment ils ont couvert & rempli le plat de leur écume qui, étant reçue ſur un linge, ſe change en un rouge de pourpre à meſure qu'elle ſe ſeche. Le P. Labat n'oſe pourtant aſſurer que cette pourpre ſoit la même que celle des Anciens; & il ſe contente de dire que, ſi c'eſt la véritable pourpre Tyrienne, on a du moins perdu le ſecret de fixer & de cuire cette couleur, qui s'affoiblit peu à peu & ſe diſſipe entiérement à meſure qu'on lave le linge qui en a été teint. Mais il n'eſt pas beſoin d'al-

Relat. des Ind. Occid.

ler chercher cette découverte dans les Indes de l'Amérique; nos Mers poſſedent ce précieux poiſſon; & il y en a même de pluſieurs ſortes qui ſeroient comme autrefois également propres à nous donner la pourpre, ſi un peu plus d'expérience pouvoit mettre nos Teinturiers en état de s'en ſervir. Il n'y a pas 60 ans que la Société Royale d'Angleterre retrouva un des coquillages qui la fourniſſent, lequel eſt très-commun ſur les côtes de ce pays-là. C'eſt une des eſpeces compriſes ſous le genre de poiſſons appellés *Buccinum* par les Anciens, qui leur avoient donné ce nom à cauſe que leur coquille a quelque reſſemblance avec un cor de chaſſe. Depuis ce tems-là, le ſavant M. de Réaumur, qui a fait dans ce ſiecle plus de découvertes que les Plines & les Ariſtotes n'en avoient fait dans les leurs, a trouvé que les Côtes occidentales de France ne donnoient pas à la vérité des Pourpres, mais qu'en revanche on y rencontroit communément une des petites eſpeces du *Buccinum.* Il n'y a point remarqué celle du *Buccinum* d'Angleterre, & n'y a trouvé que rarement le vrai *Buccinum* des Anciens, tel que Columna l'a fait graver dans ſon Traité de la Pourpre: encore ne lui a-t-il point vû cette liqueur qui donne la pourpre; mais peut-être la différence des Mers ou des Saiſons où il l'a obſervé, en ſont la cauſe. A l'égard de l'eſpece qui eſt commune ſur les Côtes de France, les plus grandes coquilles ont douze à treize lignes de long & ſept à huit de diametre dans l'endroit où elles ont le plus de groſſeur: ce ſont des coquilles d'une ſeule piece, tournées en ſpirale comme celles de nos Limaçons de Jardin, mais un peu plus allongées. Leur grandeur convient fort avec ce que Pline dit de ſon *Buccinum*, qu'il appelle *petit coquillage*, *minor concha*, & elles ſont auſſi gravées ou canelées de même au bord de leur ouverture. Il y en a de fort différentes en couleurs. Les unes ſont blanches, les autres ſont brunes, d'autres ont des raies couleur de ſable qui ſuivent les ſpirales de la coquille ſur des fonds blancs ou bruns: la ſurface extérieure de ces mêmes coquilles eſt ordinairement canelée, mais de deux manieres différentes. Les canelures des unes ſont formées par des eſpeces de cordons qui ſuivent la longueur des ſpirales qu'elles décrivent, & les autres ont encore d'autres

Mém. de l'Académ. des Sciences de Paris pour l'année 1711.

Ibidem.

cane-.

canelures qui traverſent les premieres. En conſidérant au bord de l'Océan les coquillages de cette eſpece que la mer avoit laiſſés à découvert pendant ſon reflux, M. de Réaumur a trouvé une nouvelle teinture de pourpre qu'il ne cherchoit point. Le hazard a preſque toujours part à nos découvertes; tout ce que peut faire l'attention, c'eſt de mettre en phyſique, comme au jeu, les hazards à profit. Les *Buccinum* ſont ordinairement aſſemblés autour de certaines pierres, ou ſous des arcades de ſable que la Mer a creuſées. Ils ſe trouvent quelquefois en ſi grande quantité dans ces endroits, qu'on peut les y ramaſſer à pleines mains, au lieu qu'ils ſont diſperſés çà & là partout ailleurs. Mais en même tems ces pierres ou ces arcades de ſable ſont couvertes de grains ovales, longs d'un peu plus de trois lignes, & gros d'un peu plus d'une ligne. Ils contiennent une liqueur blanche un peu jaunâtre, aſſez approchante de celle qui ſe tire des *Buccinum* mêmes, & qui, après quelques changemens, prend la couleur de pourpre. M. de Réaumur croit que ces grains ne ſont ni les œufs des *Buccinum*, ni les ſemences de quelque plante marine, ni des plantes naiſſantes; & il en conclud que ce ſont les œufs de quelque autre poiſſon. Ils ne commencent à paroître qu'en Automne. Ces grains écraſés ſur un linge blanc ne font d'abord que le jaunir preſque imperceptiblement, mais en 3 ou 4 minutes, ils lui donnent un très-beau rouge de pourpre, pourvû cependant que ce linge ſoit expoſé au grand air; car, ce qui eſt bien digne de remarque & fait voir de quelle délicateſſe eſt la génération de cette couleur, l'air d'une chambre, dont même les fenêtres ſeroient ouvertes, ne ſuffiroit pas. La teinture de ces grains s'affoiblit un peu par un grand nombre de blanchiſſages. L'effet de l'air ſur cette liqueur conſiſte, à ce qu'il paroît par les expériences de M. de Réaumur, non en ce que l'air enleve à la liqueur quelques unes de ſes particules, ni en ce qu'il lui en donne de nouvelles, mais ſimplement en ce qu'il l'agite, & change l'arrangement des parties qui la compoſent. Nous avons dans la Cochenille une très-belle couleur rouge, mais qui n'eſt bonne que pour la laine, & ne vaut rien pour la ſoie ni pour la toile. Le Carthame ou Saffran bâtard donne le beau ponceau & le cramoiſi, mais

ce

ce n'eſt que pour la ſoie. On pourra trouver, en préparant les grains de M. de Réaumur, le beau rouge qui nous manque pour la roile, & qui peut-être ſurpaſſera le rouge des roiles des Indes qui n'eſt pas beau. A l'égard des *Buccinum* qui ſe trouvent aux environs de ces grains, ils ont à leur collier, car on peut leur en donner un auſſi bien qu'aux Limaçons, un petit réſervoir appellé improprement *Veine* par les Anciens, qui ne contient qu'une bonne goutte de liqueur un peu jaunâtre. Les linges qui en ſont teints, expoſés à une médioere chaleur du Soleil, prennent d'abord une couleur verdâtre, enſuite une couleur de citron, après cela un verd plus clair, & puis plus foncé, de là le violet, & enfin un beau pourpre. Cela ſe fait en peu d'heures; mais, ſi la chaleur du Soleil eſt fort vive, les changemens préliminaires ne s'apperçoivent point & le beau pourpre paroît tout d'un coup. Un grand feu fait le même effet, à cela près qu'il le fait un peu plus lentement, & qu'il ne produit pas une couleur ſi parfaite. Sans doute la chaleur du Soleil, beaucoup plus ſubtile que celle d'un feu de bois, eſt plus propre à agiter les plus fines particules de la liqueur. Le grand air agit auſſi, quoique moins vîte, ſur la liqueur des *Buccinum*, ſurtout ſi elle eſt détrempée dans beaucoup d'eau, d'où M. de Réaumur conjecture avec aſſez d'apparence, que la liqueur des *Buccinum* & celle des grains ſont à peu près de même nature, excepté que cette derniere eſt plus aqueuſe. Mais je ſuis ſurpris qu'il n'en conclud pas auſſi que ces grains ſont les œufs des *Buccinum*, & qu'il aime mieux les prendre pour ceux de quelque autre poiſſon. Il remarque à la vérité que ces deux liqueurs different encore par le goût, celle des grains étant ſalée & celle des *Buccinum* extrémement poivrée & piquante. Mais, puiſqu'il avoue que cette différence de goût ne provient apparemment que de ce que la liqueur des *Buccinum* eſt moins détrempée d'eau, n'eſt-il pas naturel auſſi que la qualité aqueuſe qu'il remarque dans celle des grains ne provienne que de ce qu'elle eſt plus détrempée que l'autre? Au reſte, la liqueur des grains ſeroit d'un uſage bien plus commode dans la Teinture & coûteroit moins, parce qu'il eſt très-aiſé de la tirer d'une grande quantité de grains que l'on écraſera à la fois: au lieu

que

que celle du *Buccinum* eſt en bien moindre quantité, & que pour la prendre, il faut ouvrir le réſervoir de chaque *Buccinum*, ce qui demande beaucoup de tems: ou ſi, pour expédier, on écraſe les plus petits de ces coquillages, comme faiſoient les Anciens, on gâte la couleur par le mêlange des différentes matieres que renferme l'animal. Avec cela, je ne doute pas qu'on ne puiſſe trouver des liqueurs chymiques qui feront paroître la couleur de pourpre plus vîte ou plus commodément que le feu, le ſoleil ou le grand air: déja M. de Réaumur a imaginé le ſublimé corroſif qui produit cet effet ſur la liqueur de *Buccinum*, mais la pratique & ſurtout une pratique qui viendroit à faire partie d'un métier, demanderoit beaucoup d'autres obſervations & des vues toutes nouvelles. Il y a bien de la différence entre un Phyſicien qui veut connoître, & un Artiſan qui veut gagner.

Me ſera-t-il permis ici de parler à mon tour d'une découverte que j'ai faite autrefois ſur le genre de teinture dont il s'agit? J'étois en 1725 dans une ville maritime de Picardie (St. Valeri ſur Somme). Des femmes, qu'en ce païs-là on nomme *Verotieres* parce qu'elles s'occupent à chercher dans le ſable une ſorte de ver qui ſert d'appât pour la pêche, trouverent par hazard une Huître qui me tomba entre les mains. Je dis qu'elles la trouverent par hazard, parce qu'il étoit ſans exemple qu'on y en eût trouvé de mémoire d'homme, au rapport de tous les Pêcheurs que je conſultai. Cette huître reſſembloit parfaitement à ces grandes coquilles que les Pélerins de S. Jacques portent ſur leurs habits & à leurs chapeaux: c'eſt à dire qu'elle étoit canelée, plus plate & plus unie que l'écaille des Huîtres ordinaires. L'aiant ouverte, je fus extrémement ſurpris de voir au milieu du poiſſon, une matiere d'une belle couleur de ceriſe, occupant l'étendue d'une piece de deux Dreyers. Je déchirai avec la pointe d'un coûteau la pellicule qui enveloppoit cette matiere, & aiant remarqué que le fer en étoit teint, je fis l'épreuve de cette couleur ſur un linge qui prit une teinture d'un rouge un peu plus foncé: mais enfin, comme la matiere étoit en trop petite quantité, & que je ne pus parvenir à trou-

ver aucune autre Huître ſemblable, il me fut impoſſible d'en réitérer l'expérience, & de perfectionner cette découverte.

Après cette Diſſertation ſur la Pourpre marine, je viens aux autres couleurs anciennes dont j'ai parlé plus haut.

L'Ecarlate double ou le Cramoiſi étant, comme j'ai dit, le *κόκκινον διπλοῦν* des Grecs, que les Interpretes Latins ont rendu par les termes de *coccum duplex* ou *bis-tinctum:* il paroît aiſé d'en conclure que c'étoit de la laine ou étoffe deux fois teinte avec la graine d'Ecarlate ou le *Kermès* des Arabes, d'où vraiſemblablement le *Cramoiſi* a pris ſon nom. Ovide dans ſon Livre *de Arte amandi*, fait bien mention de la laine qui ſe teignoit deux fois avec le Murex: *Nec quæ bis Tyrio murice lana rubet:* & Martial au 4 Livre de ſes Epigrammes: *Quod bis murice vellus inquinatum.* Mais ni eux, ni d'autres avant Pline, n'ont parlé du cramoiſi, dont il s'agit. Et Pline lui-même n'en dit rien non plus, à moins qu'on n'entende de cette couleur, ce qu'il dit de l'*Hysginum* qui, ſuivant le P. Hardouin, étoit une Teinture de pourpre tirant ſur le rouge, laquelle ſe faiſoit, comme je l'ai dit, de deux manieres, l'une par le mêlange de la graine d'Ecarlate & de la Pourpre Tyrienne, & l'autre en emploiant ſimplement du Vaciet ou de l'Hyacinthe. Mais il eſt bon d'obſerver que, de tous les endroits de l'Hiſtoire des Juifs où les Interpretes François ſe ſont ſervi du mot *cramoiſi*, il n'y en a que deux, que les Verſions Grecques & Latines traduiſent par ceux de *κόκκινον διπλοῦν*, *coccum duplex;* l'une & l'autre ſe ſervant partout ailleurs des termes de *κοκκίνον κεκλωσμένον*, *coccum tortum, fil d'écarlate tors;* *κοκκίνον νενησμένον* ou *διανενησμένον*, *coccum netum, Ecarlate filée.* Ainſi je trouve qu'il eſt fort difficile de déterminer en quoi conſiſtoit le *cramoiſi* des Anciens, à ſuppoſer qu'il fût autre qu'une double Teinture d'Ecarlate, comme je l'ai dit d'abord.

Exod. ch. 25. v. 4. ch. 35. v. 6.

Il me ſera plus aiſé d'expliquer ce que c'étoit que le ſimple rouge: car le terme d'*Erytrodanum*, que les Grecs lui donnoient, étant le nom de la Garance qui eſt le *Rouge des Teinturiers*, nommé en Latin

*Ru-*

*Rubia Tinctorum*, il n'y a preſque pas lieu de douter que cette Teinture ne ſe fît avec la racine de cette Plante, qui eſt encore emploiée au même uſage par nos Teinturiers d'aujourd'hui. Pline, aux XIX & XXIV Livres de ſon Hiſtoire, dit que cette racine ſervoit non ſeulement à teindre les laines, mais auſſi les peaux, ce qui eſt préciſément le cas dont il s'agit. Car, dans les paſſages de l'Exode où il eſt parlé de cette Teinture, il n'eſt queſtion que de peaux de moutons & de béliers teintes en rouge, *pelles rubricatæ*. Pline ajoûte que la Garance croît en abondance dans toutes les Provinces; mais que la plus eſtimée de ſon tems étoit celle d'Italie, principalement des Fauxbourgs de Rome. Dioſcoride met cependant celle de Ravenne au deſſus de toutes les autres.

Telles ſont les ſeules Teintures que l'on peut prouver avoir été découvertes dans les XXV premiers ſiecles du Monde. Ce n'eſt que dans le XXXV, c'eſt-à-dire 931 ans après, qu'on trouve, pour la premiere fois, la Teinture verte, ſous le régne d'Aſſuérus qui, ſuivant le 1 Chapitre d'Eſther, avoit des Tapiſſeries où cette couleur étoit alliée à la blanche & à l'hyacinthe. On n'en connoiſſoit point d'autre chez les Grecs au tems d'Alexandre le Grand: qui eſt, ſuivant Pline, l'époque des premieres Teintures que l'on commença à donner au lin, & aux toiles compoſées de cette matiere. Car juſqu'alors on s'étoit contenté de teindre des laines ou des étoffes qui en étoient faites. Ainſi ce ne fut que ſous les ſucceſſeurs d'Alexandre que les Grecs perfectionnant cet Art, inventerent, à ce qu'on prétend, les Teintures bleues, jaunes, noires, &c. En quoi je ſuis cependant perſuadé que les Gaulois & les Indiens les avoient devancés. Mais ſi l'on en veut croire les Chinois, ils les avoient découvertes bien des ſiecles auparavant. Hoangti, ou Hoham-ti, leur troiſiéme Empereur, qui régnoit 318 ans avant le déluge, ornant ſa tête d'un diademe, ſe réſerva, diſent-ils, la couleur jaune qu'il interdit à tous ſes ſujets. Un de ſes ſucceſſeurs de la famille de Hia, choiſit dans ſes drapeaux la couleur noire que l'Empereur Tang, ou Chim-Tam, chef de la famille de Xam & contemporain de Jacob, changea dans la ſuite pour prendre

Pline lib. 19.

Deſcr. de la Chine par le P. Martin Martini Jéſuite.

la couleur blanche. Depuis encore, l'Empereur Fau, ou Vu-Vam, chef de la famille de Cheva & contemporain de Samuel, prit la couleur de pourpre. Mais ces faits, comme toutes les autres Antiquités de la Chine, ne ſont fondés que ſur des traditions fort incertaines. On ſait plus ſurement que les Grecs & les Gaulois aiant inventé ces diverſes Teintures, elles paſſerent aux Romains qui apprirent des premiers la maniere de faire la Pourpre Tyrienne; & des uns & des autres le ſecret de teindre en toutes ſortes de couleurs avec le ſuc des plantes, les Gaulois ſurtout ne teignant point avec d'autres matieres, comme je l'ai déja dit après Pline. On voit d'ailleurs dans ſon Hiſtoire, que les laines naturellement noires ne recevoient aucune Teinture; & qu'à l'égard des autres, elles étoient teintes ou avec les matieres dont j'ai parlé, ou avec les fleurs de grenadier, le ſumac, le chêne, la noix de galle, le bois de fuſtet, le genêt, la racine de l'aliſier, le noier & le poirier ſauvage, le paſtel ou guede, la pariétaire, l'orcanette, l'algue marine, le nitre, &c. L'uſage de la plûpart de ces matieres s'eſt conſervé dans la Teinture des Modernes, comme je le montrerai dans la ſeconde partie. Je vais finir cette premiere par les paſſages du VI^e^ Livre de mon poëme ſur le *Ver à ſoie*, qui ont rapport aux Couleurs en général, & à la Teinture des Anciens en particulier.

Lib. 8.

Lib. 13. 16. 20. 22. 31. 32.

Juſqu'ici la Nature, inimitable encor,
De l'humaine induſtrie a ſurpaſſé l'eſſor;
Mais bientôt nous verrons, dans l'art de la Teinture,
L'induſtrie à ſon tour égaler la Nature.
Les couleurs, dont ſe peint la Nature en tous lieux,
Sont de ſes ornemens les plus beaux à nos yeux.
Qui le croiroit pourtant? Ces couleurs admirables
Toujours à notre eſprit ſeront impénétrables.
D'audacieux Mortels ont fait de vains efforts,
Soit pour en expliquer la cauſe dans les corps,
Soit pour en découvrir la ſecrete origine
Dans les impreſſions que reçoit la rétine.

Neuton, le plus ſubtil de nos Obſervateurs,
Neuton le confeſſoit à ſes admirateurs:
Il trouvoit par le priſme, il meſuroit peut-être
Les plis des ſept couleurs, qu'un ſeul rayon fait naître;
Mais lorſqu'il veut percer cet abîme profond,
Son œil troublé s'y perd, ſon eſprit s'y confond.
Ce n'eſt point nous, c'eſt Dieu, qui ſans nous les opere.
Eut-il beſoin, ce Dieu, de notre miniſtere,
Pour créer les objets ſous les dehors divers
Qui nous font diſtinguer les objets bleus des verds?
J'entends avec plaiſir, j'écoute un Philoſophe
Du manteau de Phœbus me déployant l'étoffe,
M'y montrant l'*orangé*, l'*azur*, l'*or*, le *rubis*,
Au *pourpre*, au *violet*, à l'*émeraude* unis.
Des rayons du Soleil, que chacun en ſa teinte
Offre ainſi les couleurs dont la Nature eſt peinte,
Et que de leur mélange embelliſſant les cieux,
Il en réſulte encor la blancheur à nos yeux,
Je connois tout le prix d'une étude ſi belle;
Mais pour nous procurer quelque aiſance nouvelle,
Tous ces ſpéculateurs ont-ils mis dans nos mains
Le feu, dont Prométhée anima les humains?
Ont-ils de la Teinture ouvert le mécaniſme?
Avouez-le, ô Savans! vainement votre priſme
D'un rayon lumineux eût montré les couleurs,
Si Dieu n'avoit pris ſoin de les fixer ailleurs,
Vous n'euſſiez rien produit en les faiſant connoître,
Et l'art du Teinturier ſeroit encore à naître.

Cet art donc, de tout tems, reconnoît pour auteur
De l'Univers entier l'infini Créateur:
Dieu, tirant de ſon ſein ces dons élémentaires,
En revêt tous les ans les fleurs de nos parterres;
Et pour nous donner lieu d'imiter leur émail,
Le beſoin d'un habit nous invite au travail.
Salomon dans ſa gloire, admirant la Nature,
Souvent du lis champêtre envia la parure;

Tant il eſt vrai qu'un fil, dans ſa propre couleur,
N'a rien de comparable à la plus vile fleur.
Les uns, ſous leur aſpect rarement diſſemblable,
Rendroient, entre ſon peuple, un Roi méconnoiſſable;
Les autres, obſcurs, noirs, redoutés de nos yeux,
Porteroient, ſans raiſon, la triſteſſe en tous lieux.
De là l'eſprit humain reconnut l'avantage
D'exprimer des couleurs qui manquoient au filage,
Vers ce but deſirable il dirigea ſes ſoins;
Mais Dieu, pour y pourvoir, attend-il nos beſoins?
Partout il avoit mis, à l'uſage des hommes,
Les terres & les ſels, les plantes & les gommes,
Afin que l'art au fil donnât l'éclat des fleurs,
Le préparât d'avance à ſaiſir les couleurs,
Ou pour en éviter le trop fréquent divorce,
Renforçant leur foibleſſe & modérant leur force,
Unît, par un mélange exact & toujours ſur,
Le plus pâle au trop vif, & le clair à l'obſcur.
Par là, nous pouvons tous, au gré des conjonctures,
Colorer nos habits, varier nos parures;
Par là, le ſimple aſpect de divers ornemens
Annonce aux yeux d'autrui nos propres ſentimens;
Par là l'homme, obligé d'honorer ſon ſemblable,
Obſerve en l'abordant un maintien convenable,
Ne vient point, en des lieux d'un ſombre deuil couverts,
Amener bruſquement les ris & les concerts,
Et diſtingue, aux couleurs d'un habit qu'on apprête,
Si l'on va d'un hymen ſolenniſer la fête,
Fêter le jour natal d'un premier-né chéri,
Ou pleurer au tombeau d'un pere, d'un mari.
Chaque jour, chaque état, chaque ſexe, chaque âge
Peut avoir au beſoin ſa couleur en partage,
Et rendre précieux, par un heureux ſecret,
Cent poiſons que la terre enfantoit à regret.
La Teinture en ſait cas, & cet art admirable,
En un *verd*, en un *rouge* éclatant & durable,

Con-

Convertit à ſon gré, mais non pas ſans effort,
L'inſtrument du dégoût, ou celui de la mort.

Dans l'enfance des Arts & des Manufactures,
Le hazard produiſit les premieres teintures,
Et la teinture aînée, entre tant de couleurs,
Fut ce beau *vermillon*, ſi commun ſur les fleurs.
On dit qu'aſſis un jour à l'ombre de l'yeuſe,
Un Berger la trouva ſur ſa branche épineuſe,
Dans un balon rempli de moucherons *vermeils*,
Héritiers annuels de *vermiſſeaux* pareils.
Tel eſt le vrai Kermès, & telle eſt au Mexique
Cette émule en nos jours de l'écarlate antique,
La cochenille-inſecte, à qui des fruits *ponceaux*
Ont ſervi d'alimens, de toits & de berceaux.
Cependant du Kermès une double teinture
Forma du *cramoiſi* l'empreinte plus obſcure,
Et le noir vaciet, éclairci par le lait,
Sous le nom d'*yanthin*, donna le *violet*.
Sitôt que la garance eut montré ſa racine,
D'un autre *rouge* encore elle fut l'origine;
Mais la *pourpre* de Tyr, avec bien plus d'éclat,
Vint du ſang de l'Amour imiter l'incarnat.

De l'Amour? oui, ce Dieu, ſi chéri de ſa mere,
Un jour dans les jardins, qu'elle avoit à Cythere,
Conduit par les Zéphirs, & jouant avec eux
Y vit couler ſon ſang . . .
Chaque fleur en paſſant lui dérobe un regard . . .
Mais quelle eſt ſa ſurpriſe à l'aſpect de la roſe! . . .
*Zéphirs*, s'écria-t-il, *ô la charmante fleur . . .*
*Comme moi, jeune, fraîche, à ma taille aſſortie,*
*Reſpirant, comme moi, la divine ambroſie,*
*Ses feuilles ſont d'un* blanc *que je n'efface point,*
*Et leur arrangement m'eſt conforme à ce point,*
*Qu'il retrace à vos yeux le deſſin de mes aîles.*
Cette fleur, le portrait des amitiés trop frêles,

Lui

Lui reſſembloit encor par un endroit ſecret,
Endroit bien dangereux, mais l'enfant l'ignoroit.
Il n'en connoiſſoit pas les aiguillons funeſtes,
Tels & non moins cuiſans que ſes flêches céleſtes.
En achevant ces mots, cet aimable innocent
Va porter ſur la roſe un baiſer careſſant;
D'une épine auſſitôt il ſent la vive atteinte . . .
L'Amour veut voir l'épine, on la cherche, ô prodige!
La roſe en ce moment *rougiſſoit* ſur ſa tige:
Digne deſtin d'un ſang cruellement verſé!
Le Ciel à le venger étoit intéreſſé . . .
Il en teignit la fleur qui l'avoit fait répandre,
L'éclat, qu'elle en reçut, lui donna tant de prix,
Que pour ſes autres ſœurs on conçut du mépris;
Elle fit l'ornement de l'empire de Flore,
Et toujours auſſi belle, elle le fait encore.

C'eſt ainſi que, ſemblable à la Reine des fleurs,
La pourpre a ſurpaſſé les plus belles couleurs.
Mais par quelle avanture a-t-on pu la connoître?
Amour fit ce miracle: Amour eſt un grand maître!

Pour la Nymphe Tyros Hercule épris d'ardeur
Lui portoit chaque jour le tribut de ſon cœur,
N'ayant pour compagnon qu'un barbet domeſtique
De ſes amoureux ſoins le confident unique.
Un jour qu'il côtoyoit le liquide élément,
(C'étoit la ſeule route ouverte au jeune Amant)
Le barbet affamé ſurprend un coquillage,
Nourriſſon d'Amphytrite exilé ſur la plage.
Par ce mets délicat quelque tems retenu,
Il vient après ſon Maître, au logis ſi connu:
Arrivé dans la grotte, Hercule & ſa Maîtreſſe
Sont l'objet tour à tour de ſa tendre careſſe.
Mais la jeune Tyros, qui, d'un œil attentif,
Sur ſa levre obſervoit l'incarnat le plus vif,

S'écrie:

S'écrie: *Ah! ſi tu veux me témoigner ton zele,*
*Va me teindre un habit d'une couleur ſi belle,*
*Hercule, ou pour jamais tu ſeras à mes yeux*
*Un perfide, un ingrat, un objet odieux.*
Amans, qu'euſſiez-vous fait! eu recours à la ruſe?
Saiſi quelque prétexte? inventé quelque excuſe? . . .
Amour n'en connoît point: l'Amant empreſſé part,
Cherche, trouve la pourpre & l'aſſervit à l'art.

On vit dans l'Orient les Teinturiers novices,
Aſſez & trop longtems bornés à ces prémices,
En orner, à grands frais, les habits d'un Mortel,
Et du Dieu de Moïſe en décorer l'autel.
Avec la couleur blanche enfin la couleur verte
Des premieres couleurs ſuivit la découverte,
Et lorſqu'à Babylone Alexandre mourut,
Chez les Teinturiers Grecs nulle autre ne parut.
Mais déja le Gaulois, inſtruit par ſes Druides,
Avoit fait dans cet art des progrès plus rapides,
Sans avoir, ou marché ſur les traces des Grecs,
Ou du ſein de Neptune enlevé le Murex.
De tout tems, la Teinture a trouvé dans la Gaule
Des fruits, des arbriſſeaux plus communs que le ſaule:
Là le *fauve* naiſſoit du ſimple brou de noix,
La gaude *jauniſſante* y croiſſoit dans les Bois,
On cueilloit ſur le chêne une *noire* teinture,
Et les champs nourriſſoient, avec peu de culture,
Pour le *bleu* le paſtel, & pour le *rouge* enfin
Les vermiſſeaux du rouvre, ou le billon moins fin.
Dès qu'ainſi l'on connut les cinq couleurs matrices,
L'eſprit donna carriere à cent & cent caprices:
L'art ne prit que d'eux ſeuls ſes nouvelles leçons,
Et cherchant des rapports en cent & cent façons,
Par le mélange adroit du lumineux au ſombre,
De ces ſimples couleurs fit des mixtes ſans nombre.

## SECONDE PARTIE.

### *De la Teinture des Modernes.*

La Teinture n'eut pas un ſort plus heureux que tous les autres Arts, dans cette longue éclipſe que leur fit ſouffrir l'invaſion des Barbares dans l'Occident. On y perdit le ſecret des plus belles couleurs, & entr'autres celui de teindre avec la Pourpre marine, que l'on n'a pas encore bien retrouvé, malgré les recherches, & les découvertes que M. de Réaumur a prétendu avoir faites à ce ſujet. Mais, ce qui eſt digne de remarque; c'eſt au fanatiſme des Croiſades, devenues à la mode dans ces tems de barbarie, que la Teinture dut ſa renaiſſance en Europe: car s'étant conſervée chez les Grecs & les Saraſins, avec quelques autres Arts, tels que celui de la Peinture, d'élever des Vers à ſoie, de faire des Tapiſſeries de haute-liſſe à grands perſonnages, &c. les Princes Croiſés engagerent quelques Artiſtes de ces Nations à les ſuivre dans leurs Etats & à s'y établir. Les Vénitiens apprirent des uns à teindre. La Calabre & la Pouille inſtruite par d'autres, fut bientôt en état de monter des manufactures d'étoffes de ſoie. Florence accueillit la Peinture & en devint la premiere Ecole. La France elle-même ne fut pas des dernieres à profiter de l'induſtrie de ces Artiſtes. Le nom de Saraſinoiſes que l'on y a longtems donné à ces anciennes Tapiſſeries de haute-liſſe, & même celui de Saraſinois que porte encore dans ſes ſtatuts la Communauté des Tapiſſiers, ſont une bonne preuve que leur origine vient de là. Et l'on en peut même inférer que la Teinture reparut dès lors en France, auſſi-bien qu'en Italie, puiſqu'elle étoit indiſpenſablement néceſſaire pour le ſoutien de ces manufactures Saraſinoiſes. La découverte de l'Amérique contribua à perfectionner cette Teinture Européenne, en lui procurant de nouvelles Drogues, particuliérement la Cochenille qui en eſt la plus précieuſe. Cependant le premier qui la mit en uſage en France, ne vivoit pas avant François I. C'étoit un nommé Gilles Gobelin, qui crut avoir découvert que les eaux de la petite riviere de Bievre, qui paſſe dans St. Marceau, l'un des fauxbourgs de Paris, avant que de s'y

jetter

jetter dans la Seine, avoit des propriétés ſingulieres pour ſa teinture. Il s'établit le long de cette petite riviere; & lui, ou plutôt ſes enfans, y firent bâtir une maiſon dont le vaſte enclos, auſſi-bien que la riviere même, a pris & retient toujours le nom des Gobelins. Mais le premier nom de cette maiſon fut *la Folie-Gobelin* que le public lui donna, dans l'idée où l'on étoit, que l'entrepriſe de ces Teinturiers ne réuſſiroit pas. L'événement démentit cette opinion. Leur Teinture ſe ſoutint, s'accrédita, & loin d'être déchue depuis, ſa réputation n'a fait qu'augmenter avec le tems. Tel eſt l'état où nous l'avons vue entre les mains de Mrs. Glucq & Julienne. Le premier étant mort, l'autre qui lui a ſurvécu eſt reſté ſeul Directeur de cette Teinture Royale, & le ſeul dépoſitaire du ſecret de l'Ecarlate des Gobelins; mais lui-même étant auſſi mort en dernier lieu, ſans enfans, il a laiſſé ce ſecret à un de ſes amis. Cependant comme cette Teinture n'eſt & n'a jamais été que pour les laines, & pour la ſeule couleur écarlate, dans le tems que Gilles Gobelin l'établiſſoit à Paris, un Peintre Flamand, nommé Pierre Koeck, rendoit un plus grand ſervice encore à ſon pays, en y mettant en œuvre les plus belles couleurs pour la teinture des ſoies & des laines, dont il s'étoit procuré la connoiſſance, dans les voyages qu'il avoit faits en Turquie. Il mourut l'an 1550. Voilà quelles ont été les ſources & les voies par leſquelles la Teinture eſt venue aux Modernes en s'étendant chez eux de proche en proche. Il n'y a aucun doute que les guerres qui ont déſolé ſi longtems tous les Etats de l'Europe retarderent les progrès de cet art. Auſſi remarque-t-on que les Teinturiers de Paris, à l'exception des Gobelins, ne teignoient qu'en petit teint ſous Henri III, & même encore ſous Louis XIII; tant les guerres civiles & les impôts avoient appauvri le peuple & donné des entraves à l'induſtrie. Tout le commerce de la France avec les Etrangers étoit dans leurs mains. Tous les Draps fins qu'on portoit à Paris venoient d'Angleterre & de Hollande; ce qui fait juger que la teinture des Gobelins n'avoit pour objet que celle des laines écarlates pour la tapiſſerie. En effet quand M. Colbert voulut établir les manufactures de Draps fins de Van-robais, de Sedan & autres, il

ne les déſigna dans les lettres patentes, que ſous le nom de Draps fins façon de Hollande & d'Angleterre. Mais c'eſt à cette époque qu'on doit rapporter la vraie naiſſance de la Teinture en France; car ce Miniſtre ne tarda pas à dreſſer des réglemens qui eurent pour but la perfection de cet Art & l'avantage du Public. Les Réfugiés François les porterent après ſa mort, aux Nations étrangeres qui accueillirent ces innocens perſécutés. Mais depuis Colbert, ſes réglemens ſur la Teinture ont ſouffert quelques changemens; & en dernier lieu, lorſque M. Fagon, Intendant des Finances, étoit à la tête du Bureau du Commerce & des Manufactures, aidé des lumieres de l'Académie des Sciences, il innova beaucoup de choſes ſur cette matiere. Voilà les guides que j'ai ſuivis, ſans avoir pourtant négligé de m'inſtruire en voyant travailler les Teinturiers mêmes. Ainſi de cette hiſtoire de la Teinture des Modernes je vai paſſer à ce qui regarde ſon mécaniſme.

Il y a cinq Couleurs, appellées matrices, premieres ou ſimples, qui ſont le Bleu, le Rouge, le Jaune, le Fauve & le Noir. Ces couleurs diverſement mêlées les unes avec les autres produiſent les couleurs ſuivantes.

I. De la nuance ou du mêlange du Bleu & du Rouge ſe compoſent la couleur de roi, la couleur de prince, l'amarante, le violet, la couleur de penſée, le colombin, le pourpre, l'amarante cramoiſi, le violet cramoiſi, le gris argenté, le gris de lin, le gris violant, le gris vineux, & généralement toutes les ſortes de gris cramoiſis ou autres couleurs cramoiſies où il entre du Fauve, comme gris lavandé, gris de ſauge, gris de ramier, gris plombé, couleur d'ardoiſe, pain bis & triſtamie, la couleur de poivre & minime, le tané, la roſe ſeiche, les paſſevelours, le gris brun & le ſurbrun.

II. De la nuance du Bleu & du Jaune ſe forment le verd jaune, le verd naiſſant, le verd gai, le verd d'herbe, le verd de laurier, le verd molequin, le verd brun, le verd obſcur, le verd de mer, le verd céladon, le verd de perroquet & le verd de chou.

III.

III. De la nuance du Rouge & du Jaune ſe tirent le jaune d'or, l'aurore, la couleur de ſouci, l'orange, le nacarat, la fleur de grenade, le ponceau, la couleur de feu, l'iſabelle, la couleur de chamois, &c.

IV. De la nuance du Rouge & du Fauve dérivent la couleur de canelle, de châtaigne, de muſc, de poil-d'ours, même la couleur de roi.

V. De la nuance du Jaune & du Fauve ſont produites toutes les couleurs de feuille morte & la couleur de poil.

Outre toutes ces couleurs, les Teinturiers en inventent tous les jours de nouvelles, mais qui ne ſont que les mêmes ou plus chargées ou plus affoiblies.

Quoique je n'aye point dit qu'il ſe tire des couleurs de la nuance du Bleu & du Fauve, ni de celles du Noir & des autres couleurs, ce n'eſt pas qu'il ne s'en puiſſe tirer, mais il n'eſt pas ordinaire que l'on en tire.

Toutes ces couleurs ſont produites par la vertu de certaines drogues diverſement mêlées & employées, dont il y a deux ſortes; les unes ſont les drogues non-colorantes, qui ne donnent point de couleurs par elles-mêmes, mais ſervent à diſpoſer les étoffes pour recevoir les teintes des drogues colorantes, ou pour en rendre les couleurs plus belles, plus vives & plus aſſurées: les autres ſont les drogues colorantes qui donnent la couleur aux étoffes.

Je vai donner la liſte des unes & des autres, en obſervant pour les diſtinguer, d'écrire les non-colorantes en caracteres Italiques.

1. *Agaric.*
2. Alcana.
3. *Alun.*
4. *Amidon.*
5. Anate, ou Arrole.
6. *Arſenic.*
7. Bayes de Myrtes, ou Myrtilles.
8. Bayes de Nerprun, Noirprun ou Bourg-épine.
9. Bidauſt, ou ſuye de cheminée.

10. *Biere double.*
11. Bois de Breſil & Breſillet.
12. Bois de Caliapour, Caliatour, ou Cariatour.
13. Bois de Fuſtet, ou Fuſtel.
14. Bois de Fuſtok, ou Bois jaune.
15. Bois d'Inde, de la Jamaïque & de Campêche.
16. Bois de Sandal, ou Santal.
17. Bois de Sapan.
18. Bourre de chevre.
19. Brou de noix.
20. Burgan de teinture, ou Cornet de pourpre.
21. *Cendres communes & recuites.*
22. *Cendres gravelées.*
23. *Cendres potaſſes & vedaſſes.*
24. *Chaux.*
25. Cochenille.
26. *Colle de poiſſon, ou Carlock.*
27. Couperoſe, ou Vitriol.
28. *Crême, Criſtal, ou Sel de tartre.*
29. Dividivi.
30. *Eau commune.*
31. *Eau de Courge.*
32. *Eau forte.*
33. *Eaux fures*, ou Liqueur.
34. Ecarlate, Graine, ou Paſtel d'Ecarlate, ou Kermès, ou Graine de vermillon.
35. Ecorce de bois d'Aulne.
36. Ecorce & feuilles de bois de Noyer.
37. *Eſprit de Vin.*
38. Eſſaye.
39. *Etain fin.*
40. Fenugrec, ou Senegré.
41. Fleurée.
42. Fouic.
43. Garance, Rouge des Teinturiers, ou Billon.
44. Garouille.
45. Gaude, ou Herbe jaune.
46. Geneſtrole, Geneſt des Teinturiers, ou Herbe de pâturage.
47. *Gomme Ammoniac.*
48. Gomme Laque.
49. *Gomme Turique.*
50. Gonthiou.
51. Graine d'Avignon, Graine jaune, ou Grainette.
52. Guede, ou Paſtel.
53. *Huile d'olive.*

54. Inde, & Indigo.
55. *Jus de citron & de limon.*
56. *Jus d'orange.*
57. *Levûre de biere.*
58. Lichen.
59. Limaille.
60. Litharge.
61. Malherbe.
62. Miſſeit.
63. Moulée, ou Terre de moulard.
64. Noix de galle, ou Caſſenolle.
65. Orcanette.
66. Orobe.
67. Orſeille, ou Orchel.
68. Panquè.
69. Perelle.
70. *Pierre Phrygienne.*
71. Pirethre.
72. Poquelle.
73. Pouchoc.
74. Racine de Noyer.
75. *Réagal.*
76. Redon, Rodon, ou Roudon.
77. Reilbon.
78. Rocou, ou Roucou, & Orléane.
79. Rodoul.
80. Ronas.
81. Rupiedſie.
82. Ruynas, ou Soliman-Doſtyn.
83. Safran bâtard, Safranum, Safran-bourg, ou Carthame.
84. *Salpêtre, ou Sel nitre.*
85. Sarrette, Sereth, Sereque, ou Oriſel.
86. *Savon.*
87. *Sel armoniac.*
88. *Sel gemme, ou Sel minéral.*
89. *Sel marin.*
90. *Soude.*
91. *Soufbre.*
92. *Sublimé.*
93. Sumac, Rou, Roure, ou Roux.
94. Tamaris.
95. *Tartre, Graine de tonneau & Gravelle.*
96. Terra-merita, Cucurma, Concourme, ou Souchet des Indes.
97. Tournefol, Ricinoïdes.

98. Tren-

98. Trentanel.
99. Vahats.
100. Velani, ou Avelanede.
101. Verdet, ou Verd de gris.
102. Vouede, ou Voide.
103. *Urine.*

Il ſera bon d'expliquer ici la nature de ces drogues, leur différentes eſpeces, leurs propriétés, & les lieux d'où elles ſont apportées.

1. L'*Agaric* eſt une eſpece de champignon ou d'excroiſſance, qui naît ſur le tronc & les groſſes branches de certains arbres, tels que le Meleſe, en Latin *Larix*, & le Chêne quand il eſt vieux. L'Agaric de Chêne, qui eſt rougeâtre & fort peſant, ne vaut rien dans la teinture. L'autre eſt de deux ſortes, l'Agaric mâle & l'Agaric femelle. Le premier qui eſt l'Agaric commun, eſt celui dont les Teinturiers ſe ſervent ordinairement: il eſt compacte & d'une couleur tirant ſur le jaune. L'Agaric femelle ne s'employe gueres qu'à la médecine. Les meilleurs de ces deux derniers Agarics viennent du Levant; ceux de Savoye & de Dauphiné ne ſont pas ſi bons: la Hollande en fournit auſſi, mais c'eſt le moindre de tous.

2. L'Alcana eſt un ſuc que l'on tire des feuilles d'une plante que les Botaniſtes appellent *Liguſtrum Ægyptiacum*, ou Troëne d'Egypte. Ce ſuc donne une couleur rouge ou jaune, ſuivant qu'on le prépare: jaune, ſi on le fait tremper dans l'eau; & rouge, ſi on le laiſſe infuſer dans du vinaigre, du jus de citron ou de l'eau d'alun. Cette drogue vient d'Egypte & de quelques autres endroits du Levant.

3. L'*Alun* eſt dans la Teinture la principale des drogues non-colorantes. C'eſt un ſel foſſile ou minéral, blanc, dont le meilleur & le plus eſtimé eſt celui de Rome: on ſe ſert cependant auſſi de celui d'Angleterre, que l'on appelle Alun de roche, Alun blanc ou Alun de glace; ainſi que de celui de Liege; mais ce dernier étant gras & par cette raiſon le moins propre à la Teinture, on ne l'employe que quand on n'en peut pas trouver d'autres.

4. L'*Ami-*

4. L'*Amidon* eſt la fécule ou le réſidu qui ſe trouve au fond des bermes ou des tonneaux remplis d'eau, dans leſquels on a mis tremper des recoupes ou du grain de froment. Cette fécule étant ſéparée du ſon par la putréfaction du grain, on en forme des pains que l'on fait ſécher au four ou au ſoleil, & que l'on réduit enſuite en petits morceaux. Le meilleur Amidon eſt fait de froment en grain, & l'on en peut faire partout où croît le froment. La Hollande eſt cependant le pays qui fournit le plus d'Amidon, que l'on y fabrique avec les fromens de Dantzic & de la Livonie.

5. L'Anate ou l'Attole eſt une pâte ſeche & noirâtre, faite des fleurs rouges d'un arbriſſeau que l'on cultive dans l'Amérique Eſpagnole. Cette drogue a la forme d'un rouleau ou d'un tourteau; elle eſt fort eſtimée des Teinturiers d'Angleterre qui en tirent une couleur rouge. Ceux de France n'en font point uſage, ayant chez eux le paſtel d'Ecarlate & autres drogues qui leur en tiennent lieu; & il n'y a peut-être aucun d'eux qui la connoiſſe, parce qu'elle n'eſt point nommée dans les réglemens qui ont été faits pour la Teinture. Les Teinturiers de Berlin qui n'ont pas la même raiſon qu'eux de ſe paſſer de l'Anate, pourroient en tirer aiſément par la voye de Cadix.

6. L'*Arſenic* eſt un minéral blanc, très-cauſtique, & du nombre des plus violens poiſons. Il y en a de deux ſortes, le mat & le tranſparent ou criſtallin: on les employe indifféremment dans la Teinture, & ils ſe tirent de Hollande.

7. Les Bayes de Myrte ou les Myrtilles ſont le fruit & la ſemence du Myrte, qui eſt un arbriſſeau très-connu. Cette graine eſt aſſez blanche, en forme de croiſſant, d'une ſubſtance ſolide & fort dure & d'un goût aſtringent. On préfere celle que produit le Myrte femelle, dont les feuilles ſont quatre ou cinq fois plus petites que celles du mâle, qui ne donne ni de ſi bonnes bayes, ni en ſi grande quantité. On en recueille en Languedoc, en Provence, & plus communément en Eſpagne, ſurtout dans les montagnes de Sierra Morena. Mais il n'y a

gueres que les Teinturiers Allemands qui en faſſent uſage, s'en ſervant pour teindre en bleu.

8. Les Bayes de Nerprun, Noirprun, ou Bourg-épine, ſont le fruit & la ſemence d'un arbriſſeau, nommé en Latin *Rhamnus*, qui croît en abondance dans le pays d'Avignon, & ailleurs. Cette graine reſſemble à celle de Genievre. Les couleurs qu'on en tire ſont le jaune, le bleu & le verd, ſelon qu'elle eſt plus ou moins mûre. Etant encore verte, on en tire du jaune, en la faiſant tremper & amortir longtems dans de l'eau. Pour faire du bleu, ſa maturité doit être plus avancée; & pour le verd, il faut qu'elle ſoit entiérement mûre.

9. Le Bidauct eſt le nom que les Teinturiers donnent à la ſuye de cheminée, dont ils ſe ſervent pour les couleurs brunes, muſques & autres qui en approchent. La couleur fauve qu'ils en font eſt aſſez belle: il eſt vrai qu'elle eſt d'une mauvaiſe odeur, mais en récompenſe elle préſerve les étoffes de cette eſpece de ver appellé *Teigne*, qui les perce & les ronge. Elle s'employe auſſi avec ſuccès pour faire les feuilles-mortes & couleur de poil de bœuf. Les ramoneurs de cheminées devroient donc être plus ménagers de cette drogue qu'ils ne le ſont.

10. La Biere double, qui eſt la Biere brune la plus forte, tant par la quantité de grain & de houblon que par le degré de cuiſſon qu'elle a eu, ſert à luſtrer les taffetas noirs.

11. Le Bois de Breſil eſt un bois très-peſant, fort ſec, qui pétille beaucoup dans le feu, & n'y fait preſque point de fumée à cauſe de ſa grande ſéchereſſe. Il y en a de pluſieurs ſortes, que l'on diſtingue par les noms des lieux d'où ils viennent, & qui ſont le Breſil de Fernambouc, le Breſil de Lamon, le Breſil de Ste. Marthe, & le Breſil des Iſles Antilles dans l'Amérique. Tous ces différens bois de Breſil n'ont point de moëlle. Ils ſervent à teindre en rouge, mais ils different en bonté, le meilleur étant le Breſil de Fernambouc, & le moindre de tous celui des Antilles, que par cette raiſon on ne nomme que Breſillet. Il faut que le premier ſoit en buches peſantes, compact, bien

bien ſain, c'eſt à dire ſans aubier & ſans pourriture; qu'après avoir été mis en éclats, de pâle qu'il eſt, il devienne rougeâtre; & qu'étant mâché il ait un goût ſucré. Mais, quelque bien choiſi que ſoit ce bois, il ne peut faire, non plus que les autres Breſils, qu'une fauſſe couleur qui s'évapore aiſément.

12. Le Bois de Caliapour, Caliatour, ou Cariatour, eſt connu pour un bois de teinture, tant par la liſte des revenus publics ſur les entrées des marchandiſes en Hollande, que par les réglemens ſur les Teintures de France. Mais, quelque recherche que j'aye faite, je n'ai pu ſavoir ni ce que c'eſt que ce bois, ni d'où il vient.

13. Le Bois de Fuſtel, ou Fuſtet, qu'il ne faut pas confondre avec le Fuſtok dont je parlerai enſuite, eſt un bois dont on ſe ſert pour teindre en feuille-morte & en caffé, mais dont la couleur n'eſt pas aſſurée. Ce bois croît abondamment en Provence, mais celui que les Teinturiers tirent de Hollande & d'Angleterre, eſt moins cher. Ce bois doit être choiſi de couleur jaune & bien ſec.

14. Le Bois de Fuſtock eſt le bois d'un arbre fort élevé, qui croît en Amérique, dans toutes les Isles Antilles, & ſurtout dans l'Isle de Tabago, d'où on l'apporte en Europe. On l'appelle auſſi communément Bois jaune, parce que la couleur qu'on en tire eſt d'un très-beau jaune doré, mais elle a beſoin d'être aſſurée par le mêlange de quelques autres ingrédiens. On l'employe ordinairement dans les teintures noires.

15. Le Bois d'Inde eſt le cœur du tronc d'un grand arbre qui croît en abondance dans pluſieurs Isles de l'Amérique, particuliérement dans celles de Campêche, de la Jamaïque & de Ste. Croix, ce qui fait qu'on lui donne les noms de ces Isles. On le diſtingue auſſi par la coupe: le meilleur eſt celui de la coupe des Eſpagnols, c'eſt à dire dont les bouts ſont hachés, parce que l'on connoît à cela qu'il eſt vrai Campêche: les Anglois de la Jamaïque ſcient au contraire leur Bois d'Inde, qui n'eſt pas ſi eſtimé. Ce bois doit être ſolide & peſant,

non pourri, ni outré d'eau. On s'en ſert pour teindre en violet & en noir.

16. Le Bois de Sandal ou Santal eſt de trois ſortes, l'un blanc, le ſecond couleur de citron, & le dernier rouge. Le blanc n'eſt d'aucun uſage dans la Teinture, non plus que le citrin. Le rouge, qui eſt le ſeul dont il s'agit ici, eſt en groſſes & longues buches; le meilleur doit être noirâtre en deſſus, & rouge-brun en dedans. Il eſt aiſé de le connoître à ſon peu d'odeur, à ſon goût inſipide, & à la difficulté de le ſendre parce qu'il n'eſt pas de fil. Il croît à Tanaſſerim & à la Côte de Coromandel, d'où il eſt apporté par les Hollandois & les Anglois.

17. Le Bois de Sapan eſt de deux ſortes; le gros que l'on nomme ſimplement Sapan, & le petit qu'on appelle Sapan-Bimaës. Tous deux ſont mis au rang des Bois de Breſil, ſont confondus avec eux dans la Teinture, & appellés Breſil du Japon. Mais ils different du Bois de Breſil, parce qu'ils ont de la moëlle, ce que n'a point celui-ci.

18. La Bourre de chevre eſt le poil le plus court de cet animal, apprêté avec de la Garance, dans laquelle on l'a fait bouillir pluſieurs fois. Cette Bourre ainſi préparée ſe fond entiérement dans la cuve à teindre, par le moyen de quelques acides que l'on y mêle, comme cendre gravelée, urine, &c. On s'en ſert pour teindre en rouge.

19. Le Brou de noix eſt l'écorce verte qui couvre les noix avant leur maturité. Cette enveloppe n'eſt bonne en teinture que quand on tire la noix en cerneau. Elle ſert à faire la couleur fauve, l'une des cinq couleurs ſimples ou matrices.

20. Le Burgan de Teinture eſt un coquillage dont on tire une eſpece de pourpre marine, d'où ce coquillage eſt auſſi appellé Pourpre. On en trouve aux Isles Antilles & dans l'Amérique Eſpagnole. Celui des Antilles donne un aſſez beau rouge de pourpre, mais cette couleur ſe diſſipe en peu de tems, & l'on n'en fait par cette raiſon aucun uſage en France ni en Angleterre. Mais celui des Colonies Eſpagnoles leur ſert à teindre des draps de Ségovie qui ſe vendent juſqu'à 20 écus l'aune; auſſi ne s'en fait-il pas un grand débit: on peut teindre

dre à bien meilleur marché avec de la cochenille, de la graine d'écarlate & un pied de paſtel.

21. Les *Cendres communes & recuites* ſont celles qui proviennent des bois de chauffage, & qui ont reſté quelque tems dans le foyer. Les meilleures ſont celles du hêtre, du charme & du jeune chêne, quand ces bois ſont neufs, ou non flottés, & avec toute leur écorce.

22. Les *Cendres gravelées* ſont des cendres que l'on fait en faiſant calciner au feu de la lie de vin qu'on a fait ſécher en pains, après que les vinaigriers en ont tiré de l'eau de vie & du vinaigre. Ces cendres ſont en pierres d'un blanc verdâtre, grénées ou graveleuſes, & d'un goût ſalé & amer. Les meilleures pour la teinture ſe tirent de Lyon & de Bourgogne.

23. Les *Cendres potaſſes & vedaſſes* paſſent pour n'être qu'une ſeule & même eſpece de cendre qui eſt faite de branches d'arbres calcinécs & arroſées avec de la leſſive commune pendant qu'elles ſont en feu. Ces cendres ſont en morceaux de différente groſſeur, peſantes, ſalées & âcres au goût: on ne les peut conſerver qu'en les tenant dans des vaſes bien clos & dans des lieux très-ſecs; ſans quoi l'humidité les réſoud en liqueur. Elles viennent de Lorraine, d'Allemagne, & du Nord.

24. La *Chaux* la plus propre à la Teinture eſt celle qui eſt faite, non de pierre tendre ou de marne, mais de pierre dure & lourde, appellée par cette raiſon pierre à chaux. Cette chaux doit être peſante & avoir le ſon d'un pot de terre cuite.

25. La Cochenille eſt la plus précieuſe & la plus chere des drogues qu'on employe dans la Teinture. Mais il s'en trouve juſqu'à cinq ſortes qui different en bonté; ſavoir, la Cochenille Meſteque, qui eſt la meilleure; la Campétiane qui n'eſt autre choſe que les criblures de la Meſteque, ou la Meſteque même qui a déja ſervi à la teinture; la Teſqualle ou Terrechalle qui eſt un mêlange de la Campétiane avec de la terre; la Sylveſtre fine qui eſt le pépin qu'on trouve dans le fruit d'un arbre de l'Amérique; & la Sylveſtre commune, qui eſt la graine

que l'on recueille ſur la grande pimprenelle. Toutes ces Cochenilles, à l'exception de la Meſteque & de la Sylveſtre fine de l'Amérique, ne ſervent qu'à teindre de petites étoffes. La Meſteque, qui s'employe dans les plus belles teintures cramoiſies & écarlates, eſt un petit inſecte deſſéché au ſoleil, & qui ne conſervant plus aucune forme d'animal, paroît comme une graine de médiocre groſſeur, brune & preſque noire, chagrinée, luiſante & comme argentée, ou du moins legérement couverte d'une pouſſiere blanche, impalpable & tout à fait adhérente à l'inſecte. La Sylveſtre fine de l'Amérique donne preſque d'auſſi belles couleurs que la Meſteque, & l'on peut s'y tromper; mais il s'en faut bien qu'elle ſoit autant eſtimée. L'une & l'autre, ainſi que la Campétiane & la Teſqualle, viennent du Mexique & du Pérou par la voye des Galions; & c'eſt de Cadix que les François, les Anglois & les Hollandois les tirent.

26. La *Colle de poiſſon* ou le *Carloek* eſt faite avec la veſſie de l'eſturgeon & vient d'Archangel: mais elle eſt de peu d'uſage dans la Teinture.

27. La Couperoſe ou le Vitriol eſt la marcaſſite du cuivre que l'on a purifiée en la faiſant paſſer par pluſieurs leſſives juſqu'à ce qu'on l'ait réduite en criſtaux. Cette drogue ainſi préparée eſt ou verdâtre & en petits morceaux, comme eſt la Couperoſe de Piſe; ou d'un beau verd clair, comme celle d'Angleterre; ou d'un bleu céleſte & en morceaux taillés en pointe de diamant, comme celles de Chypre & de Hongrie; ou d'un verd céladon & auſſi tranſparente que le verre, comme celle d'Italie; ou enfin d'un verd bleuâtre & également tranſparente, comme eſt celle de Goslar en Saxe, avant qu'on l'ait blanchie; ce qui ſe fait en la calcinant & la mettant enſuite dans l'eau, puis la filtrant & la réduiſant en ſel dont on fait des pains de 40 à 50 livres lorſqu'il commence à ſe coaguler. La Couperoſe eſt une drogue des plus néceſſaires dans la Teinture, ſurtout pour le noir.

28. La *Créme*, le *Criſtal* ou le *Sel de Tartre*, n'eſt autre choſe que le tartre blanc ou rouge mis en poudre, & enſuite réduit en petits

tits criſtaux blancs, par le moyen de l'eau bouillante paſſée au travers d'une chauſſe, & glacée par la fraîcheur de la cave. La meilleure Crême de tartre vient de Montpellier. Il s'en prépare auſſi à Nîmes & aux environs, mais elle n'eſt pas ſi bonne.

29. Le Dividivi eſt une plante dont la propriété pour la teinture n'a été connue en Europe que depuis l'année derniere (*), que la Compagnie Eſpagnole des Caracas en vendit des eſſais dans ſes magazins de Madrid, de Cadix, de St. Sébaſtien, de la Corogne, de Barcelone & d'Alicante. Cette plante eſt propre à la compoſition de différentes ſortes de teintures, tant pour la ſoie que pour la laine & le coton. Elle croît dans la province des Caracas & de Maracaybo, où on lui donne le nom de Dividivi, & elle a la propriété de la Noix de Galle. On a même prouvé par pluſieurs expériences faites à Madrid & ailleurs, qu'elle ſurpaſſe en vertu la Noix de Galle pour la teinture noire. La Junte Royale du commerce & de la monnoie, ayant été informée des avantages qu'on pourroit retirer de cette plante, a pris les meſures néceſſaires pour étendre cette nouvelle branche de commerce; & le Roi d'Eſpagne a bien voulu l'encourager, en exemtant le Dividivi, pour un certain nombre d'années, des droits d'entrée. S. M. a auſſi ordonné qu'on imprimeroit le réſultat des nouvelles expériences qu'on devoit faire ſur cet objet. Mais les papiers publics n'en ont plus rien dit depuis.

30. L'*Eau commune* eſt une choſe dont les Teinturiers ne peuvent ſe paſſer, ſoit pour mettre leurs étoffes en bain, ſoit pour les teindre, ſoit auſſi pour laver & dégorger le fil, la ſoye, ou les étoffes mêmes: mais ce dégorgement ne doit ſe faire que dans de l'eau de riviere ou de fontaine, qui eſt auſſi la meilleure pour la teinture. Je dirai à ce propos que l'on a été longtems dans l'opinion que ce qui donnoit tant d'éclat & de réputation à l'Ecarlate des Gobelins étoit la qualité des eaux de la petite riviere de Bievre, près de laquelle cette manufacture eſt établie. Les Teinturiers des Gobelins ont trouvé leur inté-

(*) Ceci eſt écrit en 1769, car ce Mémoire a été augmenté à diverſes repriſes.

intérêt dans cette prévention populaire, & n'ont rien épargné pour l'accréditer. Mais on eſt parvenu aujourd'hui & depuis longtems à faire de très-belles écarlates en pluſieurs autres endroits de France, ſurtout à Ivry en Normandie, & même en Hollande, en Angleterre, & ailleurs. Et véritablement on en peut faire partout lorſqu'on y employera les drogues convenables tant en quantité qu'en qualité.

31. L'*Eau de courge* eſt tirée par l'alembic du fruit de ce nom qui croît communément dans les jardins. Elle ſert à luſtrer les taffetas de couleurs.

32. L'*Eau forte* que l'on employe dans la teinture des écarlates & couleurs de feu, vient de Hollande & de France. Celle de Hollande n'eſt pas la meilleure, n'étant que médiocrement déflegmée; outre que l'on y fait entrer beaucoup d'alun, ce qui ne convient pas aux Teinturiers, dans les cas dont il s'agit. L'eau forte de France, ſurtout celle qui ſe fait à Lyon & à Bourdeaux, eſt beaucoup plus eſtimée. Il faut conſerver cette drogue dans des bouteilles de grès ou de gros verre bien bouchées.

33. Les *Eaux ſures*, ou *Liqueur* en terme de Teinturier, ſont des eaux communes que l'on a fait ſûrir ou aigrir par le moyen du ſon de farine qu'on y a laiſſé fermenter juſqu'à certain degré. Elles ſont compoſées de cinq parties d'eau ſur une de ſon que l'on a fait bouillir enſemble pendant une heure pour préparer la fermentation. On fait auſſi des Eaux ſures avec les farines mêmes, ſoit de froment ſoit de pois.

34. L'Ecarlate, appellé auſſi Graine, ou Paſtel d'Ecarlate, Kermès & Graine de Vermillon, avec laquelle les Teinturiers font l'Ecarlate de graine & le Cramoiſi, eſt la coque ou l'aurélie d'un inſecte, qui le dépoſe ſur une eſpece de petit houx ou chêne verd qui croît ſans culture dans la Provence, le Languedoc, le Rouſſillon, l'Eſpagne & le Portugal. L'Ecarlate de Languedoc paſſe pour la meilleure, étant ordinairement groſſe & d'un rouge fort vif, au lieu que celle d'Eſpagne eſt preſque toujours maigre & d'un rouge noirâtre. Cette drogue doit

doit être recueillie très-mûre, & elle n'eſt bonne que quand elle eſt nouvelle, c'eſt à dire de l'année; autrement le moucheron qui ſe forme dans la coque en conſume l'intérieur, ce qui diminue la vertu de ſa qualité colorante.

35. L'Ecorce de bois d'Aulne eſt employée par quelques Teinriers pour faire certaines couleurs que j'expliquerai dans la ſuite de ce Mémoire. Le bois d'aulne ſe trouve partout en abondance.

36. L'Ecorce & les feuilles de bois de Noyer ſervent dans la Teinture aux mêmes uſages que le Brou de noix dont j'ai parlé plus haut (19). Elles ne ſont bonnes que quand l'arbre eſt en pleine ſeve, ou quand les noix ne ſont pas encore bien formées.

37. L'*Eſprit de vin* eſt une eau de vie de vin rectifiée par pluſieurs diſtillations, dont une ſeule ſuffit, lorſqu'on ſe ſert d'un inſtrument chymique à pluſieurs cucurbites.

38. L'Eſſaye eſt une racine des Indes Orientales, avec laquelle on teind en rouge ces belles toiles de coton de Maſſuliparan, dont la couleur eſt ſi vive qu'elle réſiſte au jus de cédrat, eſpece de jus de citron, qui en eſt comme la pierre de touche. Il me ſeroit aiſé de donner des marques à quoi l'on pourroit connoître la véritable racine d'Eſſaye; mais par malheur on en apporte très-peu en Europe, & ainſi ceux qui y veulent teindre ou peindre des toiles de coton, ſe ſervent d'autres drogues moins rares, mais auſſi moins bonnes & moins aſſurées.

39. L'*Etain fin*, qui eſt l'Etain d'Angleterre, eſt employé dans la Teinture par préférence à celui d'Allemagne, comme étant en rature, c'eſt à dire neuf, ſans alliage, & mis par les potiers d'étain d'Angleterre, au moyen d'un tour & d'un inſtrument tranchant, en raclures ou petites bandes très-minces, larges d'environ trois lignes, ce qui rend cet Etain plus facile à ſe diſſoudre dans l'eau forte, que celui d'Allemagne qui eſt en morceaux épais, & qui d'ailleurs n'eſt envoyé de Hambourg & de Hollande, qu'après y avoir ſervi à blanchir le fer en feuille que l'on nomme fer blanc, ce qui fait que cet Etain eſt un peu altéré & mêlé de vif argent.

40. Le Fenugrec ou Senegré eſt la ſemence d'une plante du même nom qui eſt très-commune en France, d'où l'on en envoye en Hollande & en d'autres pays étrangers. Les Teinturiers François en employent beaucoup dans le rouge écarlate où elle fait fort bien. Cette graine eſt plus petite qu'un grain de chenevis, dure & ſolide, de figure triangulaire & d'une odeur forte & déſagréable. On préfere la récente qui doit être bien nourrie, & d'un jaune preſque doré. Celle qui a été gardée devient rougeâtre & même brune; les Teinturiers n'en font point de cas.

41. La Fleurée eſt un ſuc tiré par expreſſion d'une eſpece de paſtel appellé Vouede, dont je parlerai plus bas (102). Ce ſuc eſt en pains & ſert à teindre en bleu. On le tire de Normandie.

42. Le Fouic eſt la feuille d'un arbriſſeau qui croît en divers endroits de France ſans être cultivé. Elle ne peut ſe conſerver, qu'elle n'ait été cueillie en parfaite maturité; mais pour l'employer ſur le champ ou peu de tems après, il n'eſt pas néceſſaire qu'elle ſoit ſi mûre. Elle ſert à teindre en noir.

43. La Garance, ou le Rouge des Teinturiers, en Latin *Rubia Tinctorum*, eſt une racine qui a une écorce rouge & une moëlle couleur d'orange. Cette racine étant fraîche donne une couleur très-vive: au bout d'un an, elle ſert encore; mais gardée plus longtems, elle perd de ſon éclat & de ſa qualité. Dans les lieux où l'on cultive cette racine, après l'avoir tirée de terre & fait ſécher à l'ombre, on la réduit en poudre dans un moulin, & enſuite on enferme cette poudre dans un double ſac, pour empêcher qu'elle ne s'évente. La Garance à laquelle on a ôté la premiere écorce & le cœur, eſt appellée Garance de grappe ou robée: c'eſt la meilleure. Celle qu'on nomme Garance non robée eſt la Garance en branche pulvériſée, & la Garance en branche n'eſt autre choſe que la racine ſéchée ſans autre préparation. La Garance de grappe eſt apportée en balles, & les autres dans des pipes. Cette racine ſe cultive en divers endroits, principalement en Flandres & en Zélande, où il s'en fait un riche commerce qui attire

tous

tous les ans bien de l'argent des autres pays. La graine de la Garance eſt noire & de la groſſeur d'un grain de poivre. On la ſeme au mois de Mars après la pleine Lune, ſur des terres médiocrement humides, qui doivent avoir été profondément labourées & bien fumées avant l'hiver. On laiſſe groſſir les racines l'eſpace de 18 mois. Enſuite on arrache les plus groſſes dans le mois de Septembre, qui eſt auſſi le tems où ſe fait la récolte de la graine, & la coupe de la feuille qui peut ſervir de fourage aux beſtiaux. Une Garanciere peut durer dix ans entiers, ſans qu'il ſoit néceſſaire de ſemer de nouvelle graine. Toute la culture pendant ces dix ans ne conſiſte qu'en un labour chaque année, & dans la peine de lever au mois de Septembre les racines qui ont le plus profité.

44. La Garouille eſt la feuille d'une plante qu'on nomme en François Garou, & en Latin *Thymecœa*, dont l'odeur eſt très-forte. Elle eſt propre à la teinture de couleur fauve, & vient de Provence, de Languedoc & de Rouſſillon. On s'en ſert auſſi pour la nuance du gris de rat, où elle réuſſit fort bien; ſon défaut ſe diſſipant lorſqu'on fait paſſer les étoffes au foulon pour les dégorger.

45. La Gaude, ou Herbe jaune, en Latin *Luteola*, ſert à teindre en jaune, comme ſon nom le marque. La plus menue & la plus rouſſe paſſe pour la meilleure: on eſtime moins celle qui eſt plus grande & d'un verd terni. Cette plante croît ſans culture dans preſque toutes les provinces de France & ailleurs; mais celle qu'on cultive eſt bien meilleure. On la ſeme clair ou au large dans des terres legeres au mois de Mars ou de Septembre, & elle ſe trouve mûre en Juin & Juillet: dans les pays chauds elle eſt ſouvent aſſez ſeche lorſqu'on la recueille; mais dans les pays plus froids il faut prendre le ſoin de la faire ſécher après l'avoir coupée. On doit obſerver de ne la cueillir que dans ſa parfaite maturité, & d'empêcher qu'elle ne ſoit mouillée quand elle eſt cueillie.

46. La Geneſtrole, ou Geneſt des Teinturiers, ou Herbe du pâturage, en Latin *Geniſta tinctoria Germanica*, parce qu'elle croît en

Allemagne, eſt une plante qui vient ſans culture comme la Gaude, & qui ſert comme elle à teindre en jaune, mais ſeulement les étoffes de peu de conſéquence: cette plante n'eſt de garde que quand elle a été cueillie en maturité; mais ſi l'on veut s'en ſervir ſur le champ, il n'importe pas qu'elle ſoit ſi mûre. Elle eſt aſſez ſemblable au Geneſt proprement dit, d'où vient qu'on lui en donne auſſi le nom: cependant ſes verges, ſes feuilles, ſes fleurs & ſes gouſſes ſont plus minces & plus courtes.

47. La *Gomme Ammoniac* eſt une gomme que l'on tire d'Alep & de Smyrne, ou en larmes, ou en maſſe. La premiere doit être en larmes rondes, blanches dedans & dehors, d'une odeur douce & d'un goût amer, déſagréable. L'autre doit être en groſſes maſſes chargées de larmes, ſans ſaleté & ſans grains. Les Teinturiers préferent cette derniere, comme étant à meilleur marché que l'autre, qui ne ſert gueres qu'à la Médecine.

48. La Gomme Laque, dont les Teinturiers font uſage, eſt une eſpece de cire rougeâtre, dure, claire & tranſparente, qui vient des Indes, ſurtout des Royaumes de Pégu & de Bengale, par la voye des Anglois, des Hollandois & des François qui y ont des établiſſemens de commerce. Cette drogue a différens noms, ſuivant ſes diverſes formes. On appelle Laque en bâton celle qui eſt attachée à des roſeaux de la groſſeur du doigt, & qui eſt telle qu'elle vient des Indes; Laque en graine, celle que l'on a fait paſſer legérement entre deux meules pour en exprimer la ſubſtance la plus précieuſe; & Laque plate, celle qu'on a fondue & applatie ſur un marbre. La premiere eſt la meilleure étant vraie Bengale; celle de Pégu, qui vient ordinairement en groſſes maſſes n'eſt ni ſi bonne ni ſi pure, étant plus brune & mêlée de terre & d'autres impuretés. Cette gomme bouillie dans de l'eau avec quelques acides fait une teinture d'un très-beau rouge. Les Indiens en teignent ces toiles qui ne perdent point leur éclat à l'eau: les Levantins en rougiſſent leurs maroquins; les Anglois & les Hollandois en font une ſorte d'Ecarlate.

49. La

49. La *Gomme Turique* eſt une eſpeee de Gomme Arabique, qui ayant la même origine n'en differe qu'en ee que tombant des Aeacias dans les tems de pluye, elle s'amoncele en groſſes maſſes, au lieu que l'Arabique eſt en petites larmes blanehes, claires & tranſparentes. Cette gomme vient du Levant; elle eſt propre aux Teinturiers en ſoie, & ceux de Lyon en conſument beaueoup.

50. Le Gouthiou eſt un arbriſſeau ſervant à teindre en noir; il croît dans quelques endroits de l'Amérique Eſpagnole, ſurtout dans le Chili: mais les Teinturiers d'Europe n'en font point d'uſage.

51. La Graine d'Avignon, ou Graine jaune & Grainette, eſt la ſemence d'un arbriſſeau épineux nommé en Latin *Lycium*, ou *Pizacanta*, lequel eroît en abondance tant aux environs d'Avignon que dans le Comtat Venaiſſin, le Dauphiné, la Provenee & le Languedoe. Cette graine eſt d'un verd tirant ſur le jaune, de la groſſeur d'un grain de froment, d'un goût aſtringent & amer. Elle ſert à teindre en jaune.

52. La Guede eſt la eouleur propre à teindre en bleu, qu'on tire du Paſtel, qui eſt une plante dont les feuilles ſont ſemblables à eelles du Plantain. Dans le haut Languedoc où cette plante ſe cultive, on fait ordinairement ehaque année quatre réeoltes de ſes feuilles, ſouvent cinq, & quelquefois juſqu'à ſix. Il n'y a que les quatre premieres qui ſoient eſtimées, & non pas également, mais à proportion de leur rang, la premiere étant meilleure que la ſeconde, & ainſi des autres. Le Paſtel de la cinquiéme eſt très-foible, & celui de la ſixiéme qu'on nomme Marouehin, abſolument mauvais. Dans les lieux où l'on cultive cette plante, on en ſeme la graine tous les ans au eommencement du mois de Mars. Quand la feuille eſt mûre, on la laiſſe flétrir quelque tems avant que de la mettre ſous la roue pour la piler; & cela dans l'intention de la faire mûrir davantage, & de lui ôter une partie de ſon ſuc huileux qui pourroit nuire à la Guede. Après que ees feuilles ont été pilées ou moulues, on les laiſſe huit ou dix jours en piles, & enſuite on les réduit en boules ou en petits pains qu'on

fait ſécher à l'ombre ſur des clayes, juſqu'à ce qu'on veuille les mettre en poudre. Pour lors, les pains de Paſtel étant rompus avec des maſſes de bois, on les mouille d'eau croupie, & après avoir d'abord bien remué & mêlé cette drogue, on continue de faire cette opération quarante fois dans l'eſpace de quatre mois; après quoi elle eſt en état d'être emballée & employée à la Teinture. Le Paſtel vieux eſt le meilleur; il peut ſe garder dix ans entiers. Une forte couleur de Guede eſt d'un bleu foncé preſque noir; c'eſt la baſe d'un ſi grand nombre de couleurs, que les Teinturiers ont une échelle qui leur ſert à compoſer les différentes nuances du Paſtel depuis la plus obſcure juſqu'à la plus claire.

53. L'*Huile d'Olive* eſt une denrée trop connue pour avoir beſoin d'explication. Outre la Provence, le Languedoc & la Riviere de Genes où ſe recueillent les meilleures huiles d'olive, il s'en fait encore beaucoup, mais de moindre qualité, dans le Royaume de Naples, dans la Morée, dans quelques Isles de l'Archipel, en Candie, en quelques lieux de la Côte de Barbarie, dans l'Isle de Majorque, & dans quelques provinces d'Eſpagne & de Portugal. Les Teinturiers n'emploient point de fines huiles d'olive: les communes leur ſuffiſent; ils en mêlent avec de la cendre gravelée pour courroyer certains noirs.

54. L'Inde & l'Indigo que les Hollandois appellent Orellane, ſont deux drogues que l'on confond, quoique la premiere ſoit faite ſeulement des feuilles de la plante nommée Anil, & l'autre de la tige & des feuilles de la même plante. Ce ſont les fécules qu'on en tire par le moyen de l'eau ſouvent braſſée. Ces drogues viennent ainſi préparées des Indes tant Orientales qu'Occidentales. Elles ſont en morceaux plats d'une épaiſſeur raiſonnable, moyennement durs, nets, nageans ſur l'eau, inflammables, de belle couleur bleue ou violet foncé, parſemés en dedans de quelques paillettes argentées, & ils paroiſſent rougeâtres en les frottant ſur l'ongle. C'eſt à toutes ces marques qu'on reconnoît ſi l'Indigo eſt bon & s'il n'eſt pas contrefait. Autrefois il n'étoit pas permis en France de mettre dans les teintures plus de

ſix livres d'Indigo ſur chaque balle de Paſtel ou de Guede, ni plus d'une livre ſur un quintal de Vouede, parce qu'on ne regardoit pas l'Indigo comme une bonne drogue: mais depuis on a penſé autrement, dans la vue ſans doute de favoriſer les Isles Françoiſes de l'Amérique qui fabriquent tous les ans plus de ſix mille quintaux d'Indigo. Mais les Etats où l'on peut cultiver le Paſtel, & qui n'ont point d'Indigo à débiter, préferent avec raiſon le premier au ſecond.

55. Le *Jus de Citron* & *de Limon* eſt le ſuc qu'on exprime de ces deux fruits, principalement du premier, à St. Remo ville de la Riviere de Genes, & à Menton dans la Principauté de Monaco, où il y a une telle abondance de citrons, qu'on ne deſtine à cet uſage que ceux qui paſſent par un anneau de fer dont le diametre eſt réglé par autorité publique. Ce jus eſt tranſporté dans des barils à Avignon & à Lyon pour les Teinturiers du grand teint.

56. Le *Jus d'Orange* eſt le ſuc que l'on tire de même de ce fruit en Provence, dans le Comtat de Nice, dans l'Etat de Genes, en Eſpagne, en Portugal, &c. Les Teinturiers de Lyon, qui l'employent pour le luſtre des taffetas noirs, le préferent au jus de citron qui y eſt moins propre, étant ſujet à blanchir.

57. La *Levûre de Biere* eſt l'écume ou la mouſſe qui s'éleve ſur cette boiſſon lorſqu'elle fermente dans le tonneau. En Flandre où l'on ne fait que des bieres de garde, les Braſſeurs les faiſant fermenter chez eux avant que de les débiter, cela leur donne la facilité de recueillir la Levûre, qu'ils réduiſent en pains après l'avoir fait ſécher; & c'eſt en cet état qu'elle eſt de quelque uſage aux Teinturiers dégraiſſeurs & détacheurs d'habits.

58. Le Lichen eſt une plante ou ſorte de mouſſe que l'on recueille ſur les rochers de quelques-unes des Isles de l'Archipel. Cette plante eſt blanche, d'un goût ſalé, & par bouquets d'environ deux ou trois pouces de long. Les Anglois en enlevent beaucoup qu'ils portent chez eux; & leurs Teinturiers s'en ſervent pour la teinture rouge,

rouge, à peu près comme le font ceux de France avec la Perelle d'Auvergne, dont je parlerai plus bas (69).

59. Les Limailles ſont les parties qu'on a enlevées des métaux dégroſſis, blanchis & polis avec la lime. Celles d'acier, de fer & de cuivre ſont les ſeules qui ſoient de nature à ſervir dans la Teinture: mais le mauvais effet qu'elles y font, eſt cauſe qu'il eſt défendu aux Teinturiers de France d'en faire uſage.

60. La Litharge eſt une drogue qui vient de Pologne, de Suede & de Danemarc, & qu'on croit n'être autre choſe que le plomb qui a ſervi à l'affinage du cuivre qu'on a mis en roſette au ſortir de la Mine. Cette Litharge eſt de deux ſortes, celle d'or & celle d'argent. Mais on prétend que c'eſt la même, à qui la diverſité des couleurs qu'elle a reçues des differens degrez de feu par leſquels elle a paſſé lui a fait donner ces deux noms. Celles de Pologne ſont les plus eſtimées, étant pour l'ordinaire moins terreuſes & d'une plus belle couleur. La Litharge menue eſt préférable à la groſſe, parce qu'elle eſt plus calcinée, & par cette raiſon plus facile à diſſoudre dans la teinture.

61. La Malherbe eſt une plante d'une odeur forte, qui croît dans le Languedoc & la Provence, mais dont il n'eſt permis aux Teinturiers de France de ſe ſervir que dans les provinces où ils n'ont pas la commodité de trouver de meilleures drogues.

62. Le Miſſeit eſt une drogue qui vient d'Arabie, mais dont la nature n'eſt pas bien connue, parce que les Européens en tirent très-peu; preſque toute cette drogue ſe conſumant à Surate & dans les autres lieux du Royaume de Guzurate, où l'on s'en ſert à l'impreſſion & à la peinture des toiles de coton.

63. La Moulée ou Terre de Moulard eſt le ſédiment qui ſe forme des parties de fer & de pierre qui tombent au fond des auges poſées au-deſſous des meules ſur leſquelles on aiguiſe les ouvrages de coutellerie & de taillanderie. Ce ſédiment eſt propre à faire une ſorte de mauvais noir qui eſt défendu aux Teinturiers de France.

64. La

64. La Noix de Galle eſt une ſorte d'excroïſſance qui ſe trouve ſur les feuilles du Rouvre, qui eſt une eſpece de Chêne. Les meilleures viennent de Smyrne, de Tripoli de Syrie, & ſurtout d'Alep, d'où elles ont pris le nom de Galles Alépines. Celles qu'on trouve en Gaſcogne & en Provence, nommées Caſſenoles, leur ſont beaucoup inférieures, étant legeres, rougeâtres & tout unies; au lieu que celles du Levant ſont peſantes, raboteuſes ou inégales à leur ſuperficie, & d'une couleur, ou noirâtre, ou tirant ſur le verd, ou à demi-blanche; ce qui en fait comme trois ſortes qui ont auſſi leurs uſages différens, les deux premieres ſervant à teindre en noir & la derniere à teindre les toiles. A l'égard des Caſſenoles ou Galles legeres de France, elles ne ſervent qu'à faire le noir écru des Teinturiers en ſoie. Les Galles d'Alep paſſent en bonté toutes celles du Levant: la marque à laquelle on les diſtingue, eſt qu'elles ſont miſes dans des balles longues & étroites, au lieu que celles de Tripoli & de Smyrne viennent en balles groſſes & courtes, dont la toile eſt ordinairement rayée. Il faut auſſi prendre garde qu'elles ne ſoient ni legeres, ni percées, ni mêlées de poudre ou d'autres corps étrangers.

65. L'Orcanette, en Latin *Anchuſa*, eſt la racine d'une eſpece de Bugloſe ſauvage, laquelle ſert à teindre en rouge. Il y en a de deux ſortes; l'Orcanette de Conſtantinople, & celle de France. La premiere, qu'on tire du Levant, eſt une racine aſſez ſouvent groſſe comme le bras & longue à proportion: elle ne paroît à la vue qu'un amas de feuilles aſſez larges, roulées & tortillées à la façon du tabac: au ſommet, on voit une eſpece de moiſiſſure blanche & bleuâtre, qui eſt comme la fleur. Cette racine a différentes couleurs, dont les principales ſont le rouge & le violet; au milieu eſt la moëlle ou le cœur, rouge en-deſſus, blanc en-dedans, & couvert d'une écorce très-mince: la couleur que les Teinturiers tirent de cette Orcanette, eſt un rouge-brun tirant ſur le tanné, couleur très-mauvaiſe & peu aſſurée. A l'égard de l'Orcanette de France, qui croît en Provence & en Languedoc, c'eſt une racine d'une groſſeur & longueur moyenne, d'un

rouge-foncé en-deſſus & blanche en-dedans; cette racine, dont la qualité colorante ne conſiſte que dans le rouge dont elle eſt couverte à ſa ſuperficie, doit être choiſie nouvelle, ſouple quoique ſeche, avec une petite tête de couleur bleue, & qui mouillée ou ſeche teigne d'un beau vermeil en la frottant ſur l'ongle ou ſur la main.

66. L'Orobe eſt la ſemence & la racine d'une plante qu'on appelle en Latin *Orobus*. Elle ſert à teindre en verd, mais on n'en fait point d'uſage en France.

67. L'Orſeille eſt de trois ſortes, ſavoir, l'Orſeille des Isles-Canaries, celle de Hollande & de Flandre, & celle de France. L'Orſeille des Canaries, qu'on nomme Orchel ou Urſolle, & qui eſt la ſeule véritable, eſt une petite mouſſe ou croûte qui ſe forme ſur les pierres & les rochers des montagnes, & qui étant apprêtée avec la chaux & l'urine, fait une fort belle nuance de couleurs, mais qui ne ſont pas de durée. L'Orſeille de Hollande & de Flandre eſt une compoſition faite avec du tourneſol en drapeau, de la perelle, de la chaux & de l'urine. Cette drogue eſt en pâte ou en pierres, dans de petits barils du poids d'environ trente livres. L'Orſeille de France eſt compoſée des mêmes matieres, à l'exception du tourneſol; mais quelques-uns le remplacent par une teinture de bois de Breſil: cette Orſeille ſe fait à Lyon, en Auvergne, en Languedoc & en Rouſſillon. Les Teinturiers diſtinguent encore l'Orſeille en Orſeille d'herbe & en Orſeille de terre. La premiere eſt celle des Canaries, ainſi que le tourneſol non apprêté ni allié à la perelle & aux autres drogues dont j'ai parlé. L'Orſeille de terre au contraire eſt le tourneſol ainſi apprêté & la perelle.

68. Le Panque eſt une plante du Chili, dont la tige y ſert à teindre en noir, en la faiſant bouillir avec le Gouthiou dont j'ai fait mention plus haut (50), & avec quelques autres drogues de ce pays-là. Le noir qui s'en fait eſt parfaitement beau, & ne brûle point les étoffes, comme les noirs d'Europe, où par malheur ces excellentes drogues ne ſont point en uſage, ni peut-être connues.

69. La

69. La Perelle eſt une terre griſe en petites écailles, qui ſe trouve aux environs de St. Flour dans la haute Auvergne, attachée ſur les rochers, où elle eſt portée par les vents, & où enſuite ayant été mouillée de la pluye elle ſe calcine par l'ardeur du ſoleil, & devient comme une eſpece de croûte ou de mouſſe de l'épaiſſeur d'une ligne ou deux. Ce ſont les Payſans Auvergnacs qui la vendent, après l'avoir ratiſſée avec des inſtrumens de fer, de deſſus les rochers, où elle ſe reproduit peu de tems après. Cette terre n'eſt d'uſage que pour faire une eſpece d'Orſeille à teinture nommée Orſeille de terre, comme je l'ai dit ci-deſſus (67).

70. La *Pierre Phrygienne* eſt une pierre ſpongieuſe, peſante, mal liée, de couleur pâle traverſée de veines blanches, & d'un goût âcre. Les Teinturiers s'en ſervoient autrefois à dégraiſſer les étoffes qu'ils vouloient teindre, mais s'étant apperçus de ſa qualité un peu corroſive, ils lui ont ſubſtitué le ſavon & la terre glaiſe.

71. La Pirethre eſt une racine de la groſſeur du petit doigt & quelquefois moins, griſâtre en dehors, blanchâtre en dedans, garnie de quelques fibres, & d'un goût âcre & brulant. Elle vient du Royaume de Tunis par la voye de Marſeille. Les Vinaigriers en font plus d'uſage en France que les Teinturiers; mais il s'en conſume beaucoup plus en Anglererre, en Hollande & en Piémont.

72. La Poquelle eſt une plante dont la fleur eſt une eſpece de Bouton d'or, qui ſert à teindre en jaune, & ſa tige en verd: mais l'uſage n'en eſt connu que dans le Chili, ſur la Côte de la Mer du Sud.

73. Le Pouchoc eſt une drogue propre à teindre en jaune, & très-commune à Siam, mais on ne s'en ſert point en Europe.

74. La Racine du Noyer ſert dans la Teinture à faire la couleur fauve, l'une des cinq couleurs matrices. Et ſous le nom de Racine on comprend auſſi l'écorce & la feuille du Noyer, ainſi que la coque verte ou le brou de la noix. Pour conſerver longtems ces différens ingrédiens, il faut les mettre dans une cuve remplie d'eau, & ne les

en tirer que pour les employer. La Racine du Noyer n'eſt bonne en teinture que tirée de terre pendant l'hiver, qui eſt le tems où la ſeve de l'arbre s'y trouve comme retirée. J'ai parlé des autres (19 & 36).

75. Le *Réagal*, ſelon quelques-uns, eſt un minéral naturel, & ſelon d'autres ce n'eſt autre choſe que de l'Orpiment qui eſt de l'Arſenic jaune, tel qu'on l'a tiré de la Mine, mais rougi au feu par le moyen des huiles de chenevis, d'olive & de noix: cette drogue doit être en gros morceaux, peſans, luiſans & très-hauts en couleur. C'eſt, comme l'Arſenic, un poiſon très-violent qui eſt apporté de Hollande.

76. Le Redon, Rodon ou Roudon, eſt une herbe qu'on ſème tous les ans comme le Chanvre. Cette herbe eſt très-commune en Ruſſie auſſi bien qu'en France. Elle ſert aux tanneurs pour la préparation de différens cuirs, & principalement de ceux qu'on nomme Vaches de Ruſſie. Son uſage eſt moins réel dans la Teinture, car ce que les Teinturiers appellent Rodon, n'eſt autre choſe que le Rodoul dont je parlerai plus bas (79).

77. Le Reilbon eſt une eſpece de Garance qui croît au Chili dans l'Amérique méridionale: mais cette Garance étant plus rare & plus chere, ſans être meilleure que celle qui ſe cultive en Europe, les Teinturiers ont raiſon de s'en tenir à cette derniere, dont j'ai parlé (43).

78. Le Rocou, Roucou ou Orléane, que quelques-uns nomment improprement Rocourt ou Raucourt, eſt une pâte ſeche, faite des graines d'un arbre que cultivent dans l'Amérique les diverſes Colonies Européennes qui y ſont établies. Cette drogue eſt en tablettes ou en boules, d'une odeur d'Iris ou de Violette, très-ſeches, très-hautes en couleur, d'un rouge ponceau, douces au toucher, ſans aucune dureté, faciles à s'étendre, & jamais ſi dures qu'en les touchant un peu fortement, on ne puiſſe y laiſſer l'empreinte des doigts. C'eſt à ces marques qu'on reconnoît le Rocou véritable & pur, ainſi qu'à ſa couleur intérieure dont on juge en rompant la tablette ou la boule, & qui doit être d'un rouge encore plus vif que le dehors. Pour éprouver la bon-

bonne ou mauvaiſe qualité du Rocou, on en fait diſſoudre un morceau dans un verre d'eau : s'il eſt pur, il ſe diſſoud entiérement ; mais s'il eſt mêlé de terre ou de pierre, l'une ou l'autre tombe au fond du verre. On tire de cette drogue une couleur rouge, qui eſt plus chere & moins aſſurée que celle qui eſt faite avec la Bourre de chevre : on en employe cependant pour les couleurs d'orange.

79. Le Rodoul eſt un petit arbriſſeau, dont les feuilles ſervent à teindre en noir. Pour les conſerver, il faut les cueillir mûres ; ce qui n'eſt pas néceſſaire, ſi elles ſont employées auſſitôt ou peu après avoir été cueillies. Il eſt défendu d'employer dans la teinture de vieux Rodoul, c'eſt à dire du Rodoul avec lequel on a mis en couleur du maroquin ou d'autres cuirs. Cette plante croît ſans culture dans pluſieurs provinces de France, & elle eſt du nombre des poiſons.

80. Le Ronas eſt une racine à peu près groſſe comme la Réglisſe, courant comme elle dans la terre, & coupée en morceaux de la longueur de la main. Elle ſe trouve dans l'Arménie, & donne une teinture rouge ſi forte & ſi vive, qu'elle dure plus, pour ainſi dire, que l'étoffe même ; ſa vivacité augmentant à meſure qu'elle vieillit. C'eſt du ſuc de cette racine que ſont peintes ces belles toiles de l'Orient qu'on nomme véritables Perſes, auſſi bien que celles qui ſe font dans les Etats du Mogol ; les ſujets de ce Prince tirant tous les ans du Ronas de Perſe pour de grandes ſommes : mais on ne s'en ſert point en Europe.

81. La Rupiedſie eſt une drogue fort en uſage dans la Chine pour teindre en noir : mais les Teinturiers d'Europe ne s'en ſervent point.

82. Le Ruynas ou Soliman-Doſtyn eſt une racine excellente pour la teinture ; elle ſe trouve dans quelques provinces de Perſe, particuliérement dans le Servan & aux environs de Tauris, d'où l'on en envoye annuellement aux Indes environ 500 quintaux qui ſont employés à peindre des toiles de coton ; mais on n'en uſe point en Europe.

83. Le Safran bâtard, autrement Safran-bourg, Carthame & Safranum, eſt la fleur d'une plante fort commune en Provence & aux

environs de Strasbourg en Alſace, auſſi-bien qu'en Egypte, où elle croît ſur le bord du Nil aux environs du Caire, d'où elle eſt envoyée toute préparée à Alexandrie & de là en Europe, où les Teinturiers en ſoie en employent beaucoup pour les couleurs rouges vives. La préparation qu'on lui donne eſt de la faire paſſer au moulin où de rouge & jaune qu'elle étoit ſur la plante, comme celle du Safran-bourg de Provence & d'Alſace, elle devient toûte rouge; on la met enſuite dans l'eau, d'où la retirant on la fait ſécher à l'ombre, le ſoleil lui étant contraire. Le Safran-bourg de Provence & d'Alſace eſt quelquefois employé pour faire la couleur que l'on nomme Nacarat de bourre, mais la teinte en eſt fauſſe, & le Nacarat ſe peut faire avec la Bourre de chevre beaucoup mieux & à moins de fraix. Cependant comme cette plante peut ſervir à d'autres uſages, il eſt bon de la cultiver avec ſoin.

84. Le *Salpêtre* ou *Sel nitre* eſt une drogue non-colorante, fort connue. Le meilleur Salpêtre pour la Teinture, eſt celui qui eſt bien dégraiſſé, blanc, ſec & le moins chargé de ſel.

85. La Sarrette, Sereth, Sereque ou Oriſel, eſt une plante qui croît en pluſieurs lieux de France, & qui pour ſe conſerver doit être cueillie très-mûre, ce qui n'eſt pas ſi néceſſaire quand on l'employe ſur le champ. Elle tire ſon origine des Isles Canaries, mais elle s'eſt naturaliſée en France, où l'on en cultive beaucoup. Ses feuilles, quoique très-vertes, ſervent à teindre en jaune, d'où vient que les Teinturiers François la nomment communément Herbe à jaunir. Cependant elle ne fait pas une ſi belle couleur que la Gaude; & ainſi il ne faudroit l'employer que pour les verds, les feuille-mortes & autres couleurs compoſées, où entre le jaune: elle peut auſſi ſervir pour la teinture jaune des couvertures de laine les plus groſſieres & des étoffes d'un très-bas prix.

86. Le *Savon* eſt de deux eſpeces; l'un dur & ſec, blanc ou marbré; l'autre moû & liquide, verd ou noir. Les Teinturiers ne ſe ſervent que des ſavons de la premiere eſpece, dont les plus eſtimés & les meilleurs ſe tirent d'Alicante & de Carthagene en Eſpagne, de

Gayet-

Gayette en Italie, de Marſeille & de Toulon en France; les bonnes huiles d'olive & la ſoude avec leſquelles ces ſavons ſont faits contribuant beaucoup à leur bonté.

87. Le *Sel Armoniac* eſt un ſel artificiel qu'on a tiré, par le moyen des vaiſſeaux ſublimatoires, de toutes ſortes d'urines d'hommes & d'animaux, où l'on a mêlé du ſel commun & de la ſuye de cheminée. Les Teinturiers le font venir de Veniſe & de Hollande, en maſſes de diverſes couleurs faites en forme de couvercles de pot; mais ils préferent celui qui eſt en pains de ſucre, blancs, clairs, tranſparens, ſecs, ſans craſſe, & dans leſquels, après les avoir rompus, il paroît comme des aiguilles.

88. Le *Sel Gemme*, ou *Sel minéral*, eſt un ſel terreſtre & foſſile dont il y a des mines très-abondantes en Pologne, en Hongrie & en Catalogne. Ce ſel eſt en gros morceaux clairs & tranſparens, faciles à ſe rompre, & qui étant rompus, ſe mettent en petits grains quarrés.

89. Le *Sel Marin*, qui ſe fait d'eau de mer que l'air & le ſoleil épaiſſiſſent & criſtaliſent, eſt de deux ſortes, le gris & le blanc. La France fournit de l'un & de l'autre en abondance; & les Teinturiers les employent indifféremment, pourvu que le blanc n'ait été ni cuit ni raffiné au feu.

90. La *Soude* eſt une eſpece de pierre griſe, très-poreuſe & lixiviale, ce qui la rend propre non ſeulement à la teinture, mais encore à la compoſition du Savon blanc & marbré, & au blanchiſſage du linge. Elle ſe fait avec une plante qui croît en Eſpagne ſur le bord de la mer, qu'on y ſeme tous les ans, & qu'on coupe comme le foin. Lorſque cette plante eſt ſeche, on en remplit de grandes foſſes en terre, on y met le feu, on couvre cette herbe; étant réduite en cendre & humectée d'eau de mer, il s'en forme après quelque tems une pierre ſi dure, qu'on eſt obligé pour l'employer, de la rompre avec des marteaux. Elle vient d'Alicante & de Carthagene: la premiere eſt la meilleure. Elle doit être ſeche, ſonnante, d'un gris bleuâtre en-dedans, percée en-dehors de petits trous en forme d'œil de perdrix, &

étant

étant mouillée elle ne doit pas ſentir un goût marécageux: il faut ſurtout rejetter celle qui eſt mêlée d'autres pierres, & couverte d'une croûte verdâtre. La Soude de Carthagene n'eſt jamais ſi bleue que celle d'Alicante; elle a de plus petits trous, eſt plus couverte de cette croûte verdâtre, & vient auſſi dans des balles plus groſſes.

91. Le *Souphre*, dont on ſe ſert pour blanchir les ſoies, les laines & les étoffes qui en ſont faites, eſt du Souphre commun ou du Souphre en canon, ainſi nommé à cauſe de ſa forme, étant en eſpece de billes ou de bâtons ronds. Il eſt plus ou moins bon ſuivant l'affinage d'où il vient. Celui de Hollande étoit autrefois préféré à ceux de Veniſe & de Marſeille: mais aujourd'hui ce dernier eſt autant eſtimé pour le moins que les deux autres. Il doit être en canons gros & longs, d'un jaune doré, leger, facile à rompre, & qui caſſé paroiſſe brillant & comme criſtalliſé.

92. Le *Sublimé* eſt une préparation chymique, dont le vif-argent eſt la baſe. Il en vient de Hollande, de Veniſe & de Smyrne, outre celui que tous les Chymiſtes des autres Nations font auſſi. C'eſt un des plus violens poiſons: il doit être bien blanc, très-brillant, leger & compact. Celui de Smyrne eſt le plus peſant, & par cette raiſon le moins bon de tous.

93. Le Sumac, autrement, Rou, Roure ou Roux, en Latin Rhus, eſt un arbriſſeau aſſez ſemblable au petit Cormier; ſes feuilles ſont oblongues, pointues, velues & dentelées; ſes fleurs ſont ramaſſées en grappe, de couleur rouge & reſſemblantes aux roſes de jardins; ſon fruit eſt une eſpece de petit raiſin rouge d'une qualité très-aſtringente; ſa ſemence eſt preſque ovale & renfermée dans des capſules de même figure. Cet arbriſſeau croît en abondance dans le pays de Vôges vers la Lorraine, & dans pluſieurs provinces de France, auſſi-bien qu'en Portugal. On pile dans un mortier ſes feuilles & ſes jeunes branches pour en faire la drogue que l'on appelle Sumac, & qui eſt également propre à l'apprêt des maroquins noirs & à la teinture de cou-

couleur verte: mais les Teinturiers ne doivent point employer le vieux Sumac, c'eſt à dire celui qui a déja ſervi à paſſer les peaux.

94. Le Tamaris eſt un arbre de moyenne grandeur, qui croît en Languedoc, dont les feuilles ſont petites, & le fruit en façon de grappe, d'une couleur tirant ſur le noir. C'eſt de ce fruit que les Teinturiers ſe ſervent au défaut de Noix de Galle, pour teindre en noir.

95. Le *Tartre*, autrement *Graine de tonneau* & *Gravelle*, eſt une croûte qui ſe forme au dedans des tonneaux où il y a du vin, dont il emprunte la couleur. Le Tartre blanc eſt préférable au rouge; & le meilleur eſt celui qui ſe tire de ces gros foudres de Vin de Rhin, parce qu'il eſt plus épais, facile à caſſer, brillant & peu terreux; toutes qualités que n'ont qu'imparfaitement ceux de Montpellier & de Lyon dont on ſe ſert communément en France: c'eſt ce dernier qu'on appelle vulgairement Gravelle. Mais il faut obſerver en général que l'emploi bien ou mal fait de cette drogue dans les bains ou bouillons, met une grande différence dans les teintures.

96. La Terra-merita, autrement Cucurma, Coucourme, ou Souchet des Indes, eſt une racine dont les Teinturiers ſe ſervent pour teindre en jaune. Elle eſt jaunâtre en dehors & en dedans, dure & comme pétrifiée, preſque ſemblable en figure & en groſſeur au Gingembre: elle eſt apportée de l'Isle de Madagaſcar ſituée au Midi de l'Afrique. Cette drogue ne fait pas un jaune auſſi aſſuré que celui de la Gaude: mais il n'y en a point de plus propre pour jaunir, éclaircir ou faire approcher du nacarat les couleurs rouges. Pour que cette racine ſoit bonne, elle doit être groſſe, réſineuſe, difficile à rompre, peſante, nouvelle, ou du moins non vermoulue ni pourrie. On reconnoît celle qui eſt vieille en ce qu'elle eſt brune, & que réduite en poudre elle paroît plus rouge que la nouvelle.

97. Le Tourneſol, Maurelle, ou Ricinoïdes des Botaniſtes, eſt une plante qui croît en divers endroits du Languedoc. Sa racine eſt blanche, ronde & ordinairement aſſez droite. Elle pouſſe une tige

ronde qui ſe diviſe en pluſieurs branches. Ses feuilles ſont d'un verd-clair, tirant beaucoup ſur le cendré: ſes fleurs ſont de couleur jaune, renfermées dans de petits boutons en forme de grape. Elles ſont de deux ſortes; les unes ſtériles qui ſechent à meſure que la grape croît, & les autres fécondes qui produiſent le fruit. Le plus grand uſage de cette plante eſt pour la Teinture, & l'on tire de ſon ſuc la couleur, dont avec quelque préparation on compoſe en France, dans les lieux même où elle naît, ce qu'on appelle Tourneſol en drapeaux. Voici la maniere dont on le prépare: on cueille dans la campagne au commencement du mois d'Août les ſommités de cette plante; & les ayant écraſées avec des meules ſemblables à celles dont on ſe ſert pour écraſer les noix & les olives dont on veut tirer de l'huile, on les met dans des eſpeces de cabas pour en exprimer le ſuc avec des preſſes. On expoſe ce ſuc au ſoleil l'eſpace d'une heure ou environ pour le dépurer; puis on y trempe des chiffons & on les étend à l'air; quand ils ſont bien ſecs, on les humecte à la vapeur de 8 ou 10 livres de chaux vive éteinte dans une ſuffiſante quantité d'urine. On les remet ſécher au ſoleil, pour les tremper une ſeconde fois dans le ſuc du Tourneſol; & lorſqu'ils ſont ſecs derechef, ils ſe trouvent dans leur état de perfection, & propres à être envoyés en différens endroits de l'Europe où il s'en fait un commerce aſſez conſidérable, ſoit pour colorer les vins & autres liqueurs, ſoit pour teindre les étoffes en une ſorte de rouge.

98. Le Trentanel eſt une plante qui ſert dans la Teinture à faire la couleur fauve & ſes nuances: mais elle n'eſt bonne que pour les étoffes groſſieres & du plus bas prix. L'odeur de cette plante eſt très-forte. C'eſt une eſpece de Thymecœa ou de Garouille; on la tire de Provence & de Languedoc.

99. Le Vahats eſt une racine dont on leve l'écorce qui ſeule eſt propre à la Teinture. Pour s'en ſervir, on en réduit une partie en cendre, dont on fait une leſſive dans laquelle on met bouillir les étoffes, qu'on teind enſuite avec l'autre partie d'écorce qu'on a réſervée. Mais il faut prendre garde de ne pas donner au bouillon de ces étoffes

un

un feu trop vif. La teinture que produit cette drogue eſt un beau rouge couleur de feu, ou un jaune éclatant ſi l'on y ajoute un peu de jus de citron. Le Vahats croît dans l'Iſle de Madagaſcar.

100. Le Velani ou Avelanede n'eſt autre choſe que l'enveloppe du gland de chêne, c'eſt à dire cette petite coque en forme de calice auquel tient la queue du fruit, & qui eſt orné d'une eſpece de ciſelure naturelle. Quoiqu'il y ait des forêts de chêne en Europe, on ne laiſſe pas de tirer beaucoup de Velani de Smyrne, mais il n'y a gueres que les Italiens qui s'en ſervent, ſoit pour teindre ſoit pour paſſer les cuirs.

101. Le Verdet ou Verd de gris eſt une rouille verte que l'on tire du cuivre rouge, en mettant dans des pots de terre des lames très-minces de ce métal & des raſſes ou grapes de raiſin, déja preſſurées, qu'on y range par lits & qu'on a imbibées d'un vin fort, tel que le clairet de Languedoc & du Rhône. On conſerve ces pots à la cave, d'où on les tire de tems en tems pour enlever le Verdet qui couvre les plaques de cuivre. Cette drogue eſt apportée de Languedoc, en poudre & en pains du poids de 25 livres. On ne voit gueres de Verdet tout à fait pur. Pour être bon, il faut qu'il ſoit ſec, d'un verd foncé, & peu rempli de taches blanches. Les Teinturiers en font une très-grande conſommation tant pour les verds céladons & les couleurs de ſouphre que pour le noir. Cette drogue eſt un poiſon.

102. Le Vouede ou Voide eſt une eſpece de Paſtel que l'on cultive en Normandie, & dont on tire par expreſſion le ſuc, appellé Fleurée, qui ſert comme le Paſtel à teindre en bleu, mais qui ne produit pas chaque année autant de récoltes que lui: ſa préparation exige que ſon ſuc ne ſoit que médiocrement mouillé. Pour s'en ſervir, on le mêle avec le Paſtel & l'Indigo, étant moins bon que le premier & meilleur que le ſecond.

103. L'*Urine* dont les Teinturiers ſe ſervent, eſt l'Urine humaine. Elle aide à mettre le Paſtel en fermentation & en chaleur: on la ſubſtitue à la chaux dans les cuves de bleu. Quelques-uns l'employent encore pour dégraiſſer les laines & les ouvrages qui en ſont

faits : mais ce dégraiſſage eſt très-mauvais, & ne doit ſe faire qu'avec du ſavon ou de la terre bien préparée.

En finiſſant cette explication des Drogues de la Teinture, je dois obſerver qu'il y a parmi elles un certain nombre de plantes qui me paroiſſent pouvoir être naturaliſées dans les Etats du Roi ; tels ſont le fénugrec, le fouic, le fuſtel, la garance (*), le garou & le trentanel, la gaude, la geneſtrole, la courge, la malherbe, le nerprun, l'orcanette, le paſtel & le vouede, le pizacanta, le redon, le rodoul, le rouvre, le ſafran bâtard, la ſarrette, le ſumac, le tamaris, le ricinoïdes ou le tourneſol des Teinturiers, &c. &c.

Il s'agit à préſent de décrire l'uſage des drogues dont on ſe ſert dans la Teinture, c'eſt à dire de marquer le mêlange qui s'en fait pour compoſer chaque couleur. Mais, comme l'uſage des drogues varie ſelon les matieres qui doivent être teintes, je diviſerai ces matieres en cinq Articles.

Le premier, de la teinture des étoffes de laine qui ont des liſieres, & des laines ſervant à les fabriquer.

Le ſecond, de la teinture des laines fines, deſtinées à faire des tapiſſeries tant au métier qu'à l'aiguille.

Le troiſiéme, de la teinture de la ſoie, & des étoffes & autres ouvrages qui en ſont faits.

Le quatriéme, de la teinture des petites étoffes de laine ſans liſieres, & des laines ſervant à fabriquer ces petites étoffes & autres ouvrages.

Le cinquiéme, de la teinture du fil & du coton, & des toiles & autres ouvrages qui en ſont fabriqués.

Les différentes teintures des laines ſont partagées entre deux claſſes d'ouvriers, dont l'une eſt celle des Teinturiers du grand teint, & l'autre eſt celle des Teinturiers du petit teint. Les Teinturiers en ſoie ſont de la premiere claſſe, moyennant qu'ils renoncent à la teintu-

re

(*) On en cultive depuis longtems en Siléſie, & le débit s'en eſt étendu juſqu'à Amſterdam.

re de la ſoie pour exercer celle de grand teint en laine; mais tant qu'ils reſtent à la ſoie, ils forment une claſſe ſéparée.

## ARTICLE PREMIER.

### *De la Teinture des étoffes de laine avec liſieres, & des laines ſervant à les fabriquer.*

1. Avant de mettre à la Teinture les étoffes de laine, il faut les avoir ſuffiſamment dégraiſſées & dégorgées, même deux fois ſi elles ont été blanchies avec du ſouphre ou de la céruſe, qui empêcheroit la couleur de pénétrer ou d'être unie & égale.

2. Il faut pareillement que chaque piece d'étoffe ſoit litée pour les couleurs qui l'exigent, comme je le dirai plus bas (10 & 18). Cette formalité ſe fait en attachant, avec du gros fil ou de la menue ficelle, de petites cordes de la groſſeur du bout du petit doigt le long de la piece, entre l'étoffe & la liſiere, afin que la partie qui en a été couverte, ne puiſſe pas prendre la teinture, & qu'elle conſerve toujours ſon pied ou ſon premier fond, ce qui fait connoître la bonne teinture de l'étoffe.

3. L'écarlate rouge, communément appellée écarlate de Veniſe, eſt teinte avec la graine d'écarlate, ſans aucun mêlange de breſil.

4. L'écarlate ordinaire, ou couleur de feu, eſt teinte de pure cochenille meſteque, avec de l'eau forte, ſel ammoniac, étain fin & amidon, ſans aucun mêlange de terra-merita ni de cochenille ſylveſtre.

5. Les demi-écarlates ordinaires, ou couleur de feu, ſont teintes de même, excepté qu'on y ajoute la garance, ou la cochenille ſylveſtre.

6. Les demi-écarlates rouges, ou de Veniſe, ſont teintes avec le Kermès ou écarlate & la garance, ſans aucun mêlange de breſil.

7. Les rouges de garance ſont bouillis avec les eaux ſures, l'alun & le tartre, & garancés de garance grape, ſans mêlange de breſil, ni d'autre bois de teinture.

8. Les cramoiſis, après avoir été bouillis avec l'alun & le tartre, ſont teints en pure cochenille meſteque, & rabattus avec un bain de ſel ammoniac & de cendre potaſſe. Rabattre une couleur, c'eſt la diminuer quand elle eſt trop vive.

9. Les violets, pourpres, amarantes & autres couleurs ſemblables, ſont premiérement guédés, c'eſt à dire teints en bleu avec le paſtel, le vouede ou l'indigo, & enſuite bouillis dans l'alun & le tartre, & paſſés en cochenille, ſans aucun mêlange de bois d'inde ni d'orſeille.

10. Les violets, penſées & pourpres, ſont les couleurs qui doivent être litées (voyez plus haut 2); on met le liteau après que les draps ont été guédés, pour ſervir de preuve qu'ils l'ont été également dans toute la longueur de la piece. On lite auſſi d'autres couleurs, comme verds, écarlates, &c. lorſque les fabriquans le ſouhaitent pour l'ornement de leurs draps.

11. Les Teinturiers pour teindre toutes ces couleurs de grand & bon teint ne peuvent ſe ſervir des nacarats de bourre, ni des autres couleurs qui ſe tirent de la bourre garancée.

12. Ils doivent laiſſer une roſe à toutes les étoffes qu'ils teignent des couleurs énoncées ci-deſſus (9 & 10), & de toutes les autres qui reçoivent d'abord un pied différent de la couleur qu'elles ont après être achevées; & la partie de l'étoffe où ſe trouve cette roſe ne doit pas recevoir un pied différent de celui qui eſt donné au reſte de l'étoffe.

13. Les gris bruns, minimes, tannés, ſont guédés, bouillis, garancés & brunis: les Teinturiers peuvent employer à ces ſortes de couleurs la racine de noyer & les vieux bains de cochenille.

14. Le gris de perle, de caſtor, de ſouris, & autres gris clairs, tant en laine qu'en étoffe, ſont faits avec la noix de galle, la couperoſe, & tous les autres ingrédiens du bon teint, ſuivant la nuance.

15. Les couleurs de roi & de prince ſont guédées, enſuite bouillies & garancées, tant en laine qu'en étoffe, & l'on y laiſſe une roſe

pour

pour faire connoître s'il a été donné un pied de bleu convenable; ſans que le bois d'inde y puiſſe être employé.

16. Les bleus de toutes nuances ſont faits de pure cuve de paſtel, de vouede ou d'indigo, ſans aucun mêlange de bois d'inde ni d'orſeille.

17. Le Teinturier employe dans les cuves de paſtel ou de vouede la quantité d'indigo qu'il juge néceſſaire, ſoit en les poſant ſoit en les réchauffant.

18. Les verds de toute eſpece peuvent être lités, ſi les fabriquans le jugent à propos; & le Teinturier doit y laiſſer deux roſes à chaque bout, ſavoir, une bleue & une jaune.

19. Il doit laiſſer auſſi deux roſes à chaque bout d'étoffes teintes des couleurs ſuivantes: ſavoir le violet, une roſe de guede & l'autre de cochenille; le tanné ou amarante, une de bleu & l'autre de garance; la feuille-morte, une de jaune & l'autre de fauve.

20. Tous les verds ſont d'abord paſſés en cuve de paſtel, de vouede ou d'indigo, ainſi qu'il eſt dit pour les bleus (*16*); enſuite ils ſont bouillis avec l'alun & le tartre; puis jaunis avec la gaude, la ſarrette, la geneſtrole, le fenugrec ou le bois jaune, ſuivant la nuance, ſans aucun mêlange de bois d'inde ni d'autre ingrédient de pareille eſpece.

21. Le Teinturier peut cependant paſſer d'abord l'étoffe en gaude, avant que de la mettre en bleu, pour les verds dont la nuance ſeroit trop difficile à faire autrement, en mettant toutefois les roſes mentionnées ci-deſſus (*18*).

22. Les jaunes de toutes nuances & couleurs ſont bouillis avec l'alun & le tartre, & teints avec la gaude, la ſarrette, la geneſtrole, le fenugrec, ou le bois jaune.

23. Les fauves ou couleurs de racine, pour les étoffes au deſſus du plus bas prix, ſont teints par les Teinturiers du grand & bon teint, qui doivent ſe ſervir de racine de noyer, ou de brou de noix, ſans pouvoir y employer le bidauct ou la ſuie de cheminée.

24. Les

24. Les étoffes deſtinées à être teintes en noir, leſquelles par leur qualité doivent être guédées, ſont premiérement miſes en bleu de cuve, puis après avoir été bien lavées en eau claire, & dégorgées au foulon, elles ſont remiſes par le Teinturier du grand & bon teint, entre les mains de celui du petit teint pour être noircies & achevées; & ce dernier en les noirciſſant, laiſſe à chaque bout de la piece une roſe bleue, afin qu'on puiſſe juger ſi l'étoffe a eu le pied qu'elle devoit avoir.

25. Après que les étoffes ci-deſſus ont été guédées, les fabriquans peuvent les faire garancer par le Teinturier du grand teint, s'ils le jugent à propos, ſoit pour la beauté ou pour la bonté des couleurs.

26. Dans les villes où il n'y a pas un nombre ſuffiſant de Teinturiers du petit teint, pour noircir les étoffes guédées, & où par quelqu'autre raiſon l'on ne pourroit faire paſſer les étoffes guédées des mains du Teinturier du grand teint, pour les noircir; le Teinturier du grand teint obtient la permiſſion d'achever les noirs qu'il a guédés.

27. On ne teint point une étoffe de blanc en noir, & on n'y met point des roſes bleues ſans que le fond ait été guédé.

28. Les draps noirs d'un prix médiocre n'ont le pied que de bleu turquin, au lieu de bleu pers qu'ont ceux d'un plus haut prix; & ceux du plus bas prix ne l'ont que de bleu céleſte. D'ailleurs, on ne doit pas donner à la roſe une couleur plus foncée que celle du fond de l'étoffe.

29. Tous les gris, qui ſont une nuance dérivée du noir, ſe font avec la noix de galle & la couperoſe, & ceux qui tirent ſur le gris d'ardoiſe, le gris lavandé, ou le gris de ramier, doivent avoir un pied de cuve de cochenille ou de garance, ſans aucun mêlange de bois d'inde.

30. Lorſqu'une étoffe de couleur tachée, flambée ou autrement gâtée, eſt deſtinée à être miſe en noir, elle reçoit le pied de guede par le Teinturier du grand teint, qui laiſſe à chaque bout une roſe de la couleur qu'elle avoit avant que d'être guédée; & le Teinturier du petit

tit teint à qui l'étoffe eſt donnée pour la noircir, doit non ſeulement conſerver ces roſes, mais en ajouter même deux autres de la couleur qu'avoit l'étoffe en ſortant du guede: ce qui s'obſerve également pour les draps appellés *chats*, qui ſont fabriqués avec les reſtes des chaînes & des trames des autres draps de couleur.

31. Il n'y a que les étamines à voile & autres petites étoffes qui ne paſſent point au foulon, qu'on teigne de blanc; mais on leur donne auparavant un bain de racine de noyer, dont il reſte une roſe à chaque bout de l'étoffe, afin qu'on puiſſe juger s'il a été donné d'une hauteur convenable.

32. Les Teinturiers du grand teint font, concurremment avec ceux du petit teint, ces teintures de blanc en noir, ſur un bain de racine très-foncé, pour certaines petites étoffes qui ne vont au foulon que pour être dégraiſſées & dégorgées.

33. L'avivage qui eſt une ſorte de teinture ou d'apprêt fait avec le bois d'inde, ne ſe donne point aux étoffes dont la chaîne & la trame ſont de laine brune ou de toute autre couleur que la noire.

34. Les drogues qui ſont interdites aux Teinturiers du grand & bon teint, pour la teinture des étoffes & laines énoncées dans cet article, ſont les bois d'inde & de campêche, de breſil, de ſainte-marthe, de fernambouc, de japon, de ſandal, de fuſtet, & autres bois de teinture excepté le bois jaune & le cariatour; le tourneſol, la terra-merita, l'orſeille, le ſafran bâtard, le rocou, la teinture de bourre, le bidauct ou la ſuie de cheminée, & la graine d'avignon.

## ARTICLE SECOND.

### *De la Teinture des laines fines, deſtinées à faire des tapiſſeries tant au métier qu'à l'aiguille.*

1. C'eſt au ſeul Teinturier du grand teint qu'il appartient de teindre les laines fines dont il s'agit dans cet Article; & il doit les teindre de bon teint, & non pas en teinture communément appellée *demi-fin*.

2. L'écarlate rouge doit ſe teindre de graine d'écarlate, & de vermillon, ou paſtel d'écarlate, & on y peut mêler de l'agaric ou de l'arſenic.

3. On employe la même graine de kermès ou d'écarlate avec l'alun & le tartre dans la teinture des laines fines qui ſervent à faire les carnations foncées.

4. On fait avec la même graine de kermès, la teinture des laines fines en écarlate foncée; ainſi qu'en pourpre & maron, en les paſſant enſuite ſur la cuve d'inde, ou les y ayant paſſées auparavant.

5. La même graine de kermès eſt auſſi employée pour faire les gris vineux, gris plombé, gris ardoiſé, & gris lavandé, en donnant un petit pied de cuve, & rabattant enſuite avec le brou de noix, ou la racine de noyer, s'il eſt beſoin.

6. L'écarlate incarnate cramoiſie eſt teinte avec cochenille meſteque & eau forte, ſel armoniac, ſublimé & eſprit de vin, pour donner le bel œil & le luſtre.

7. Les écarlates violettes, amarante, roſe ſeche, penſée, gris de lin, paſſe-velours, gris brun, ſur-brun & autres, le tout cramoiſi, ſont teints de guede ou paſtel, avec cochenille meſteque; ſans mêlange de bois d'inde, breſil, orſeille, ni autres ingrédiens de pareille qualité qui ne ſont que de fauſſes teintures.

8. Les gris bruns, minimes & tannés, doivent être de guede plus clair que dans la teinture noire, bouilli un peu plus fort avec l'alun & la gravelle ou le tartre, & être garancés d'avantage qu'au noir, afin que la couleur en ſoit plus belle. On y ajoute pour les minimes de la garance non robée. De plus, en cas que la garance commune ſoit trop obſcure, on les brunit auſſi moins que le noir, & ſeulement pour leur donner un bel œil. A l'égard des tannés, on leur donne une paſſe de cochenille; & on ne teind aucun des minimes avec de la racine de noyer brunie ſur le noir, attendu que c'eſt une fauſſe teinture.

9. Les

9. Les gris de perle, de caſtor & autres couleurs que celles ci-deſſus, ſe font avec la noix de galle & la couperoſe; & quelques-uns ſont commencés avec très-peu de racine de noyer, & achevés avec la galle & la couperoſe; & pour les rendre de meilleur ſervice, ils ſont repaſſés ſur des reſtes de bains de cochenille les plus foibles.

10. Les couleurs de roi & de prince ſont guédées & garancées comme les noires.

11. Les rouges ordinaires, appellés rouges de garance, ſont teints avec la garance pure, ſans mêlange de bois de breſil, ni d'autres pareils ingrédiens.

12. Les rouges cramoiſis, incarnats de roſe, couleur de chair, ſiamet, fleurs de pêcher & de pommier, & de toutes les autres couleurs cramoiſies, ſont teints, ſuivant leurs nuances, de pure cochenille meſteque, ſans mêlange de garance, bourre ni autres ingrédiens; ſi ce n'eſt qu'à l'égard du rouge cramoiſi, il eſt préparé avec l'alun de roche ou de rome, & achevé avec la cochenille; & qu'aux couleurs de fleurs de pommier & de pêcher, on donne un très-leger rabat avec un peu de galle & de couperoſe, afin de donner à ces couleurs un bel œil qui pour être parfait, doit être un peu violant.

13. Les orangés, iſabelle, aurore, gingeolin, jaune doré, couleur de tuile & de chamois, & pelure d'oignon, ſont teints, ſuivant leurs nuances, de gaude & de garance.

14. Les feuille-mortes, couleur de cheveux, couleurs de muſc, de noiſette, de canelle & autres ſemblables, ſont auſſi teints avec gaude & garance.

15. Les bleus bruns ſont faits les premiers & dans la force du paſtel; & les plus clairs ſe font en diminuant, à meſure que le paſtel s'affoiblit dans le travail.

16. Les jaunes pâles, citrons & ſouphres ſont teints avec gaude.

17. Les verds-herbus, verds-gais, verds-naiſſans, verds-jaunes, & verds-bruns, ſont guédés & achevés de gaude, qui ne ſe

donne qu'après le guede, parce que le pied & le fond du bleu rend la laine de plus long uſage que celui du jaune.

18. Les céladons & verds de mer ſont auſſi guédés avant qu'on leur donne la gaude, & il n'eſt pas beſoin de les paſſer ſur le noir: on ne doit point employer à ces couleurs, non plus qu'aux autres verds, du bois d'inde tant au bouillon qu'après qu'ils ſont gaudés; ni les brunir ſur le bois d'inde avec du verdet, ou ſur le bain reſtant des noirs.

19. Les couleurs d'olive, depuis les plus brunes juſqu'aux plus claires, étant paſſées en couleur verte, ſe rabattent avec le bidauct ou la ſuie de cheminée; & ce rabat ſe donne ſelon l'œil qu'il leur faut, ou plus clair ou plus brun.

20. Les Teinturiers de laines fines ſe ſervent de cuve d'inde ou de celle de paſtel, à leur choix, pour la teinture des laines en bleu, verd & autres couleurs qui demandent un pied ou une nuance de bleu; & ſe ſervant de la cuve de paſtel, ils y employent la quantité d'indigo qu'ils jugent à propos.

21. Ces Teinturiers ont chez eux des bois d'inde & de campêche pour les employer aux teintures de laines fines en noir, pourpre, maron, pruneau & rouges bruns preſque noirs; mais ils n'en doivent point mettre dans les teintures en bleu, verd, violet, ni ailleurs que dans les nuances les plus brunes des couleurs énoncées dans ce paragraphe 21.

22. Ils ne teignent les laines fines en noir qu'après leur avoir donné le pied de bleu le plus foncé qu'il eſt poſſible; enſuite ils leur donnent le rabat de galle alépine & de couperoſe, ſans y mettre de la moulée.

23. Les drogues qui leur ſont interdites dans quelque couleur que ce ſoit, ſont le bois de breſil, la fonte de bourre, le rocou, le ſafran, le fuſtet & l'orſeille de terre; mais ils employent l'orſeille d'herbe ou des canaries dans la teinture des laines fines en violet, après leur avoir donné le pied de cuve & de cochenille ſuffiſant.

## ARTICLE TROISIEME.

### *De la Teinture de la ſoie & des étoffes qui en ſont faites.*

1. Comme le luſtre de la ſoie en eſt la principale qualité, & qu'il eſt important qu'elle l'ait en perfection, ce qui dépend particuliérement de la bien décreuſer; cette premiere façon conſiſte de la part du Teinturier, à faire bien & duëment cuire la ſoie avec du bon ſavon blanc, dont il la dégorge après en la battant & lavant à la riviere; enſuite il la met dans un bain d'alun de rome tout à froid & non à chaud, attendu que la chaleur dans l'alun fait perdre le luſtre à la ſoie & en même tems la rend rude & âpre.

2. Le ſavon noir n'eſt pas propre pour le décreuſement de la ſoie.

3. Les ſoies qu'on doit teindre en cramoiſi étant bien dégorgées de leur ſavon, on les alune fortement; puis on les lave derechef & on les bat pour les dégorger de leur alun: enſuite elles ſont miſes dans un bain de cochenille, chacune ſelon ſa couleur, en la maniere qui va être expliquée.

4. Les rouges & écarlates cramoiſies ſont faites de pure cochenille meſteque, y ajoutant la galle alépine, la terra-merita, l'arſenic & le tartre, le tout mis enſemble dans une chaudiere pleine d'eau claire, preſque bouillante, avec la ſoie décreuſée, pour y bouillir continuellement l'eſpace d'une heure & demie, après quoi on enleve la ſoie & l'on ôte le feu de deſſous la chaudiere: la ſoie étant réfroidie par l'évent qu'on lui a fait prendre, elle eſt rejettée dans le reſte du bain de cochenille & miſe à fond pour y demeurer juſqu'au lendemain, ſans y mêler avant ou après, du breſil, de l'orſeille, du rocou, ni d'autres ingrédiens.

5. Les ſoies violettes-cramoiſies ſont préparées comme il vient d'être dit, & teintes de pure cochenille avec la galle alépine (plus modérément qu'au rouge), l'arſenic & le tartre, puis bouillies comme

les autres ci-deſſus, enſuite bien lavées & paſſées dans une bonne cuve d'inde ayant toute ſa force, & ſans aucun autre ingrédient.

6. Les canelles ou tannés cramoiſis ſont faits comme les violets ci-deſſus: s'ils ſont trop clairs, on les rabat avec la couperoſe, & s'ils ſont trop brunis & violets, on les paſſe ſur une cuve d'inde médiocre, ſans mélange d'autres ingrédiens.

7. Les bleus pâles, & beaux bleus, ſont teints de pure cuve d'inde.

8. Les bleus céleſtes ou complets ont le pied d'orſeille de Lyon, autant que la couleur le requiert, puis ils ſont paſſés ſur une bonne cuve d'inde comme les précédens.

9. Les gris de lin ſilvie ou aubifoins ſont faits d'orſeille de Lyon ou de Flandres, puis rabattus avec un peu de cuve d'inde s'il en eſt beſoin, ou avec de la cendre gravelée.

10. Les citrons ſont alunés, puis teints de gaude, avec un peu de cuve d'inde.

11. Les jaunes de graine ſont alunés, plus forts de gaude & même couverts avec un peu de bain de rocou, ſuivant la couleur.

12. Les jaunes pâles ſont alunés & teints de gaude ſeule.

13. Les aurores pâles & bruns ſont alunés, puis gaudés fortement, & enſuite rabattus avec le rocou, qui ſe prépare & ſe diſſoud avec de la cendre gravelée, de la potaſſe ou de la ſoude.

14. Les iſabelles pâles & dorés ſont teints avec un peu de rocou préparé comme ci-deſſus, & ſur le feu.

15. Les orangés ſont teints ſur le feu, de pur rocou préparé de la même maniere, & les orangés bruns ſont enſuite alunés & mis dans un petit bain de breſil, s'il en eſt beſoin.

16. Les couleurs de feu que l'on appelle *ratines*, ont le même pied de rocou que les orangés; puis on les alune, & on leur donne un bain ou deux de breſil, ſuivant la couleur.

17. Les

17. Les écarlates ou rouges rancés n'ont de pied de rocou que la moitié de ce que l'on donne aux orangés; enſuite on les alune, & après on leur donne deux bains de breſil.

18. Les céladons, verds de pomme, verds de mer, verds naiſſans, & verds gais, ſont alunés, puis jaunis avec gaude ou ſarrette, ſuivant la nuance, & enſuite paſſés ſur la cuve d'inde.

19. Les verds bruns, après avoir reçu les mêmes apprêts, ſont rabattus avec le verd & le bois d'inde.

20. Les feuille-mortes ſont alunés, puis teints avec la gaude & le fuſtet, & rabattus avec la couperoſe.

21. Les couleurs d'olive & verds roux ſont alunés, teints de gaude & de fuſtet, puis rabattus avec le bois d'inde & la couperoſe.

22. Les rouges incarnats & couleurs de roſe ſont alunés & faits de pur breſil.

23. Les couleurs de canelle & de roſe ſeche ſont alunés & faits de breſil & de bois d'inde.

24. Le gris violant eſt aluné & fait de bois d'inde.

25. Les violets ſont montés de breſil, de bois d'inde, ou d'orſeille, puis paſſés ſur la cuve d'inde.

26. Les gris plombés ſont tous faits de fuſtet, de gaude, ou de ſarrette, de bois d'inde, d'eau de galle & de couperoſe.

27. Les muſcs minimes, gris de maure, couleurs de roi & de prince, triſtamie, noiſette, & autres couleurs ſemblables, ſont faits de fuſtet, de breſil, de bois d'inde & de couperoſe.

28. On ne donne aucune ſurcharge de galle dans toutes les couleurs ci-deſſus, attendu que c'eſt une fauſſe teinture, & que cette ſurcharge appeſantit les ſoies, ce qui cauſeroit une notable perte à ceux qui les achetent & les employent.

29. Les groſſes ſoies qu'on veut mettre en noir doivent, après le décreuſement fait avec du ſavon blanc, être bien lavées & torſes, puis

puis miſes en eorde ou autour d'un bâton ; enſuite on fait bouillir un bain de galle appellé vieille galle; une heure & demie après qu'il a bien bouilli, on y met la ſoie, & on l'y laiſſe l'eſpace d'un jour & demi ou de deux jours, puis on l'en retire, on la lave bien dans de l'eau elaire, enſuite on la tord, on la met dans une chaudiere de galle neuve, où il n'y a de galle fine que la moitié du poids de la ſoie, qui y demeure un jour ou deux tout au plus, après quoi on la lave & on la tord de nouveau; de là on la paſſe ſur la teinture noire, & on lui donne trois feux au plus: enfin, aptès l'avoir bien battue & bien lavée, on l'adoucit avec du ſavon blanc de bonne qualité, on la tord pour la derniere fois, & on la fait ſécher.

30. Le Teinturier ne doit point paſſer les ſoies noires plus de deux fois dans la galle, ni les paſſer dans l'alun, ni donner aucun noir entre deux galles, ni mêler aucun noir avec les galles, le noir devant être donné ſur de la galle blanche, ni faire aucun biſcuit ni faux noir, attendu que ces fauſſes préparations brûlent & ſurchargent les ſoies: il lui eſt auſſi défendu de paſſer dans la galle les ſoies couleur de triſtamie, canelle, minime, pain bis, gris ſale, feuille-morte, & généralement toutes ſortes de couleurs, excepté le gris brun, qui doit être décreuſé, puis lavé & tors, enſuite mis à froid dans une vieille galle, & après lavé & ſéché. Enfin le Teinturier ne doit pas non plus mettre de la moulée de taillandier dans quelque noir qu'il faſſe.

31. Quant aux fines ſoies noires, on les décreuſe, on les lave & on les tord comme les groſſes ſoies noires; enſuite on fait bouillir pendant une heure de la galle neuve, dans laquelle on les met une ſeule fois; puis on les lave, on les tord, & on les paſſe ſur le noir deux ou trois fois au plus; enfin les ayant bien lavées & adoucies avec de bon ſavon blanc, on les met ſur des perches pour ſécher.

32. Les gris noirs, qu'on appelle gris minimes, ſont engallés comme le noir, & paſſés ſur la teinture noire qu'en terme de Teinture on appelle un feu, parce qu'on ne la fait bouillir qu'une fois ſeulement.

33. A l'égard des ſoies fines organſinées, moulinées & apprêtées pour la fabrication des étoffes de ſoie, même les poils ou trames de quelque qualité que ce ſoit, les unes & les autres ſont teintes ſeulement avec des galles legeres, à raiſon de 4 onces ou 8 lots de galle fine pour chaque livre de ſoie, & ſans alun ni aucune autre ſurcharge.

34. Le Teinturier ne peut mettre dans le bain d'alun les ſoies blanches, ſans ſouphre, tant pour filer l'argent que pour faire d'autres ouvrages.

35. Il ne peut auſſi teindre aucune ſoie en noir, ni en couleur à demi-bain qu'on appelle *teint ſur le cru*, étant obligé de bien faire cuire & décreuſer toutes les ſoies ſans exception, ainſi qu'il a été dit ci-deſſus (1). Cependant, comme pour les petits velours à un poil, les crêpes ou crépons, gaſes & toiles de ſoie ſeulement, on a néceſſairement beſoin de ſoies teintes ſur le cru, on nomme tous les ans un des maîtres Teinturiers qui peut ſeul cette année-là teindre des ſoies ſur le cru, dont il tient regiſtre avec les noms de ceux qui les ont fait teindre, d'où l'on connoît ſi toutes ces ſoies ont été employées ſelon qu'elles devoient l'être.

36. Les Teinturiers en ſoie & en étoffes de ſoie ne peuvent teindre en petit teint aucune étoffe ou autre ouvrage appartenant aux Teinturiers du petit teint, ni ceux-ci teindre aucune ſoie ou étoffe de ſoie, attendu que cela n'appartient qu'aux Teinturiers du bon teint, du nombre deſquels ſont les Teinturiers en ſoie, quoiqu'ils faſſent une claſſe ſéparée, comme il a été dit plus haut dans une remarque qui précede l'Article premier, page 100.

Après ce que j'ai dit juſqu'à préſent, tant ſur la Teinture des Modernes en général, que ſur celle de la ſoie en particulier, le Lecteur ſera peut-être curieux de voir ici comment la même matiere a été traitée en vers dans le ſixiéme livre du *Bombyx*, revu & corrigé:

Le Teinturier d'abord ne connut point de loix,
Il mit tout à profit, ſans réſerve & ſans choix;

Mais bientôt l'impoſture & l'infame avarice
Firent un lâche abus d'un trop libre exercice,
Et n'offrant pour bon teint qu'une fauſſe couleur
Oſoient impunément en tripler la valeur.
Sur leurs pas ténébreux, juſqu'au ſein de la France
L'aveugle barbarie amena l'ignorance:
On le ſentit en vain, & l'artiſte à regret
Des plus riches couleurs y perdit le ſecret.
Les Gobelins depuis, à leur patrie ingrate
Rendirent les premiers la brillante écarlate.
O ſiécle malheureux! leurs travaux commencés
Furent traités longtems de projets inſenſés.
Cependant leurs ſuccès, détrompant le vulgaire,
Triompherent enfin d'un ſoupçon téméraire:
Leur nom auſſi longtems vivra dans Saint Marceau
Que la Biévre à la Seine unira ſon ruiſſeau.
Kœch vint bientôt après: les bords de la Mer Noire
Des larcins qu'il y fit, ont perdu la mémoire:
Mais, ſi mes vers ſont lûs, ſes larcins oubliés
Seront, avec ſon nom, juſtement publiés.
Il fit de cent couleurs, par ſon adreſſe, éclore
Les ſecrets dérobés aux rives du Boſphore,
Et le premier lui-même apprit aux artiſans
A teindre du Bombyx les durables préſens.
Heureux! ſi ſur les Lys la diſcorde inhumaine
N'eût ſoufflé le poiſon de ſa mortelle haleine,
Et près d'un ſiecle entier, dans le temple des Arts,
De Bellone en fureur planté les étendarts.
Réſervé par le Ciel à des tems moins ſiniſtres,
Enfin parut Colbert, l'exemple des Miniſtres:
Des ſucs de la Teinture il montra le pouvoir,
Il ſut l'aſſujettir aux regles du devoir:
La fraude, dans cet art, n'oſa plus s'introduire,
Aux leçons de Colbert le François ſut s'inſtruire,
Et de nos jours encore, en tous lieux à la fois,
De ce guide fidele il ſuit les juſtes loix.

Quel-

Quelquefois cependant, incertain dans ſes routes,
Il trouva, dans Fagon, le flambeau de ſes doutes:
Fagon fut à Colbert dignement comparé,
Autant ami des Arts, & non moins éclairé. . . .

C'eſt en vain qu'à grands fraix, voulant teindre la ſoie,
Dans des flots colorans un artiſte la noie,
Si, pour ne lui donner qu'un éclat trop changeant,
A l'épurer d'abord on le voit négligent.
Mêlée aux ſavons blancs, avec eux longtems cuite,
Au courant d'une eau pure, on l'en déprend enſuite,
On la lave, on la bat, & puis dans un bain froid
Le rouge alun de rome à l'inſtant la reçoit.
Ainſi toujours la ſoie, avant tout *décreuſée*,
A ſouffrir les couleurs en eſt mieux diſpoſée.
Veut-on du *cramoiſi* l'abreuver à grand prix?
On la déprend encor de l'alun qu'elle a pris:
Et du ſouchet de l'inde alliant la racine,
Le tartre, l'arſenic, & la galle alépine,
Au riche vermillon du tonna-mexicain,
Le parfait cramoiſi naît de leur double bain.
Faut-il aux *violets*, aux *tannés*, aux *canelles*
Baiſſer des cramoiſis les teintures trop belles?
L'indigo remplaçant le ſouchet qu'on bannit,
La couperoſe encore au beſoin les brunit.
Avec l'indigo ſeul le *beau bleu* s'appareille,
Le *céleſte* de plus exige un pied d'orſeille.
Et de celui-ci vient, rabattu tant ſoit peu,
Le *gris-de-lin-ſilvie*, & tout *aubifoin bleu*.
Du *jaune*, avec l'alun, la gaude eſt la teinture;
Ce jaune eſt pâliſſant, formé de gaude pure,
Mais pour le renforcer, l'affermir plus ou moins,
Pour le changer enfin, d'autres ſucs y ſont joints.
L'indigo le plus foible au *citron* le ramene,
Le plus foible rocou donne un *jaune-de-graine*:
Avec la ſoude uni, de leur concours commun
Sort un beau *jaune-aurore*, & non pâle, ni brun:

Sans la gaude, au rocou la ſoude incorporée
Engendre l'*iſabelle*, ou plus ou moins dorée,
Et le rocou, ſans ſoude, enfante l'*orangé*,
Qui brunit, dans l'alun & le breſil plongé.
Toute *couleur de feu* ſous le nom de *ratine*,
Quoiqu'aux yeux différente, a la même origine;
Mais d'un breſil, deux fois, coup ſur coup, répété,
Les bains plus rougiſſans ſont ſa diverſité.
De tout *rouge rancé* l'*écarlate* commune,
Non moins que le ponceau, ſe breſille & s'alune,
Mais l'un a du rocou double doſe en ſon pié
Et l'*écarlate* au ſien n'en a que la moitié.
Le *rouge incarnadin* & la *couleur de roſe*
De breſil & d'alun, ſans rocou, ſe compoſe:
Le campêche à tous deux ſe trouve-t-il mêlé?
Ils ſont la *roſe ſeche*, ils ſont le *canelé*.
Rejettant le breſil, prétend-on l'en exclure?
D'un beau *gris violant* on aura la teinture.
Veut-on des *violets?* qu'on uniſſe au breſil,
L'orſeille, le campêche, & le bleu de l'anil.
Au campêche, au breſil joind-on la couperoſe,
La galle & le fuſtet, chacun ſuivant ſa doſe?
On aura des *gris bruns* & des *tannés* divers,
Plus que n'en peut loger la priſon de mes vers.
Mais, au lieu du breſil, qu'on y mette, ſans fraude,
Ou l'or de la ſarrette, ou celui de la gaude,
Il en réſultera plus d'un beau *gris plombé*,
En qui des premiers *gris* le brun ſera tombé.
La gaude & la ſarrette, aux Teinturiers habiles,
Dans les différens *verds*, ne ſont pas moins utiles:
Avec l'une des deux l'inde & l'alun ligués
Donnent des *céladons*, des *verds naiſſans & gais*.
S'il faut *brunir* ces *verds*, que le verdet bluâtre
Y ſoit le compagnon du campêche rougeâtre.
Qu'enſuite on ſubſtitue à l'inde le ſuſtet,
Et l'aigre couperoſe au campêche, au verdet,

Au lieu de ces *verds bruns*, leur nuance moins forte
N'offrira plus à l'œil qu'un *verd de feuille-morte*:
Mais enfin du campêche y voit-on le retour?
Les *roux verds* & l'*olive* en naîtront à leur tour.

Avec autant d'adreſſe, & plus d'apprêts encore,
La ſoie en un beau *noir* aiſément ſe colore:
J'allois, au gré de l'art, en expliquer les loix;
Mais Pégaſe recule & ma Muſe eſt ſans voix.
O fille d'Apollon, &c.

## ARTICLE QUATRIEME.

### *De la Teinture des petites étoffes de laine ſans liſieres, & des laines ſervant à leur fabrication & à d'autres ouvrages.*

1. Les couleurs violettes & amarantes cramoiſies ſe font de cuve de cochenille, ſans mêlange d'orſeille ou d'autres ingrédiens.

2. Les couleurs de roſe & les pourpres ſe font de cochenille, ſans les rabattre d'orſeille.

3. Les rouges bruns de bon teint ſont faits de cuve de cochenille, & rabattus de garance, ſans mêlange de breſil.

4. Les écarlates & incarnats couleur de feu, l'orangé, le jaune doré & l'iſabelle, ſont teints de bourre teinte en garance, ſans mêlange de fuſtet.

5. Les bleus, les verds gais, verd de pomme, verd de chou, verd d'olive, verd de mer, verd d'œillet & céladon, ſont gaudés & paſſés en cuve, ſans être brunis avec le bois d'inde.

6. Le more doré, les feuille-mortes & verds roux, ſont gaudés & paſſés en cuve.

7. Le noir de bon teint eſt teint en bleu & rabattu de galle alépine & de couperoſe, ſans y mettre de la moulée de taillandier.

Les ſept genres de teinture ci-deſſus appartiennent aux Teinturiers du grand teint, & à ceux qui pour teindre de bon teint certaines petites étoffes, ont renoncé au petit teint. Mais les ſuivans ne concernent que les Teinturiers en petit teint.

8. Les couleurs communes ſont teintes de galle, alépine & de toutes ſortes d'ingrédiens permis, que les Teinturiers jugent les plus propres pour leur bonne qualité.

9. Les gris & noirs communs ſont teints de galle alépine & de couperoſe.

10. Les couleurs de feu, orangés & nacarats communs ſont faits de bourre teinte en garance.

11. Les Teinturiers du petit teint peuvent ſeuls teindre de ce teint, les ſerges, étamines, camelots & autres étoffes de bas prix qui ne ſont envoyées au foulon que pour être dégraiſſées & dégorgées: mais ils ne peuvent teindre aucune des étoffes drapées, quoique du même prix, leſquelles devant être foulées ne doivent ſe teindre qu'au grand & bon teint.

12. Les mêmes Teinturiers, à qui il appartient de teindre des laines dans les couleurs & avec les drogues ci-deſſus, peuvent auſſi blanchir toutes ſortes de toiles de lin, de chanvre & de coton, ainſi que toutes ſortes de fil & de bas d'eſtame.

13. Les drogues qui leur ſont interdites ſont le paſtel, le voue-de, l'indigo, la cochenille, la graine d'écarlate ou le kermès, la garance, la ſarrette, la geneſtrole, le ſenugrec & l'orcanette.

14. Ils ne peuvent avoir chez eux des cuves de bois pour le gue-de, mais ſeulement des chaudieres de cuivre & des cuves ou des tonnes pour conſerver le brou de noix.

## ARTICLE CINQUIEME.

### *De la Teinture du fil & du coton, & des toiles & autres ouvrages qui en ſont fabriqués.*

1. Avant que le fil de lin ou de chanvre ſoit mis à la teinture, il eſt décruë ou leſſivé avec de bonnes cendres de bois durs, puis retors, enſuite lavé dans de l'eau de riviere ou de fontaine, & enfin retors pour la ſeconde fois.

2. Le fil pers, appellé fil à marquer, retors & ſimple, & le bleu brun-clair & mourant, ſont teints avec inde plate ou indigo.

3. Le verd gai eſt premiérement teint en bleu, enſuite rabattu avec bois de campêche & verdet, & enfin gaudé.

4. Le verd brun eſt teint de même, mais bruni davantage, & puis gaudé.

5. Le citron, le jaune pâle & le citron doré ſont teints avec gaude & fort peu de rocou.

6. L'orangé, l'iſabelle couvert & l'iſabelle pâle, juſqu'au clair & à l'aurore, ſont teints avec le fuſtet, le rocou & la gaude.

7. Le rouge clair ou plus brun, la ratine ou couleur de feu claire ou plus couverte, ſont teints avec le breſil de fernambouc, ou, à ſon défaut, avec d'autre breſil & du rocou.

8. Le violet, la roſe-ſeche, & l'amarante clair ou brun, ſont teints avec breſil, & rabattus avec la cuve d'inde ou d'indigo.

9. Le feuille-morte clair ou brun & l'olive ſe bruniſſent avec la galle & la couperoſe, & ſe rabattent avec la gaude, le rocou ou le fuſtet, ſuivant l'échantillon.

10. Le minime brun ou clair, & le muſc auſſi clair ou brun ſont brunis & rabattus comme le feuille-morte.

11. Le gris blanc, gris ſale, gris brun, gris de caſtor, breda & toutes autres ſortes de gris ſont brunis avec la galle alépine & coupero-

perose, puis rabattus avec gaude, bresil, fustet, campêche & autres ingrédiens nécessaires, suivant l'échantillon & le jugement de l'ouvrier.

12. Le noir se fait de galle alépine & de couperose; ensuite il est lavé, & achevé avec le bois de campêche. Il y a aussi quelques noirs qui sont courroyés avec de bonne huile d'olive & de la cendre gravelée.

13. Dans les teintures ci-dessus on employe le savon de Marseille, d'Alicante, ou tout autre qui en a la bonne qualité.

14. Les Teinturiers ne doivent pas mêler le fil de chanvre avec le fil de lin en bottes ou pelotons, ni le retors avec celui qui ne l'est point.

15. Les Teinturiers ne doivent pas se servir de suie de cheminée pour imprimer des toiles ou du fil, à moins qu'on ne les ait fait passer dans de bonnes galles.

16. Les toiles neuves ou vieilles, ainsi que le fil à marquer le linge, ne sont bresillées qu'après avoir été teintes en bonne cuve, sans avoir le pied d'autre teinture.

17. Aucune toile ne doit être débitée pour bon teint, qu'elle ne soit aussi teinte de cuve; & il en est de même du fil de lin de quelque pays qu'il vienne.

18. Toutes les toiles doivent être bien & duëment teintes, avant que d'être empesées ou collées pour la calandre.

19. Les Teinturiers ne doivent mettre aucun savon, huile, graisse & autres ingrédiens infects, gras & défectueux, aux marchandises qu'ils calandrent.

Après avoir rapporté dans les cinq articles ci-dessus, la composition des couleurs de la Teinture pour toutes les matieres qui en sont susceptibles, il me reste à parler d'une derniere opération qui y est intimement liée. C'est une épreuve à laquelle il est nécessaire de soumettre toutes ces matieres teintes, pour connoître si la teinture en est bonne

bonne & assurée, ou si elle est fausse, de peu de durée & par conséquent d'un mauvais usage.

Pour faire cette épreuve, il faut supposer d'abord qu'on ait teint en toutes sortes de couleurs, des échantillons de laine, de soie ou d'étoffes de ces matieres. Si l'on expose ces échantillons à l'air & au soleil pendant un tems raisonnable, les bonnes couleurs se soutiendront parfaitement, mais les fausses s'affoibliront bientôt & s'effaceront insensiblement à proportion du degré de leur mauvaise qualité. Et comme une couleur ne doit être réputée bonne, qu'autant qu'elle résiste à l'action de l'air & du soleil, cette expérience servira de regle pour décider sur le plus ou moins de bonté des différentes couleurs.

Si l'on fait ensuite des épreuves sur les mêmes échantillons qui auront été exposés à l'air & au soleil, en les faisant bouillir avec des ingrédiens convenables, on reconnoîtra que les mêmes ingrédiens ne pourront pas être indifféremment employés dans les épreuves de toutes les couleurs, parce qu'il arrivera quelquefois qu'une couleur reconnue bonne après avoir été exposée à l'air & au soleil, sera considérablement altérée par l'épreuve, & qu'au contraire une couleur fausse y résistera.

Il s'agit d'abord de déterminer les ingrédiens qu'on doit admettre dans ces épreuves. La conviction où l'on est, qu'on ne sauroit s'assurer du degré d'acidité du jus de citron, du vinaigre, des eaux fûres & de l'eau forte, oblige à rejetter dans les épreuves l'usage de ces ingrédiens; pour n'y employer avec l'eau commune que des matieres dont l'effet soit toujours égal.

Epreuve des teintures de laine, en trois classes.

En suivant ce principe & commençant par les teintures en laines, il suffira de séparer en trois classes, toutes les couleurs dont les échantillons de laine peuvent être teints, afin de fixer les ingrédiens dont on doit se servir dans l'épreuve des couleurs compriſes dans chacune de ces trois classes.

Les couleurs rangées dans la premiere seront éprouvées avec l'alun de rome; celles de la seconde avec le savon blanc; & celles de la troisiéme avec le tartre rouge.

Mais il ne ſuffit pas, pour s'aſſurer de la bonté d'une couleur par cette épreuve, d'y employer des ingrédiens dont l'effet ſoit toujours égal; il faut encore que la durée de cette opération ſoit exactement déterminée, & de plus que la quantité de liqueur ſoit fixée, parce que le plus ou moins d'eau diminue ou augmente extrémement l'activité des ingrédiens qui y entrent. Ainſi il eſt bon d'expliquer tout cela.

L'épreuve avec l'alun de rome ſe doit faire de cette maniere: on met dans un vaiſſeau de terre une livre, poids de marc, d'eau commune, & une demi-once d'alun: on poſe le vaiſſeau ſur le feu, & quand l'eau bout à gros bouillons, on y met l'échantillon dont l'épreuve doit être faite; on l'y laiſſe bouillir pendant cinq minutes; après quoi on le retire & on le lave bien dans l'eau froide.

L'épreuve avec le ſavon blanc ſe doit faire en mettant dans une livre d'eau, le poids de deux gros de ſavon blanc de marſeille, haché en petits morceaux. Ayant poſé enſuite le vaiſſeau ſur le feu, on a ſoin de remuer l'eau avec un bâton pour bien faire fondre le ſavon. Lorſqu'il ſera fondu & qu'on verra l'eau bouillir à gros bouillons, on y met l'échantillon que l'on fait pareillement bouillir l'eſpace de cinq minutes.

L'épreuve avec le tartre rouge ſe doit faire préciſément de même, avec les mêmes doſes & dans les mêmes proportions que l'épreuve avec l'alun, en obſervant de bien pulvériſer le tartre, avant de le mettre dans l'eau, afin qu'il ſoit entiérement fondu, lorſqu'on y mettra l'échantillon.

Le poids de l'échantillon de laine dont on voudra faire l'épreuve, doit être du poids d'un gros poids de marc, & l'échantillon d'étoffe ne doit pas excéder la grandeur de deux pouces en quarré. Ainſi, lorſqu'il ſera néceſſaire d'éprouver de plus grands échantillons, ou pluſieurs à la fois, il faudra augmenter à proportion le poids de l'eau & des drogues; ce qui ne changera en rien l'effet de l'épreuve: mais pour la rendre plus certaine, il ne faut pas éprouver enſemble des échantillons de différentes couleurs.

Les

Les couleurs qui doivent être éprouvées avec l'alun de rome, ſont: Epreuve de la premiere claſſe.

Le cramoiſi de toutes nuances.

L'écarlate de kermès ou de graine, dite communément *écarlate de veniſe ou d'hollande.*

L'écarlate couleur de feu ou de cochenille, que l'on nomme en France *écarlate des gobelins.*

Le rouge couleur de ceriſe & autres nuances de l'écarlate.

Les violets & gris de lin de toutes nuances.

Les pourpres.

Les couleurs de langouſte, jujube & fleur de grenade.

Les bleus.

Les gris ardoiſés, gris lavandés, gris violans, gris vineux & toutes les autres nuances ſemblables.

S'il a été employé, dans la teinture du cramoiſi, des ingrédiens de faux teint, la fauſſeté ſe reconnoîtra facilement par l'épreuve avec l'alun, parce qu'elle ne fera que violenter un peu le cramoiſi fin, c'eſt à dire le faire tirer ſur le gris de lin. Mais, en détruiſant les plus hautes nuances du cramoiſi faux, elle les rendra d'une couleur de chair très-pâle, & blanchira preſque toutes les baſſes nuances du même cramoiſi faux.

L'écarlate de kermès ne ſera nullement endommagée par cette épreuve. Elle fera monter l'écarlate de cochenille à une couleur de pourpre, & violentera les baſſes nuances, en ſorte qu'elles tireront ſur le gris de lin. Mais elle emportera preſque toute la fauſſe écarlate de breſil, & la réduira à une couleur de pelure d'oignon. Elle ſera encore un effet plus ſenſible ſur les baſſes nuances de cette fauſſe couleur, & emportera preſque entiérement l'écarlate de bourre garancée & toutes ſes nuances.

Quoique le violet ne ſoit pas une couleur ſimple, étant formée des nuances du bleu & du rouge; elle eſt néanmoins ſi importante, qu'elle mérite un examen particulier. La même épreuve avec l'alun de rome ne fait preſque aucun effet ſur le violet fin; au lieu qu'elle en-

dommage beaucoup le faux. Mais il faut obſerver que ſon effet n'eſt pas d'emporter toujours également une grande partie de la nuance du violet faux, parce qu'on lui donne quelquefois un pied de bleu de paſtel ou d'indigo. Ce pied étant de bon teint, n'eſt pas emporté par l'épreuve, mais la rougeur s'efface; les nuances brunes deviennent preſque bleues, & les pâles, d'une déſagréable couleur de lie de vin.

A l'égard des violets demi-fins qui ſont des couleurs de mauvais teint, ils doivent être mis dans la claſſe des violets faux, ne réſiſtant pas davantage à cette épreuve.

On connoîtra de la même maniere les gris de lin fins d'avec les faux; mais la différence eſt legere, les premiers perdant ſeulement un peu moins que les derniers.

Les pourpres fins réſiſteront parfairement à l'épreuve avec l'alun, au lieu que les faux perdent la plus grande partie de leur couleur.

Les couleurs de langouſte, jujube & fleur de grenade, rireront ſur le pourpre après l'épreuve, ſi elles ont été faites avec la cochenille; au lieu qu'elles pâliront conſidérablement, ſi l'on y a employé le fuſtet qui fait une fauſſe couleur.

Les bleus de bon teint ne perdront rien à l'épreuve, ſoit qu'ils ayent été faits de paſtel, ou d'indigo; mais ceux de faux teint perdront la plus grande partie de leur couleur.

Les gris ardoiſés, gris lavandés, gris violans & gris vineux, perdront preſque toute leur couleur, s'ils ſont de faux teint; au lieu que les autres ſe ſoutiendront parfaitement.

Epreuve de la ſeconde claſſe.

Les couleurs qui doivent être éprouvées avec le ſavon blanc, ſont:

Les jaunes, jonquilles, citrons, orangés, & toutes les nuances qui tirent ſur le jaune.

Toutes les nuances du verd, depuis le verd-jaune ou naiſſant juſqu'au verd de chou ou de perroquet.

Les rouges de garance.

Les couleurs de canelle, de tabac d'eſpagne & autres ſemblables.

Cette

Cette épreuve fera exactement connoître ſi les jaunes & les nuances qui en dérivent ſont de bon ou de mauvais teint: car elle emportera la plus grande partie de leur couleur, s'ils ſont faits avec la graine d'avignon, le rocou, la terra-merita, le fuſtet & le ſafran bâtard, qui ſont de fauſſes couleurs pour la laine. Mais elle n'altérera point les jaunes faits avec la ſarrette, la geneſtrole, le bois jaune, la gaude & le fenugrec.

La même épreuve fera auſſi connoître avec préciſion la bonté des couleurs vertes, en ce que celles de mauvais teint s'effaceront preſque tout à fait, ou deviendront bleues, ſi elles ont eu un pied de paſtel ou d'indigo; au lieu que celles de bon teint ne perdront preſque rien de leurs nuances & reſteront vertes.

Les rouges de pure garance ne perdront rien dans l'épreuve avec le ſavon & n'en deviendront que plus beaux; mais, ſi l'on y a mêlé du breſil, ils perdront de leur couleur, à proportion de la quantité qu'on en aura mis.

Les couleurs de canelle, de tabac d'eſpagne & autres ſemblables ne ſeront preſque pas altérées par cette épreuve, ſi elles ſont de bon teint: mais elles perdront beaucoup, ſi l'on y a employé le rocou, le fuſtet ou la bourre garancée.

L'épreuve avec l'alun ne ſeroit d'aucune utilité & pourroit même induire en erreur ſur pluſieurs couleurs de cette ſeconde claſſe: car elle n'endommagera pas la teinture de fuſtet ni celle de rocou, qui cependant ne réſiſtent point à l'action de l'air; & elle emportera une partie de la ſarrete & de la geneſtrole, qui ſont pourtant de très-bons jaunes & de très-bons verds.

Epreuve de la troiſiéme claſſe.

Les couleurs qui doivent être éprouvées avec le tartre rouge ſont tous les fauves ou couleurs de racine, qui ne ſont pas dérivés des couleurs primitives. Ces couleurs de racine ſe font avec le brou de noix, la racine de noyer, l'écorce d'aulne, le ſumac ou le roudon, le bois de ſantal & la ſuye de cheminée. Chacun de ces ingrédiens don-

ne un grand nombre de nuances différentes, qui ſont toutes compriſes ſous le genre de fauves ou couleurs de racine.

Les ingrédiens que je viens de nommer ſont bons, à l'exception du bois de ſantal & de la ſuye qui le ſont un peu moins, & qui rudiſſent la laine lorſqu'on en met trop. Ainſi tout ce que l'épreuve avec le tartre doit faire connoître ſur ces ſortes de couleurs, c'eſt ſi elles ont été ſurchargées de l'une de ces deux drogues. Dans ce cas, elles perdront conſidérablement: mais elles réſiſteront beaucoup davantage, ſi elles ont été faites avec les autres ingrédiens, ou s'il n'y a qu'une médiocre quantité de ſantal ou de ſuye.

Exception pour la teinture de laine en noir.

Le noir eſt la ſeule couleur qui ne puiſſe être compriſe dans aucune des trois claſſes énoncées ci-deſſus, parce qu'il eſt néceſſaire de ſe ſervir d'une épreuve beaucoup plus active pour connoître ſi la laine ou l'étoffe a eu le pied de bleu convenable.

Pour en faire l'épreuve, prenez une livre d'eau, dans laquelle vous mettrez une once, poids de marc, d'alun de rome, & autant de tartre rouge, tous deux pulvériſés: faites bouillir le tout, & alors mettez-y l'échantillon, & laiſſez-l'y bouillir à gros bouillons l'eſpace d'un quart d'heure. Lavez-le enſuite dans l'eau fraîche, & vous verrez alors s'il a eu le pied de bleu convenable: car, dans ce cas, ſa couleur deviendra d'un bleu preſque noir, ſinon elle griſera beaucoup.

Cette épreuve fera connoître ſi les étoffes noires, après avoir eu un pied de bleu ſuffiſant, ont été mal noircies, défaut provenant de ce que le Teinturier aura épargné la noix de galle: auquel cas l'échantillon perdra preſque tout ſon noir & deviendra bleu.

Ainſi que pour la bruniture.

Comme il eſt d'uſage de brunir quelquefois les couleurs avec la noix de galle & la couperoſe, & que cette opération, que les Teinturiers appellent *bruniture* & qui peut être permiſe dans le bon teint, peut faire un effet particulier dans l'épreuve de ces couleurs, il faut obſerver que, quoiqu'après l'épreuve le bouillon paroiſſe chargé de teinture, parce que la bruniture aura été emportée, l'échantillon cependant n'en ſera pas moins de bon teint, s'il a conſervé ſon fond: mais, s'il le perd

perd au contraire, ce ſera une marque qu'il eſt de faux teint. Ainſi, ce n'eſt pas ſur la couleur du bouillon de l'épreuve qu'il faut juger de la bonne ou mauvaiſe qualité de la teinture qui aura été brunie, mais ſur le pied de couleur qui reſtera après l'épreuve.

Quoique la bruniture qui ſe fait avec la noix de galle & la couperoſe ſoit de bon teint, comme elle rudit la laine, le mieux ſeroit que les Teinturiers ſe ſerviſſent par préférence de la cuve d'inde ou de celle de paſtel.

Et pour les gris communs.

On ne peut ſoumettre à aucune épreuve les gris communs faits avec la noix de galle & la couperoſe, parce que ces couleurs ne ſe font pas autrement, pourvû que le Teinturier obſerve de les engaller d'abord & de mettre la couperoſe dans un ſecond bain beaucoup moins chaud que le premier: car, de cette maniere, ils ſont plus beaux & plus aſſurés.

Epreuve des teintures en ſoie.

Tout ce que j'ai dit juſqu'à préſent ne regarde que les épreuves des laines teintes; celles des ſoies doivent ſe faire différemment, ſoit par rapport aux couleurs, ſoit à l'égard de la proportion des ingrédiens. Voici de quelle maniere il faut procéder.

Par rapport aux couleurs, il faut diſtinguer dans l'épreuve des ſoies, les couleurs de cramoiſi, des couleurs communes.

L'épreuve des premieres doit être faite premiérement pour le rouge & le violet cramoiſi avec de l'alun du poids de la ſoie, & pour l'écarlate cramoiſi avec du ſavon blanc approchant auſſi le poids de la ſoie. Ces ingrédiens ayant été jettés dans l'eau claire quand elle commencera à bouillir, mettez-y enſuite l'échantillon de ſoie dont vous voudrez faire l'épreuve & faites bouillir le tout environ un demi-quart d'heure.

Si la teinture en eſt fauſſe, le bouillon de la ſoie rouge cramoiſi ſera violet pour marque qu'elle aura été teinte avec de l'orſeille. Et s'il eſt fort rouge, cela prouvera qu'elle l'a été avec le breſil. Pour l'écarlate cramoiſi, s'il y a du rocou, le bouillon en deviendra comme couleur d'aurore; & s'il y a du breſil, il ſera rouge. Enfin, quant au vio-

violet cramoiſi, s'il y a du breſil ou de l'orſeille, le bouillon ſera d'une couleur tirant ſur le rouge. Mais, ſi au contraire ces trois cramoiſis ſont de bonne teinture, leur bouillon aura très-peu de changement.

A l'égard des autres couleurs qui ne ſont point cramoiſi, & que l'on appelle *couleurs communes*; pour connoître ſi elles ont eu trop de noix de galle, ce qui eſt un défaut, il faut mettre la ſoie dans de l'eau claire & bouillante, avec du ſavon blanc ou de la cendre gravelée, environ du poids de la ſoie; & après un bouillon, on en retirera la ſoie.

Si cette ſoie a été ſurchargée de noix de galle, toute la couleur s'en perdra, & celle qui lui reſtera, ne ſera plus qu'une eſpece de couleur de bois ou de feuille-morte qui ſera la teinture de la noix de galle.

On peut faire encore cette épreuve d'une autre maniere, en mettant la ſoie dans de l'eau bouillante, avec un peu plus que le quart d'une bouteille de jus de citron; après quoi on retirera la ſoie, on la lavera dans l'eau froide, puis on la paſſera dans la teinture noire. Si la ſoie a été engallée, elle deviendra noire: ſinon elle ſe trouvera d'une couleur de pain bis ou de triſtamie. Mais il eſt ſi difficile, comme j'ai déja dit, de s'aſſurer parfaitement du degré d'acidité du jus de citron, qu'il ſera toujours plus certain de préférer la premiere épreuve à celle-ci.

Exception pour les ſoies teintes en noir.

Les ſoies teintes en noir ne ſont pas compriſes dans ce que je viens de dire; & pour connoître ſi elles n'ont pas été trop engallées ou chargées de limaille de fer & de moulée des taillandiers, qui ſont de mauvais ingrédiens, l'épreuve s'en doit faire dans de l'eau ſimple avec deux fois autant peſant de ſavon blanc que de ſoie; & après un bouillon, ſi l'on voit qu'elle devienne rougeâtre, c'eſt une marque qu'elle a été trop engallée ou ſurchargée de ces mauvaiſes drogues: ſans quoi cette eau conſerveroit ſa couleur.

Le coton & le fil, les étoffes & les toiles teintes qui en ſont faites, ne ſont ſuſceptibles d'aucune épreuve, parce que ne pouvant ſupporter les fraix d'une teinture fine, leurs couleurs ne ſont point à l'épreuve.

# MÉMOIRES
DE
# L'ACADÉMIE ROYALE
DES
# SCIENCES
ET
# BELLES-LETTRES.

---

*CLASSE*
*DE MATHÉMATIQUE.*

# MÉTHODE

## POUR PORTER LES VERRES OBJECTIFS DES LUNETTES À UN PLUS HAUT DEGRÉ DE PERFECTION.

PAR M. L. EULER.

1.

Dans le XIII^e Volume des Mémoires de l'Académie j'avois déjà avancé le ſentiment dont les expériences faites en Angleterre par M. Dollond m'ont fourni dernierement une preuve bien éclatante; c'eſt que, pour éviter le défaut de la diſperſion des couleurs, cauſée par la différente refrangibilité des rayons, il ſuffit de former les verres de telle ſorte que la confuſion cauſée par leur ouverture ſoit réduite à rien. En effet, j'avois déjà remarqué alors, que pourvu qu'on n'eût rien à craindre de la part de cette confuſion, il eſt toujours poſſible d'arranger les verres de façon que l'effet produit par la différente refrangibilité des rayons devienne inſenſible. Ce n'eſt pas que les dernieres images, formées par les rayons de différentes couleurs qui conſtituent l'objet immédiat de la viſion, ſoient réunies dans une ſeule; ce qui eſt abſolument impoſſible en n'employant que la même matiere refringente: mais il s'agit de diſpoſer ces images, R*r*, M*m*, V*v*, (dont la premiere R*r* eſt celle des rayons rouges, & V*v* celle des violets) de maniere que la droite *vr*, tirée par leurs extrémités, paſſe par la Planche II. Fig. 1.

prunelle de l'œil en O: ou que toutes ces images ſoient vues ſous le même angle MO*m*. Car alors, puiſque les rayons des extrémités *r*, *m*, *v* ſont preſque confondus dans un ſeul, ils repréſenteront à l'œil la couleur naturelle de l'objet, dont par conſéquent l'apparence ne ſera pas troublée par les couleurs d'iris, comme il arriveroit dans toute autre diſpoſition de ces images. Or, pourvu qu'on emploie plus de deux verres, il eſt toujours poſſible de les arranger de maniere qu'une telle ſituation des images en réſulte.

2. Cependant on ne ſauroit diſconvenir que les différentes diſtances de ces images R*r* & V*v* de l'œil ne produiſent quelque confuſion, attendu que chaque œil exige une certaine diſtance pour voir diſtinctement les objets; de ſorte que ſi l'image moyenne M*m* ſe trouve à cette diſtance ajuſtée à la nature de l'œil, l'image R*r* eſt trop proche & l'autre V*v* trop éloignée. Mais la confuſion qui en naît ſera toujours fort petite, & d'une toute autre nature que celle dont on ſe plaint ordinairement, où les objets paroiſſent bordés des couleurs d'iris. Toutefois il ſeroit bien à ſouhaiter qu'on pût délivrer auſſi les lunettes de cette légere confuſion, cauſée par la diſtance entre les images des différentes couleurs; mais j'ai déjà remarqué qu'en employant diverſes matieres refringentes, ce qui eſt le ſeul moyen de parvenir à ce but dans la Dioptrique, on tombe dans un autre inconvénient, puiſque les objectifs propres à ce deſſein ne ſeroient pas ſuſceptibles d'une auſſi grande ouverture que la clarté de la viſion l'exige: ou bien il faudroit admettre une trop grande diſtance de foyer. Outre cela, à moins qu'on ne demande un très grand groſſiſſement, la confuſion mentionnée n'eſt d'aucune conſéquence, puiſque chaque œil eſt accoûtumé à voir aſſez diſtinctement à des diſtances très différentes. Mais, ſi l'on vouloit procurer un très grand groſſiſſement, qui multipliât le diametre des objets 200 fois & davantage, il ne ſeroit pas inutile de donner tous ſes ſoins à conſtruire un objectif rempli d'eau, où tant la diſperſion des couleurs que la confuſion de l'ouverture ſeroient entiérement anéanties, ſuivant les regles & les meſures que mon Fils a déterminées; & une telle lunette auroit toujours de très grands avantages.

3. Or

3. Or je m'arrêterai ici aux Lunettes dont tous les verres ont le même degré de refraction, la différence entre les diverſes eſpeces de verre étant trop petite pour qu'on en pût tirer quelque avantage, comme je l'ai fait voir dans un Diſcours précédent ſur cette matiere: j'y ai inconteſtablement prouvé, que tous les avantages que M. Dollond prétend avoir retirés de deux différentes eſpeces de verre, réſultent d'un principe tout à fait différent, & peuvent être procurés en n'employant que la même eſpece de verre. Tout revient à former les verres de telle ſorte que la confuſion qui tire ſon origine de l'ouverture des verres ſoit anéantie: & cette condition eſt abſolument néceſſaire, pour qu'on puiſſe exécuter l'arrangement des images rapporté ci-deſſus, qui rend inſenſible la diſperſion des couleurs. Dans un Mémoire précédent que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Académie, j'ai donné la conſtruction de ſemblables objectifs, qui étoient compoſés de deux verres joints immédiatement enſemble, où j'ai négligé leur épaiſſeur, comme il eſt toujours permis de le faire, à moins que les verres ne ſoient fort épais. Cependant, comme une double épaiſſeur porroit devenir de quelque conſéquence, & qu'il n'eſt pas bon par d'autres raiſons de joindre ces deux verres aſſez près enſemble pour qu'ils ſe touchent, j'ai cru qu'il ſeroit utile d'appliquer les mêmes recherches au cas où les deux verres qui conſtituent l'objectif ſont éloignés à quelque diſtance l'un de l'autre; ce qui non ſeulement ſervira à perfectionner la conſtruction précédente, en mettant cette diſtance fort petite, mais encore produira cet avantage, qu'on pourra dans chaque cas déterminer cette diſtance de façon qu'elle contribue à perfectionner les lunettes à d'autres égards, en augmentant le champ apparent, ou en les racourciſſant davantage.

4. Le principe d'où l'on doit tirer cette recherche & d'autres ſemblables, eſt contenu dans la propoſition ſuivante, que je me contente de rapporter ici ſans l'analyſe qui y conduit. Soit AB un verre convexe des deux côtés; le rayon de ſa face $A\alpha B = a$, & de l'autre $A\beta B = b$, ces deux faces étant ſuppoſées parfaitement ſphériques. Fig. 1

Soit de plus $m : 1$ la raiſon de refraction de l'air dans ce verre, laquelle eſt eſtimée comme $1,55 : 1$ pour le verre le plus refringent & les rayons moyens. Cela poſé, ſi l'on conçoit un point lumineux F dans l'axe de ce verre à la diſtance $aF = f$, dont les rayons paſſent par le verre en $m$, & que la diſtance de ce point $m$ à l'axe du verre ſoit $mp = x$, ces rayons après la refraction ſe réuniront avec l'axe en G, en ſorte que poſant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$, on ait:

$$\frac{1}{bG} = \frac{m-1}{p} - \frac{1}{f} + \frac{(m-1)xx}{2m}\left(\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{f}\right)\left(\frac{m+2}{a}+\frac{3m+2}{f}\right) - \frac{m}{pp}\left(\frac{2m+1}{a} + \frac{3m+1}{f}\right) + \frac{m^3}{p^3}\right);$$

ou bien, ſi nous poſons de plus pour abréger $\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{r}$, de ſorte que nous ayons $\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{f}$ & $\frac{1}{b} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{f}$, nous aurons:

$$\frac{1}{bG} = \frac{m-1}{p} - \frac{1}{f} + \frac{(m-1)xx}{2m}\left(\frac{1}{pr}\left(\frac{m+2}{r} + \frac{2m}{f}\right) - \frac{m}{pp}\left(\frac{2m+1}{r} + \frac{m}{f}\right) + \frac{m^3}{p^3}\right);$$

ou bien:

$$\frac{1}{bG} = \frac{m-1}{p} - \frac{1}{f} + \frac{(m-1)xx}{2mp}\left(\frac{m+2}{rr} + \frac{2m}{fr} - \frac{m(2m+1)}{pr} - \frac{mm}{fp} + \frac{m^3}{p^2}\right).$$

Donc, ſi $x$ exprime le demi-diametre de l'ouverture du verre, les rayons qui paſſent par l'extrémité de l'ouverture repréſenteront l'image de l'objet en G, qui ſera différente de celle que les rayons qui paſſent

ſent par le milieu du verre en $a$ repréſentent. C'eſt de là que naît la confuſion relative à l'ouverture des verres, qu'il s'agit de faire évanouir.

5. Comme il eſt impoſſible de faire évanouir cette confuſion en n'employant qu'un ſeul verre AB, plaçons derriere celui-ci ſur le même axe un autre verre CD à la diſtance $bc = e$, & nommons le rayon de convexité de ſa face de devant $CcD = c$ & de ſa face de derriere $C\cdot D = d$; où il faut remarquer que, ſi quelque face étoit concave, le rayon de courbure ſeroit négatif. Maintenant je me propoſe de déterminer ces deux verres de maniere qu'il n'en réſulte aucune confuſion dans l'image qui ſera repréſentée par tous les deux. D'abord donc, puiſqu'il s'agit des objectifs de lunettes, la diſtance de l'objet devant le verre AB, que je viens de poſer $= f$, ſera infinie, & partant $\frac{1}{f} = 0$; donc $\frac{1}{r} = \frac{1}{a}$ ou $r = a$ & $\frac{1}{b} = \frac{1}{p} - \frac{1}{a}$. Fig. 3.

Donc, poſant le demi-diametre de l'ouverture de ce verre $= x$, par ce ſeul verre l'image ſera repréſentée en G, de ſorte que

$$\frac{1}{bG} = \frac{m-1}{p} + \frac{(m-1)xx}{2mp}\left(\frac{m+2}{aa} - \frac{m(2m+1)}{ap} + \frac{m^3}{pp}\right).$$

Mais il faut que ces mêmes rayons, en paſſant par l'autre verre CD, repréſentent la ſeconde image en H, en ſorte que la diſtance $d\mathrm{H} = h$ ſoit indépendante de l'ouverture des verres, ou bien on pourra regarder l'image en H comme un objet dont l'image repréſentée par le ſeul verre CD doit tomber au même point G que nous venons de déterminer. On n'a donc qu'à renverſer le cas, & poſer $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{q}$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{h} = \frac{1}{s}$; de ſorte que $\frac{1}{d} = \frac{1}{s} - \frac{1}{h}$ & $\frac{1}{c} = \frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{1}{h}$, & nommant le demi-diametre de l'ouverture du verre

CD

$CD = y$, puiſque le lieu de l'image G tient une ſituation contraire, nous aurons: -

$$\frac{-1}{cG} = \frac{m-1}{q} - \frac{1}{h} + \frac{(m-1)yy}{2mq}\left(\frac{m+2}{ss} + \frac{2m}{hs} - \frac{m(2m+1)}{qs} - \frac{mm}{hq} + \frac{m^3}{qq}\right);$$

où il faut remarquer que les ouvertures de ces deux verres tiennent un tel rapport entr'elles que $x : y = bG : cG$, ou bien ſi nous nommons $bG = g$, nous aurons $x : y = g : g - e$.

6. Poſons pour abréger:

$$\frac{m-1}{2mp}\left(\frac{m+2}{aa} - \frac{m(2m+1)}{ap} + \frac{m^3}{pp}\right) = P \quad \&$$

$$\frac{m-1}{2mq}\left(\frac{m+2}{ss} + \frac{2m}{hs} - \frac{m(2m+1)}{qs} - \frac{mm}{hq} + \frac{m^3}{qq}\right) = Q,$$

& ayant nommé $bG = g$, nous aurons ces deux équations:

$$\frac{1}{g} = \frac{m-1}{p} + Pxx \quad \& \quad \frac{-1}{g-e} = \frac{m-1}{q} - \frac{1}{h} - Qyy,$$

qui doivent également ſubſiſter, quelque grande que ſoit l'ouverture des verres. D'abord donc, poſant $x = o$ & $y = o$, nous aurons $\frac{1}{g} = \frac{m-1}{p}$ & $\frac{1}{g-e} = \frac{1}{h} - \frac{(m-1)}{q}$, d'où nous tirons le rapport

$$x : y = g : g - e = \frac{1}{g-e} : \frac{1}{g} = \frac{1}{h} - \frac{(m-1)}{q} : \frac{m-1}{p}.$$

Enſuite, pour éliminer la diſtance $g$, renverſons nos deux équations:

$$g = \frac{1}{\frac{m-1}{p} + Pxx} = \frac{p}{m-1} - \frac{Ppp\,xx}{(m-1)^3},$$

$e-g$

$$e-g=\frac{1}{\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}+Qyy}=\frac{1}{\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}}-\frac{Qyy}{\left(\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}\right)^2},$$

& nous aurons:

$$e=\frac{p}{m-1}+\frac{1}{\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}}-\frac{Ppp\,xx}{(m-1)^2}-\frac{Qyy}{\left(\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}\right)^2}.$$

D'abord donc il faut qu'il ſoit $e=\frac{p}{m-1}+\frac{hq}{(m-1)h-q}$,

& enſuite $\frac{Ppp\,xx}{(m-1)^2}+\frac{Qyy}{\left(\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}\right)^2}=o$, ou puiſque

$\frac{m-1}{p}:\frac{1}{h}-\frac{(m-1)}{q}=y:x$, nous aurons $\frac{P\,xx}{yy}+\frac{Q\,yy}{xx}=o$,

ou bien $Px^4+Qy^4=o$, qui ſe réduit à celle-ci:

$$P\left(\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}\right)^4+\frac{(m-1)^4}{p^4}Q=o \text{ ou } Q+P\left(\frac{p}{q}-\frac{p}{(m-1)h}\right)^4=o.$$

C'eſt donc de cette équation jointe à celle-ci: $e=\frac{p}{m-1}+\frac{hq}{(m-1)h-q}$, qu'il faut tirer la ſolution de notre probleme.

7. Subſtituons au lieu de P & Q leurs valeurs ſuppoſées, & en diviſant par $\frac{m-1}{2m}$, notre ſeconde équation prendra cette forme:

$$\frac{1}{q}\left(\frac{m+2}{ss}+\frac{2m}{hs}-\frac{m(2m+1)}{qs}-\frac{mm}{hq}+\frac{m^3}{qq}\right)$$

$$+p^3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{(m-1)h}\right)^4\left(\frac{m+2}{aa}-\frac{m(2m+1)}{ap}+\frac{m^3}{pp}\right)=o,$$

ou bien celle-ci:

$$\frac{m+2}{ss}+\frac{2m}{hs}-\frac{m(2m+1)}{qs}-\frac{mm}{hq}+\frac{m^3}{qq}+p^3q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{(m-1)h}\right)^4\left(\frac{m+2}{aa}-\frac{m(2m+1)}{ap}+\frac{m^3}{pp}\right)=0,$$

d'où l'on peut aiſément tirer la valeur de $s$, ou bien celle de $a$. On pourra donc prendre à volonté, premierement les diſtances $bc=e$ & $d\mathrm{H}=h$: enſuite la valeur de $p$, ou celle de $q$, ou bien leur rapport mutuel, d'où l'une ou l'autre ſera déterminée par la premiere équation $e=\frac{p}{m-1}+\frac{hq}{(m-1)h-q}$. Enfin, prenant $a$ à volonté, l'autre équation nous donnera la valeur de $s$, ou réciproquement: où il faut prendre garde que les racines de l'équation quarrée deviennent réelles. Or, ayant trouvé toutes ces valeurs, la forme de nos deux verres ſe tirera des formules ſuivantes:

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{p}-\frac{1}{a};\quad \frac{1}{c}=\frac{1}{q}-\frac{1}{s}+\frac{1}{h}\quad\&\quad\frac{1}{d}=\frac{1}{s}-\frac{1}{h},$$

où il faut ſe ſouvenir que

pour le verre AB, le rayon de ſa face $\begin{cases}\text{de devant eſt}=a\\ \text{de derriere eſt}=b\end{cases}$.

pour le verre CD, le rayon de ſa face $\begin{cases}\text{de devant eſt}=c\\ \text{de derriere eſt}=d.\end{cases}$

Le plus petit de ces quatre rayons, rapporté à la valeur de $x$ ou $y$, donnera l'ouverture dont ces verres ſont ſuſceptibles, en faiſant en ſorte que l'ouverture n'embraſſe aucun arc qui ſurpaſſe 20° environ. Pour cet effet il faut remarquer que $y=x-\frac{(m-1)ex}{p}$.

8. Pour développer ces équations, conſidérons la diſtance de foyer derriere le ſecond verre CD, qui eſt $d\mathrm{H}=h$ comme donnée,

née, & posons la distance des verres $bc = e = \frac{h}{\epsilon}$. Soit ensuite $\frac{q}{m-1} = \frac{h}{1-\mu}$, & la premiere équation donne $\frac{h}{\epsilon} = \frac{p}{m-1} - \frac{h}{\mu}$, & partant $\frac{p}{m-1} = h\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\mu}\right)$. De là nous aurons $\frac{1}{q} - \frac{1}{(m-1)h} = -\frac{\mu}{(m-1)h}$ & $p^2 q = \frac{(m-1)^4}{1-\mu}\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\mu}\right)^3 h^4$,

donc $p^3 q \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{(m-1)h}\right)^4 = \frac{\mu^4}{1-\mu}\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\mu}\right)^3$,

& $y = x\left(1 - \frac{\mu}{\epsilon - \mu}\right) = \frac{\epsilon x}{\epsilon + \mu}$, ou $x : y = \epsilon + \mu : \epsilon$.

Posons de plus $a = \frac{p}{\alpha} = \frac{(m-1)h}{\alpha}\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\mu}\right)$, pour avoir $\frac{m+2}{aa} - \frac{m(2m+1)}{ap} + \frac{m^3}{pp} = \frac{1}{pp}(aa(m+2) - am(2m+1) + m^3)$, &

$$p^3 q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{(m-1)h}\right)^4\left(\frac{m+2}{aa} - \frac{m(2m+1)}{ap} + \frac{m^3}{pp}\right) = \frac{\mu^4\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\mu}\right)}{(m-1)^2(1-\mu)hh}$$
$$(aa(m+2) - am(2m+1) + m^3),$$

ce qui est le second membre de notre équation. Posons outre cela $s = \frac{(m-1)h}{\omega}$, & le premier membre prendra cette forme:

$$\frac{1}{(m-1)^2 hh}((m+2)\omega\omega - 3m\omega + \mu m(2m+1)\omega + (1-\mu)mm - \mu(1-\mu)m^3),$$

& notre équation entiere sera:

$$(m+2)\omega\omega - 3m\omega + \mu m(2m+1)\omega + (1-\mu)mm - \mu(1-\mu)m^3$$

$$+\frac{\mu^3(\epsilon+\mu)}{\epsilon(1-\mu)}(\alpha\alpha(m+2)-\alpha m(2m+1)+m^3)=0.$$

Après la réſolution de cette équation, les rayons des faces de nos deux verres ſeront:

$$a=\frac{(m-1)(\epsilon+\mu)h}{\alpha\epsilon\mu};\quad b=\frac{(m-1)(\epsilon+\mu)h}{(1-\alpha)\epsilon\mu}$$

$$c=\frac{(m-1)h}{m-\mu-\omega}\quad\&\quad d=\frac{(m-1)h}{1-m-\omega},$$

où il faut remarquer, que ſi nous poſions $\epsilon=\infty$, nous aurions le cas traité auparavant où les deux verres ſont immédiatement joints enſemble.

9. Poſons pour abréger $\frac{\mu^3(\epsilon+\mu)}{\epsilon(1-\mu)}=M$, &

$$\frac{3m}{m+2}=A;\quad\frac{m(2m+1)}{m+2}=B;\quad\frac{mm}{m+2}=C;\quad\frac{m^3}{m+2}=D,$$

& nous aurons cette équation à réſoudre:

$$\omega\omega=A\omega-\mu B\omega-(1-\mu)C+\mu(1-\mu)D-M(\alpha\alpha-\alpha B+D),$$

d'où nous tirons:

$$\omega=\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\mu B\pm\sqrt{\begin{matrix}\tfrac{1}{4}AA-\tfrac{1}{2}\mu AB+\tfrac{1}{4}\mu\mu BB-M(\alpha\alpha-\alpha B+D),\\ -C+\mu C-\mu\mu D\\ +\mu D\end{matrix}}$$

qui ſe réduit à cette forme:

$$\omega=\frac{A-\mu B}{2}\pm\sqrt{\frac{-mm}{4(m+2)^2}((4m-1)(1-\mu)^2-4\mu(m-1)^2)-M(\alpha\alpha-\alpha B+D)}.$$

Soit donc de plus: $\frac{mm(4m-1)}{4(m+2)^2}=E$, & $\frac{mm(m-1)^2}{(m+2)^2}=F$,

afin qu'il devienne:

$$\omega=$$

$$\omega = \frac{A - \mu B}{2} \pm \sqrt{(\mu F - (1-\mu)^2 E - M(\alpha\alpha - \alpha B + D))}.$$

Les lettres A, B, C, D, E & F, dépendent donc de la refraction de l'air dans le verre, laquelle n'étant pas la même pour toutes les eſpeces de verre, développons-en les valeurs pour les cas principaux:

| | I | II | III | IV | V | VI |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,500000 | 1,510000 | 1,520000 | 1,530000 | 1,540000 | 1,550000 |
| $A =$ | 1,285714 | 1,290598 | 1,295455 | 1,300254 | 1,305085 | 1,309859 |
| $B =$ | 1,714286 | 1,729402 | 1,744545 | 1,759717 | 1,774915 | 1,790141 |
| $C =$ | 0,642857 | 0,649601 | 0,656364 | 0,663144 | 0,669943 | 0,676765 |
| $D =$ | 9,964286 | 0,980897 | 0,997673 | 1,014611 | 1,031713 | 1,048978 |
| $E =$ | 0,229592 | 0,233190 | 0,236813 | 0,240463 | 0,244132 | 0,247827 |
| $F =$ | 0,045918 | 0,048137 | 0,050420 | 0,052770 | 0,055185 | 0,057668 |

Or, ſi l'on joint à un tel objectif un oculaire dont la diſtance de foyer eſt $= r$, les objets ſeront groſſis en diametre tant $\frac{h(\varepsilon + \mu)}{\varepsilon r}$ de fois. De là il eſt aiſé d'appliquer cette ſolution à toutes ſortes de cas qu'on jugera convenables pour la pratique; j'en examinerai quelques uns.

10. Suppoſons $\mu = 3$ & $\alpha = \frac{1}{2}$, pour que le premier verre devienne également convexe des deux côtés, & nous aurons:

$$\omega = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{3}{8}B \pm \sqrt{\left(3F - 4E + \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}B + D\right)},$$

donc, ſelon nos 6 hypotheſes:

I. $m = 1{,}50$; $\omega = -1{,}928572 \pm \sqrt{\left(-0{,}780614 + 0{,}357143 \cdot \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}$

II. $m = 1{,}51$; $\omega = -1{,}948804 \pm \sqrt{\left(-0{,}788349 + 0{,}366196 \cdot \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}$

III. $m = 1{,}52$; $\omega = -1{,}969090 \pm \sqrt{\left(-0{,}795992 + 0{,}375401 \cdot \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}$

IV. $m = 1{,}53; \omega = -1{,}989448 \pm \sqrt{\left(-0{,}803542 + 0{,}384752.\frac{27.(3+\epsilon)}{2\epsilon}\right)}$

V. $m = 1{,}54; \omega = -2{,}009830 \pm \sqrt{\left(-0{,}810973 + 0{,}394255.\frac{27(3+\epsilon)}{2\epsilon}\right)}$

VI. $m = 1{,}55; \omega = -2{,}030292 \pm \sqrt{\left(-0{,}818304 + 0{,}403907.\frac{27(3+\epsilon)}{2\epsilon}\right)}$

& enſuite pour les rayons des faces:

$$a = b = \frac{2(m-1)(\epsilon+3)}{3\epsilon}h;\ c = \frac{(m-1)h}{m-3-\omega};\ d = \frac{(m-1)h}{1-m+\omega}.$$

Soudiviſons ce cas ſelon les diverſes valeurs de $\epsilon$, & pour cet effet enveloppons dans les derniers membres la fraction $\frac{27}{2}$, & nous aurons:

I. $m = 1{,}50; \omega = -1{,}928572 \pm \sqrt{\left(-0{,}780614 + 4{,}821430.\frac{3+\epsilon}{\epsilon}\right)}$

II. $m = 1{,}51; \omega = -1{,}948804 \pm \sqrt{\left(-0{,}788349 + 4{,}943646.\frac{3+\epsilon}{\epsilon}\right)}$

III. $m = 1{,}52; \omega = -1{,}969090 \pm \sqrt{\left(-0{,}795992 + 5{,}067914.\frac{3+\epsilon}{\epsilon}\right)}$

IV. $m = 1{,}53; \omega = -1{,}989448 \pm \sqrt{\left(-0{,}803542 + 5{,}194152.\frac{3+\epsilon}{\epsilon}\right)}$

V. $m = 1{,}54; \omega = -2{,}009830 \pm \sqrt{\left(-0{,}810973 + 5{,}322442.\frac{3+\epsilon}{\epsilon}\right)}$

VI. $m = 1{,}55; \omega = -2{,}030292 \pm \sqrt{\left(-0{,}818304 + 5{,}452745.\frac{3+\epsilon}{\epsilon}\right)}$

## I. Cas.

11. Poſons $\epsilon = 30$, de ſorte que la diſtance des verres ſoit $bc = e = \frac{1}{30}h$, & $a = b = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{11}(m-1)h$ & $x : y = 11 : 10$, d'où nous aurons pour nos ſix hypotheſes:

I. $m$

I. $m = 1{,}50$; $\omega = -1{,}928572 \pm \sqrt{4{,}522959} = 0{,}198153$
II. $m = 1{,}51$; $\omega = -1{,}948804 \pm \sqrt{4{,}649661} = 0{,}207503$
III. $m = 1{,}52$; $\omega = -1{,}969090 \pm \sqrt{4{,}778713} = 0{,}216937$
IV. $m = 1{,}53$; $\omega = -1{,}989448 \pm \sqrt{4{,}910025} = 0{,}226410$
V. $m = 1{,}54$; $\omega = -2{,}009830 \pm \sqrt{5{,}043713} = 0{,}235991$
VI. $m = 1{,}55$; $\omega = -2{,}030292 \pm \sqrt{5{,}179715} = 0{,}245606$,

d'où l'on formera ainſi le reſte du calcul :

| | I | II | III | IV | V | VI |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,500000 | 1,510000 | 1,520000 | 1,530000 | 1,540000 | 1,550000 |
| $\omega =$ | 0,198153 | 0,207503 | 0,216937 | 0,226410 | 0,235991 | 0,245606 |
| $m-\omega =$ | 1,301847 | 1,302497 | 1,303063 | 1,303590 | 1,304009 | 1,304394 |
| $m-\omega-3 =$ | -1,698153 | -1,697503 | -1,696937 | -1,696410 | -1,695991 | -1,695606 |
| $1-m+\omega =$ | -0,301847 | -0,302497 | -0,303063 | -0,303590 | -0,304009 | -0,304394 |
| $l(m-1) =$ | 9,6989700 | 9,7075702 | 9,7160033 | 9,7242759 | 9,7323938 | 9,7403627 |
| $l(m-3-\omega) =$ | 0,2299769 | 0,2298106 | 0,2296657 | 0,2295309 | 0,2294255 | 0,2293249 |
| $l(1-m+\omega) =$ | 9,4797869 | 9,4807211 | 9,4815329 | 9,4822875 | 9,4828865 | 9,4834361 |
| $l\frac{-c}{h} =$ | 9,4689931 | 9,4777596 | 9,4863376 | 9,4947450 | 9,5029683 | 9,5110378 |
| $l\frac{-d}{h} =$ | 0,2191831 | 0,2268491 | 0,2344704 | 0,2419884 | 0,2495073 | 0,2569266 |
| $a = b =$ | 0,366667 $h$ | 0,374000 $h$ | 0,381333 $h$ | 0,388667 $h$ | 0,396000 $h$ | 0,403333 $h$ |
| $c =$ | -0,294437 $h$ | 0,300441 $h$ | 0,306434 $h$ | 0,312424 $h$ | 0,318396 $h$ | 0,324368 $h$ |
| $d =$ | -1,656468 $h$ | 1,685967 $h$ | 1,715815 $h$ | 1,745776 $h$ | 1,776263 $h$ | 1,806868 $h$. |

Le diametre de l'ouverture de ces verres ſera déterminé par le rayon $c$ comme le plus petit ; & ſi on le met égal à la troiſieme partie du rayon $c$, le plus grand arc dans l'ouverture ſera de 19°, qui ne ſemble pas être trop grand : or, poſant $2y = \frac{1}{3}c$, on aura $2x = \frac{11}{30}c$, ou bien on donnera

au premier verre AB une ouverture de $\frac{11}{30}c$ &

au

au ſecond verre CD une ouverture de $\frac{1}{3}c$ en diametre, & cette ouverture exprimée en pouces ſuffit pour groſſir les objets $\frac{11}{3}h$ fois en diametre.

Or l'intervalle entre les deux verres doit être mis $= \frac{1}{30}h$. Le premier verre AB qui regarde l'objet ſera donc également convexe des deux côtés, & l'autre CD concave, mais inégalement. Là-deſſus je fais les remarques ſuivantes:

I. Si nous avions poſé la diſtance des verres $bc = o$, comme j'ai fait dans un Mémoire précédent, nous aurions trouvé les rayons pour les hypotheſes $m = 1{,}50$; $1{,}53$; $1{,}55$ de la maniere ſuivante:

| | $m = 1{,}50$ | $m = 1{,}53$ | $m = 1{,}55$ |
|---|---|---|---|
| $a = b =$ | $0{,}333333h$ | $0{,}353333h$ | $0{,}366666h$ |
| $c = -$ | $0{,}316134h$ | $0{,}336305h$ | $0\ 349762h$ |
| $d = -$ | $1{,}192297h$ | $1{,}249850h$ | $1{,}286544h$. |

II. Afin que nous puiſſions mieux comparer ces rayons avec ceux que nous venons de trouver pour l'intervalle $bc = \frac{1}{30}h$, augmentons-les en raiſon de 10 : 11 pour rendre le premier verre AB le même de part & d'autre, & nous aurons pour l'intervalle $bc = o$:

| | $m = 1{,}50$ | $m = 1{,}53$ | $m = 1{,}55$ |
|---|---|---|---|
| $a = b =$ | $0{,}366667$ | $0{,}388667$ | $0{,}403333$ |
| $c = -$ | $0{,}347747$ | $0{,}369935$ | $0{,}384738$ |
| $d = -$ | $1{,}311526$ | $1{,}374835$ | $1{,}415198$. |

III. De là il eſt clair que, ſuppoſant le premier verre AB donné, la petite diſtance que je mets entre les verres $bc = \frac{1}{30}h$, exige un changement très conſidérable dans le verre concave, le rayon de ſa face de devant devenant beaucoup plus petit, & celui de derriere d'autant plus grand. Et partant on ne doit pas être ſurpris, ſi les verres conſtruits ſuivant les meſures données pour le cas où l'intervalle $bc$ eſt $= o$, ne réuſſiſſent pas aſſez bien dans la pratique; puiſque la moindre diſtance qu'on eſt obligé de mettre entre les verres, demande une conſtruction aſſez différente.

IV.

IV. Un tel verre objectif, où l'intervalle entre les deux verres $bc$ eſt $= \frac{1}{30} h$, eſt repréſenté dans la figure 4^me^, dont le foyer tomberoit environ à la diſtance de 5 pouces, qui pourroit bien être employé à produire un groſſiſſement de 20 fois en diametre. Fig. 4.

V. Enfin on réuſſira d'autant plus ſûrement dans la conſtruction de ſemblables objectifs, pourvu que l'ouvrier ne s'écarte pas groſſierement des meſures preſcrites, qu'on peut déterminer par l'expérience le plus juſte intervalle entre les verres qui fait évanouir la confuſion. Or alors, ſi l'on veut produire une multiplication de M fois en diametre, il faut employer un verre oculaire dont la diſtance de foyer $= \frac{11\,h}{10\,M}$; donc, ſi $M = \frac{11}{3} h$, cette diſtance de foyer eſt $\frac{3}{110}$ pouce.

## II. Cas.

12. Mettons un plus grand intervalle entre les deux verres, & ſuppoſons cet intervalle $bc = \frac{1}{12} h$, où $h$ marque toujours la diſtance de foyer derriere le ſecond verre CD, de ſorte que $\epsilon = 12$ & $x : y = 15 : 12 = 5 : 4$, & pour le verre convexe $a = b = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} (m-1) h = \frac{5}{6} (m-1) h$. Or, pour abréger le calcul, il ſuffira de conſidérer trois hypotheſes de refraction $m = 1{,}51$; $m = 1{,}53$; & $m = 1{,}55$, puiſqu'il ſera toujours aiſé d'en conclure les déterminations pour toutes les autres qui pourroient avoir lieu dans le verre dont on ſe ſert. Nous aurons donc:

I. $m = 1{,}51$; $\omega = -1{,}948804 \pm \sqrt{}\, 5{,}391209 = 0{,}373093$

II. $m = 1{,}53$; $\omega = -1{,}989448 \pm \sqrt{}\, 5{,}689148 = 0{,}395745$

III. $m = 1{,}55$; $\omega = -2{,}030292 \pm \sqrt{}\, 5{,}997627 = 0{,}418713$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,510000 | 1,530000 | 1,550000 |
| $\omega =$ | 0,373093 | 0,395745 | 0,418713 |
| $m - \omega =$ | 1,136907 | 1,134255 | 1,131287 |
| $m - \omega - 3 =$ | −1,863093 | −1,865745 | −1,868713 |
| $1 - m + \omega =$ | −0,136907 | −0,134255 | −0,131287 |
| $l(m-1) =$ | 9,7075702 | 9,7242759 | 9,7403627 |
| $l(m-\omega-3) =$ | 0,2702347 | 0,2708523 | 0,2715426 |
| $l(1-m+\omega) =$ | 9,1364257 | 9,1279305 | 9,1182217 |
| $l^{-\frac{c}{h}} =$ | 9,4373355 | 9,4534236 | 9,4688201 |
| $l^{-\frac{d}{h}} =$ | 0,5711445 | 0,5963454 | 0,6221410. |

Donc ſi

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $m=1,51$ | $m=1,53$ | $m=1,55$ |
| $a=b=$ | $0,425000\,h$ | $0,441667\,h$ | $0,458333\,h$ |
| $c=-$ | $0,273738\,h$ | $0,284069\,h$ | $0,294320\,h$ |
| $d=-$ | $3,725157\,h$ | $3,947712\,h$ | $4,189296\,h$. |

Prenant le diametre de l'ouverture du ſecond verre CD $= \frac{1}{3}c$, celui du premier verre AB ſera $= \frac{5}{12}c$, & l'intervalle des deux verres doit être pris $= \frac{1}{12}h$. Si l'on ſe ſert d'un oculaire dont la diſtance de foyer eſt $= r$, on groſſira les objets $\frac{5h}{4r}$ de fois.

Ici je remarque que l'ouverture du premier verre AB ne ſauroit être priſe auſſi grande que ſa courbure le permettroit, puiſqu'il faut ſe régler ſur le verre concave. Ayant ſuppoſé ici $\mu = 3$, développons auſſi l'hypotheſe $\mu = 2$, afin qu'on puiſſe choiſir pour chaque cas les déterminations les plus convenables.

13. Poſons donc $\mu = 2$, & laiſſons $\alpha = \frac{1}{2}$, de ſorte que

$$a=b=\frac{(m-1)(\varepsilon+2)}{\varepsilon}h;\ c=\frac{(m-1)h}{m-\omega-2};\ d=\frac{(m-1)h}{1-m+\omega},\ \&\ x:y=\varepsilon+2:\varepsilon;$$

où

où pour groſſir les objets M′ fois en diametre, il faut employer un oculaire de $\frac{h(2+\varepsilon)}{M'\varepsilon} = \frac{a}{M'(m-1)}$ foyer. Enſuite, puiſque $M = \frac{-8(2+\varepsilon)}{\varepsilon}$, nous aurons:

$$\omega = \tfrac{1}{2}A - B \pm \sqrt{(2F - E + \tfrac{8(2+\varepsilon)}{\varepsilon}(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}B + D))},$$

& partant pour les trois hypotheſes principales:

$$m = 1{,}51;\ \omega = -1{,}084103 \pm \sqrt{\left(-0{,}136916 + 2{,}929568.\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}53;\ \omega = -1{,}109590 \pm \sqrt{\left(-0{,}134923 + 3{,}078016.\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}55;\ \omega = -1{,}135211 \pm \sqrt{\left(-0{,}132491 + 3{,}231256.\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

## III. Cas.

14. Poſons maintenant $\varepsilon = 2$, de ſorte que $bc = e = \frac{1}{2}h$, & $a = b = 2(m-1)h$ & $x : y = 2 : 1$. Si l'on veut groſſir les objets M fois en diametre, on n'a qu'à employer un oculaire dont la diſtance de foyer eſt $= \frac{2h}{M}$.

Donc ſi on aura

$m = 1{,}51;\ \omega = -1{,}084103 \pm \sqrt{5{,}722220} = 1{,}308013$

$m = 1{,}53;\ \omega = -1{,}109590 \pm \sqrt{6{,}021109} = 1{,}344205$

$m = 1{,}55;\ \omega = -1{,}135211 \pm \sqrt{6{,}330021} = 1{,}380743,$

& l'on fera le calcul ſuivant:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,510000 | 1,530000 | 1,550000 |
| $\omega =$ | 1,308013 | 1,344205 | 1,380743 |
| $m - \omega =$ | 0,201987 | 0,185795 | 0,169257 |
| $m - \omega - 2 =$ | $-$ 1,798013 | 1,814205 | 1,830743 |
| $1 - m + \omega =$ | $+$ 0,798013 | 0,814205 | 0,830743 |
| $l(m-1) =$ | 9,7075702 | 9,7242759 | 9,7403627 |
| $lm - \omega - 2 =$ | $-$ 0,2547928 | 0,2586863 | 0,2626274 |
| $l1 - m + \omega =$ | $+$ 9,9020099 | 9,9107337 | 9,9194667 |
| $l\frac{-c}{h} =$ | 9,4527774 | 9,4655896 | 9,4777353 |
| $l\frac{d}{h} =$ | 9,8055603 | 9,8135422 | 9,8208960 |
| $a = b =$ | 1,020000 $h$ | 1,060000 $h$ | 1,100000 $h$ |
| $c =$ | $-$ 0,283646 $h$ | 0,292139 $h$ | 0,300424 $h$ |
| $d =$ | $+$ 0,639088 $h$ | 0,650942 $h$ | 0,660535 $h$. |

L'ouverture de ces verres doit être réglée ſur le rayon $c$, d'où l'on mettra le diametre de l'ouverture du ſecond verre CD $= \frac{1}{3}c$, & celui du premier verre AB $= \frac{2}{3}c$. Un tel objectif compoſé eſt repréſenté dans la 5^me^ figure; or le groſſiſſement doit être eſtimé par l'ouverture du premier AB; donc, ſi $\frac{2}{3}c$ eſt de 3 pouces, on pourra groſſir 100 fois, & alors l'oculaire ſera $= \frac{1}{33}h$ en foyer. Puiſque nous avons à peu près $c = \frac{3}{100}h$, cette multiplication demande $\frac{1}{3}h = 3$ pouces; donc $h = 15$ pouces, & l'oculaire $= \frac{3}{100}$ pouce. En général donc, ſi l'on veut groſſir M fois les objets en diametre, il faut prendre $h = \frac{3}{100}$ M pouces, & le foyer tombera depuis le premier verre AB à la diſtance $e + h = \frac{8}{100}$ M pouces, & l'oculaire reſtera toujours de $\frac{3}{100}$ pouce. Or, en employant un verre objectif de la premiere eſpece, la même multiplication, avec le même oculaire, demanderoit une diſtance de foyer de $\frac{3}{100}$ M $= \frac{12}{100}$ M pouces; donc notre lunette ici ſera plus courte d'un quart, ce qui eſt un avantage aſſez conſidérable.

Fig. 5.

15. J'ai remarqué que, pour la plûpart des verres dont on ſe ſert dans les lunettes, la raiſon de refraction eſt aſſez exactement comme

me 1,54 à 1; & il ſera bon d'ajouter la Table ſuivante tirée du premier cas.

## *Table des verres objectifs compoſés* (fig. 4.)

*exprimée en pouces, & milliemes parties.*

| Diſtance de foyer après le ſecond verre. | Diſtance du premier verre au ſecond. | Rayon de convexité du premier verre. | Pour le ſecond verre concave des deux côtés rayon de la face de devant. | rayon de la face de derriere. | Diametre de l'ouverture. | groſſit les objets tant de fois. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,033 | 0,396 | 0,318 | 1,776 | 0,11 | 3,67 |
| 2 | 0,067 | 0,792 | 0,637 | 3,553 | 0,22 | 7,33 |
| 3 | 0,100 | 1,188 | 0,955 | 5,329 | 0,33 | 11,00 |
| 4 | 0,133 | 1,584 | 1,274 | 7,105 | 0,44 | 14,67 |
| 5 | 0,167 | 1,980 | 1,592 | 8,881 | 0,55 | 18,33 |
| 6 | 2,200 | 2,376 | 1,910 | 10,658 | 0,66 | 22,00 |
| 8 | 0,267 | 3,168 | 2,547 | 14,210 | 0,88 | 29,33 |
| 10 | 0,333 | 3,960 | 3,184 | 17,763 | 1,10 | 36,67 |
| 12 | 0,400 | 4,752 | 3,820 | 21,316 | 1,32 | 44,00 |
| 15 | 0,500 | 5,940 | 4,776 | 26,644 | 1,65 | 55,00 |
| 18 | 0,600 | 7,128 | 5,731 | 31,973 | 1,98 | 66, |
| 21 | 0,700 | 8,316 | 6,686 | 37,302 | 2,31 | 77 |
| 24 | 0,800 | 9,504 | 7,641 | 42,631 | 2,64 | 88 |
| 30 | 1,000 | 11,880 | 9,552 | 53,288 | 3,30 | 110 |
| 36 | 1,200 | 14,256 | 11,462 | 63,946 | 3,96 | 132 |
| 42 | 1,400 | 16,632 | 13,373 | 74,603 | 4,62 | 154 |
| 48 | 1,600 | 19,008 | 15,283 | 85,261 | 5,28 | 176 |
| 54 | 1,800 | 21,384 | 17,193 | 95,919 | 5,94 | 198 |
| 60 | 2,000 | 23,760 | 19,104 | 106,576 | 6,60 | 220 |
| 72 | 2,400 | 28,512 | 22,924 | 127,892 | 7,92 | 264 |
| 84 | 2,800 | 33,264 | 26,746 | 149,206 | 9,24 | 308 |
| 96 | 3,200 | 38,016 | 30,566 | 170,522 | 10,56 | 352 |
| 108 | 3,600 | 42,768 | 34,386 | 191,838 | 11,88 | 396 |
| 120 | 4,000 | 47,520 | 38,208 | 213,152 | 13,20 | 440 |
| 144 | 4,800 | 57,024 | 45,848 | 255,784 | 15,84 | 528 |

Le verre oculaire eſt ſuppoſé ici de $\frac{2}{10}$ pouce.

16. Au cas que la refraction du verre ſoit différente de la raiſon 1,54 : 1 que j'ai ſuppoſée dans cette Table, j'ajoute les déterminations ſuivantes pour les hypotheſes 1,53 : 1; 1,54 : 1; 1,55 : 1, parce qu'il ſemble que tous les verres y ſont compris.

I. La diſtance entre le premier verre AB & le ſecond CD eſt $\frac{1}{30}h$.

II. Le foyer commun tombe après le ſecond verre à la diſtance $= h$.

| *Hypotheſes de refraction* | 1,53 : 1 | 1,54 : 1 | 1,55 : 1 |
|---|---|---|---|
| III. Le premier verre AB étant également convexe des deux côtés, le rayon de chaque face eſt - - - - - | 0,388667 $h$ | 0,396000 $h$ | 0,403333 $h$ |
| IV. Pour le ſecond verre CD concave des deux côtés, le rayon de ſa face de devant eſt - - | 0,312424 $h$ | 0,318396 $h$ | 0,324368 $h$ |
| & de ſa face de derriere - - | 1,745776 $h$ | 1,776263 $h$ | 1,806868 $h$ |
| V. Diametre de l'ouverture du premier verre AB eſt - - | 0,114555 $h$ | 0,116745 $h$ | 0,118935 $h$ |
| VI. du ſecond verre CD eſt - | 0,104141 $h$ | 0,106132 $h$ | 0,108123 $h$ |
| VII. Exprimant la diſtance $h$ en pouces, ces verres pourront groſſir les objets tant de fois | 3,81850 $h$ | 3,89150 $h$ | 3,96450 $h$ |
| VIII. Pour cet effet il faudra ſe ſervir d'un oculaire dont la diſtance de foyer eſt - - - | 0,288 pouc. | 0,283 pouc. | 0,277 pouc. |

Or en général, quand on employe un verre oculaire dont la diſtance de foyer eſt $= r$, les objets ſeront groſſis tant de fois $\frac{11h}{10r}$. Donc, établiſſant la regle, qu'un groſſiſſement de 100 fois dans le diametre demande une ouverture de 3 pouces dans le premier verre objectif, on ne doit pas employer un oculaire dont la diſtance de foyer ſoit plus petite que celle je viens de marquer.

17. Dé-

17. Développons de la même maniere le ſecond cas où $e = \frac{1}{12}h$, & nous aurons:

I. La diſtance entre les deux verres AB & CD eſt $\frac{1}{12}h$.

II. Le foyer commun tombe à la diſtance $= h$, après le ſecond verre CD.

| *Hypotheſes de refraction* | 1,53:1 | 1,54:1 | 1,55:1 |
|---|---|---|---|
| III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon de chaque face eſt, | 0,441667 $h$ | 0,450000 $h$ | 0,458333 $h$ |
| IV. Le ſecond verre étant concave des deux côtés, le rayon de ſa face de devant eſt - - | 0,284069 $h$ | 0,289195 $h$ | 0,294320 $h$ |
| & de ſa face de derriere - | 3,947712 $h$ | 4,068504 $h$ | 4,189296 $h$ |
| V. Diametre de l'ouverture du premier verre AB - - - | 0,118361 $h$ | 0,120496 $h$ | 0,122634 $h$ |
| VI. du ſecond verre CD - - | 0,094689 $h$ | 0,096398 $h$ | 0,098107 $h$ |
| VII. Exprimant la diſtance $h$ en pouces, ces objectifs pourront groſſir les objets tant de fois | 3,9454 $h$ | 4,0165 $h$ | 4,0878 $h$ |
| VIII. Pour cet effet il faudra ſe ſervir d'un oculaire dont la diſtance de foyer eſt - - - | 0,316 pouc. | 0,311 pouc. | 0,305 pouc. |

Or en général, quand on employe un verre oculaire dont la diſtance de foyer $= r$, les objets ſeront groſſis $\frac{5h}{4r}$ fois. Ici on voit qu'avec la même diſtance $h$ on peut produire un plus grand groſſiſſement que dans le cas précédent, & cela encore avec un plus grand oculaire, ce qui eſt un avantage aſſez conſidérable. Cette circonſtance m'engage à développer encore quelques cas de l'hypotheſe $\mu = 3$, en ſuppoſant la diſtance des verres $bc = e$ encore plus grande.

## IV. Cas.

18. Posons $\varepsilon = 6$ de sorte que la distance des verres $bc = \frac{1}{6}h$ & $a = b = (m-1)h$; ensuite $x : y = 3 : 2$, & un oculaire dont la distance de foyer $= r$ grossira $\frac{3h}{2r}$ de fois. Nous aurons pour les hypotheses $m = 1,51$; $m = 1,53$, & $m = 1,55$ les formules suivantes pour la valeur de $\omega$.

I. $m = 1,51$; $\omega = -1,948804 \pm \sqrt{6,627120} = 0,625515$
II. $m = 1,53$; $\omega = -1,989448 \pm \sqrt{6,987686} = 0,653975$
III. $m = 2,55$; $\omega = -2,030292 \pm \sqrt{7,360813} = 0,682790$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,510000 | 1,530000 | 1,550000 |
| $\omega =$ | 0,625515 | 0,653975 | 0,682790 |
| $m - \omega =$ | 0,884485 | 0,876025 | 0,867210 |
| $m - \omega - 3 =$ | −2,115515 | 2,123975 | 2,132790 |
| $1 - m + \omega =$ | +0,115515 | 0,123975 | 0,132790 |
| $l(m-1) =$ | 9,7075702 | 9,7242759 | 9,7403627 |
| $l(m-\omega-3) =$ | −0,3254161 | 0,3271494 | 0,3289482 |
| $l(1-m+\omega) =$ | +9,0626383 | 9,0933343 | 9,1231654 |
| $l\frac{-c}{h} =$ | 9,3821541 | 9,3971265 | 9,4114145 |
| $l\frac{+d}{h} =$ | 0,6449319 | 0,6309416 | 0,6171973 |
| $a = b =$ | 0,510000 $h$ | 0,530000 $h$ | 0,550000 $h$ |
| $c =$ | −0,241076 $h$ | 0,249532 $h$ | 0,257878 $h$ |
| $d =$ | +4,415012 $h$ | 4,275055 $h$ | 4,141886 $h$ |

Ici je remarque que, puisque $\frac{p}{m-1} = h\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon\mu} h$ & $\frac{q}{m-1} = \frac{h}{1-\mu}$, à cause de $\mu = 3$ & $\varepsilon = 6$, nous aurons

$\frac{p}{m-1}$

$\frac{p}{m-1} = \frac{1}{2}h$, & $\frac{q}{m-1} = -\frac{1}{2}h$. Or $\frac{p}{m-1}$ exprime la diſtance de foyer du premier verre convexe AB, & $\frac{q}{m-1}$ celle de l'autre verre CD eſt préciſément égale à la diſtance de foyer du premier verre AB. Au reſte, le verre CD devient dans ce cas ménisque, étant concave en avant & convexe de l'autre côté.

19. Ce cas nous fournit la deſcription ſuivante de verres objectifs compoſés:

I. La diſtance entre les verres AB & CD eſt $\frac{1}{6}h$.

II. Le foyer commun tombe à la diſtance $= h$ après le ſecond verre CD.

| *Hypotheſes de refraction* | 1,53:1 | 1,54:1 | 1,55:1 |
|---|---|---|---|
| III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon en eſt - - | 0,530000 $h$ | 0,540000 $h$ | 0,550000 $h$ |
| IV. Le ſecond verre a ſa face de devant concave, dont le rayon eſt - - - - - | 0,249532 $h$ | 0,253731 $h$ | 0,257878 $h$ |
| & ſa face de derriere convexe, dont le rayon eſt - - | 4,275055 $h$ | 4,207610 $h$ | 4,141886 $h$ |
| V. Diametre de l'ouverture du premier verre AB - - | 0,124765 $h$ | 0,126865 $h$ | 0,128938 $h$ |
| VI. du ſecond verre CD - - | 0,083177 $h$ | 0,084577 $h$ | 0,085959 $h$ |
| VII. Exprimant la diſtance $h$ en pouces, ces objectifs pourront groſſir les objets tant de fois | 4,1588 $h$ | 4,2288 $h$ | 4,2978 $h$ |
| VIII. Pour cet effet il faut ſe ſervir d'un oculaire dont la diſtance de foyer - - - | 0,367 pouc. | 0,358 pouc. | 0,349 pouc. |

Or, en général, quand on ſe ſert d'un oculaire dont la diſtance de foyer eſt $= r$, les objets ſeront groſſis tant $\frac{3h}{2r}$ de fois. Il eſt donc clair que l'avantage de ces objectifs eſt encore plus grand que celui des précédens, puiſque la même diſtance $h$ produit un plus grand groſſiſſement, & cela moyennant un plus grand oculaire.

## V. Cas.

20. Poſons maintenant $\epsilon = 3$, en laiſſant $\mu = 3$, & nous aurons $a = b = \frac{4}{3}(m-1)h$; & $x : y = 2 : 1$, de ſorte qu'un oculaire dont la diſtance de foyer eſt $r$, groſſira $\frac{2h}{r}$ fois. Donc, pour les mêmes hypotheſes principales, nous aurons:

$m = 1{,}51$; $\omega = -1{,}948804 \pm \sqrt{9{,}098943} = 1{,}067642$
$m = 1{,}53$; $\omega = -1{,}989448 \pm \sqrt{9{,}584762} = 1{,}106479$
$m = 1{,}55$; $\omega = -2{,}030292 \pm \sqrt{10{,}087186} = 1{,}145741$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,510000 | 1,530000 | 1,550000 |
| $\omega =$ | 1,067642 | 1,106479 | 1,145741 |
| $m - \omega =$ | 0,442358 | 0,423521 | 0,404259 |
| $m - \omega - 3 =$ | −2,557642 | 2,576479 | 2,595741 |
| $1 - m + \omega =$ | +0,557642 | 0,576479 | 0,595741 |
| $l(m-1) =$ | 9,7075702 | 9,7242759 | 9,7403627 |
| $l(m-\omega-3) =$ | −0,4078397 | 0,4110266 | 0,4142614 |
| $l(1-m+\omega) =$ | +9,7463554 | 9,7607834 | 9,7750575 |
| $l^{-\frac{c}{h}} =$ | 9,2997305 | 9,3132493 | 9,3261013 |
| $l^{+\frac{d}{h}} =$ | 9,9612148 | 9,9634925 | 9,9653052 |
| $a = b =$ | 0,680000 $h$ | 0,706667 $h$ | 0,733333 $h$ |
| $c =$ | −0,199502 $h$ | 0,205707 $h$ | 0,211885 $h$ |
| $d =$ | +0,914565 $h$ | 0,919375 $h$ | 0,923220 $h$ |

Les

Les diſtances de foyer de ces deux verres ſeront:

celle du premier $\frac{p}{m-1} = \frac{2}{3}h$; & de l'autre $\frac{q}{m-1} = -\frac{1}{2}h$.

L'ouverture du ſecond verre étant priſe $= \frac{1}{3}c$, celle du premier verre ſera en diametre $= \frac{2}{3}c$, d'où l'on pourra obtenir un groſſiſſement de $\frac{200}{9}c$ ſelon les diametres, lorſqu'on exprime la diſtance $c$ en pouces. Donc, ſi nous poſons ce nombre $\frac{200}{9}c = M$, la diſtance de foyer du verre oculaire ſera $r = \frac{2h}{M}$. Or la diſtance de foyer du verre objectif compoſé depuis le premier verre eſt $= e + h = \frac{4}{3}h$; d'où il eſt évident que ces lunettes ſeront encore plus courtes pour le même groſſiſſement.

21. Ce cas fournit donc une nouvelle eſpece de verres objectifs, dont voici la deſcription.

I. La diſtance entre les verres AB & CD eſt $\frac{1}{3}h$.

II. Le foyer commun tombe à la diſtance $= h$ depuis le ſecond verre CD.

| *Hypotheſes de refraction:* | 1,53:1 | 1,54:1 | 1,55:1 |
|---|---|---|---|
| III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon de ſes faces eſt - | 0,706667 $h$ | 0,720000 $h$ | 0,733333 $h$ |
| IV. Du ſecond verre la face de devant eſt concave & le rayon en eſt | 0,205707 $h$ | 0,208780 $h$ | 0,211885 $h$ |
| or la face de derriere eſt convexe, le rayon étant - | 0,919375 $h$ | 0,921176 $h$ | 0,923220 $h$ |
| V. Diametre de l'ouverture du premier verre eſt - - - | 0,137138 $h$ | 0,139186 $h$ | 0,141256 $h$ |
| VI. & du ſecond verre - | 0,068569 $h$ | 0,069593 $h$ | 0,070628 $h$ |
| VII. Exprimant $h$ en pouces, ces verres pourront groſſir tant de fois - - - - - | 4,5713 $h$ | 4,6395 $h$ | 4,7085 $h$ |
| VIII. Pour cet effet il faut ſe ſervir d'un oculaire dont la diſtance de foyer - - | 0,437 pouc. | 0,431 pouc. | 0,425 pouc. |



Donc,

Donc, pour produire un groſſiſſement de 100 fois, il ſuffit de prendre $h = 22$ pouces environ; & puiſque $e = \frac{1}{3} h = 7\frac{1}{3}$ pouces, la diſtance depuis le premier verre juſqu'au foyer ſera $29\frac{1}{3}$ pouces; & partant toute la lunette ſera à peine de 30 pouces, & produira le même effet qu'une lunette ordinaire de 30 pieds. Et une telle lunette de 60 pouces ou de 5 pieds fera le même effet qu'une lunette ordinaire de plus de 100 pieds.

22. Toutes ces conſtructions que je viens de développer, m'ont été fournies par la ſeule hypotheſe $\mu = 3$, qui paroit très propre pour les objectifs: or on voit que les deux nombres $\epsilon$ & $\mu$ qu'on peut prendre à volonté, fourniſſent une infinité d'eſpeces d'objectifs qui ſont également délivrés de toute confuſion cauſée par l'ouverture des verres. Mais, puiſqu'on peut auſſi prendre le nombre $\mu$ négatif, nous en tirerons un tout autre genre d'objectifs, où le premier verre AB ſera concave & l'autre ED convexe. Pour en développer quelque eſpece, poſons $\mu = -2$, & qu'il reſte $\alpha = \frac{1}{2}$, afin que le premier verre AB devienne également concave des deux côtés; de là réſulte $M = \frac{-8(\epsilon-2)}{3\epsilon}$, & il faut que cette quantité

$$-2F - 9E + \frac{8(\epsilon-2)}{3\epsilon}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}B + D\right) \text{ ſoit poſitive,}$$

qui dans le cas $m = 1{,}54$ ſe réduit à

$$-2{,}307558 + \tfrac{8}{3} \cdot 0{,}394255 \cdot \frac{\epsilon - 2}{\epsilon} \text{ toujours négative.}$$

Il faut donc donner à $\mu$ une plus grande valeur, & partant mettons $\mu = -3$, d'où $M = \frac{-27(\epsilon-\mu)}{4\epsilon}$, & ce nombre $-3F - 16E + \frac{27(\epsilon-\mu)}{4\epsilon}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}B + D\right)$ doit être poſitif, ce qui n'eſt pas encore poſſible. On ſera donc obligé de mettre au moins $\mu = -7$. Mais lorſ-

lorſqu'on donne à $\mu$ une ſi grande valeur, les diſtances de foyer des deux verres deviennent trop petites par rapport à celle de l'objectif entier, pour qu'on en puiſſe retirer quelque fruit dans la pratique.

23. Examinons donc plutôt encore un cas où la valeur de $\mu$ eſt poſitive, mais très petite; & puiſqu'il faut qu'elle ſurpaſſe l'unité, ſuppoſons $\mu = \frac{3}{2}$, & comme auparavant $\alpha = \frac{1}{2}$; de là nous aurons

$$M = \frac{-27}{8} \cdot \frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} = \frac{-27}{4} \cdot \frac{2\varepsilon + 3}{2\varepsilon}, \quad \&$$

$$a = b = \frac{2(m-1)(2\varepsilon+3)}{3\varepsilon} h; \; c = \frac{(m-1)h}{m-\omega-\frac{3}{2}}; \; d = \frac{m-1}{1-m+\omega} h;$$

enſuite les diſtances de foyer $\frac{p}{m-1} = \frac{2\varepsilon+3}{3\varepsilon} h$; & $\frac{q}{m-1} = -2h$,

& pour les ouvertures $x : y = \varepsilon + \frac{3}{2} : \varepsilon$. De plus, joignant un oculaire dont la diſtance de foyer $= r$, les objets ſeront groſſis tant de fois $\frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon} \cdot \frac{h}{r}$. Or la valeur de $\omega$ ſera déterminée par cette équation:

$$\omega = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{3}{4}B \pm \sqrt{(\tfrac{3}{2}F - \tfrac{1}{4}E + \tfrac{27}{4} \cdot \frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon} (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}B + D)},$$

& partant pour nos trois hypotheſes nous aurons:

$$m = 1{,}53; \; \omega = -0{,}669661 \pm \sqrt{\left(0{,}019039 + 2{,}597076 \cdot \frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}54; \; \omega = -0{,}678648 \pm \sqrt{\left(0{,}021744 + 2{,}661221 \cdot \frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}55; \; \omega = -0{,}687676 \pm \sqrt{\left(0{,}024545 + 2{,}726372 \cdot \frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon}\right)}$$

## VI. Cas.

24. Commençons par une grande valeur de $\varepsilon$, & ſoit $\varepsilon = 15$; donc $a = b = \frac{22}{15}(m-1)h$; $x : y = 11 : 10$ & $\frac{p}{m-1} = \frac{11}{15}h$.

$m = 1{,}53$; $\omega = -0{,}669661 \pm \sqrt{2{,}875822} = 1{,}026164$

$m = 1{,}54$; $\omega = -0{,}678648 \pm \sqrt{2{,}949087} = 1{,}038642$

$m = 1{,}55$; $\omega = -0{,}687676 \pm \sqrt{3{,}023554} = 1{,}051161$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,530000 | 1,540000 | 1,550000 |
| $\omega =$ | 1,026164 | 1,038642 | 1,051161 |
| $m - \omega =$ | 0,503836 | 0,501358 | 0,498839 |
| $m - \omega - \frac{3}{2} =$ | −0,996164 | 0,998642 | 1,001161 |
| $1 - m + \omega =$ | +0,496164 | 0,498642 | 0,501161 |
| $l(m-1) =$ | 9,7242759 | 9,7323938 | 9,7403627 |
| $l(m-\omega-\frac{3}{2}) =$ | −9,9983309 | 9,9994098 | 0,0005039 |
| $l(1-m+\omega) =$ | 9,6956252 | 9,6977888 | 9,6999773 |
| $l\frac{-c}{h} =$ | 9,7259450 | 9,7329840 | 9,7398588 |
| $l\frac{d}{h} =$ | 0,0286507 | 0,0346050 | 0,0403854 |
| $a = b =$ | 0,777333 $h$ | 0,792000 $h$ | 0,806667 $h$ |
| $c =$ | −0,532041 $h$ | 0,540734 $h$ | 0,549362 $h$ |
| $d =$ | 1,068195 $h$ | 1,082941 $h$ | 1,097451 $h$ |

Ici un oculaire dont la diſtance de foyer eſt $= r$, groſſira les objets $\frac{11}{10} \cdot \frac{h}{r}$ fois, & partant ſi le groſſiſſement eſt $= M$, on aura $r = \frac{11h}{10M}$.

25. Conſidérons cette eſpece d'objectifs plus particulierement.

I. La diſtance entre les verres eſt $= \frac{1}{15} h$.

II. Le foyer commun tombe à la diſtance $h$, derriere le ſecond verre.

| *Hypotheſes de refraction:* | 1,53:1 | 1,54:1 | 1,55:1 |
|---|---|---|---|
| III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon en eſt - - | 0,777333 $h$ | 0,792000 $h$ | 0,806667 $h$ |
| IV. Du ſecond verre la face de devant eſt concave & le rayon en eſt - - - - | 0,532041 $h$ | 0,540734 $h$ | 0,549362 $h$ |
| or la face de derriere eſt convexe, dont le rayon - - | 1,068195 $h$ | 1,082941 $h$ | 1,097451 $h$ |
| V. Diametre de l'ouverture du premier verre - - | 0,195081 $h$ | 0,198269 $h$ | 0,201433 $h$ |
| VI. celui du ſecond verre | 0,177347 $h$ | 0,180245 $h$ | 0,183121 $h$ |
| VII. Exprimant la diſtance $h$ en pouces, ces objectifs groſſiront tant de fois - - | 6,5027 $h$ | 6,6089 $h$ | 6,7144 $h$ |
| VIII. Pour cet effet il faut ſe ſervir d'un oculaire dont la diſtance de foyer - - | 0,169 pouc. | 0,166 pouc. | 0,163 pouc. |

Donc, pour produire un groſſiſſement de 100 fois, il ſuffit de prendre $h = 15$ environ: & la longueur de la lunette ne deviendroit que de 16 pouces, ce qui eſt encore beaucoup plus avantageux que les objectifs précédens. Une telle lunette de 3 pieds ſuppaſſeroit donc très conſidérablement une ordinaire de 100 pieds. Mais, comme l'oculaire eſt ſi petit, il conviendra peut-être mieux d'en employer un plus grand & de ſe contenter d'un moindre groſſiſſement.

## VII. Cas.

26. Soit maintenant $e = 3$, ou bien $e = \frac{3}{2} h$; & nous aurons $a = b = 2(m-1)h$, & $x : y = 3 : 2$; enſuite les diſtances de foyer

foyer $\frac{F}{m-1} = h$; & $\frac{q}{m-1} = -2h$; de plus un verre ocularre dont la distance de foyer est $= r$, grossira tant de fois $\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{r}$. Le reste du calcul suit:

$m = 1,53$; $\omega = -0,669661 \pm \sqrt{3,914653} = 1,308887$.
$m = 1,54$; $\omega = -0,678648 \pm \sqrt{4,013575} = 1,324743$
$m = 1,55$; $\omega = -0,687676 \pm \sqrt{4,114103} = 1,340649$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,530000 | 1,540000 | 1,550000 |
| $\omega =$ | 1,308887 | 1,324743 | 1,340649 |
| $m - \omega =$ | 0,221113 | 0,215257 | 0,209351 |
| $m - \omega - \frac{3}{2} =$ | −1,278887 | 1,284743 | 1,290649 |
| $1 - m + \omega =$ | 0,778887 | 0,784743 | 0,790649 |
| $l(m-1) =$ | 9,7242759 | 9,7323938 | 9,7403627 |
| $l(m - \omega - \frac{3}{2}) =$ | −0,1068322 | 0,1088162 | 0,1108081 |
| $l(1 - m + \omega) =$ | 9,8914744 | 9,8947274 | 9,8979838 |
| $l\frac{c}{h} =$ | 9,6174437 | 9,6235776 | 9,6295546 |
| $l\frac{d}{h} =$ | + 9,8328015 | 9,8376664 | 9,8423789 |
| $a = b =$ | 1,060000 $h$ | 1,080000 $h$ | 1,100000 $h$ |
| $c =$ | −0,414423 $h$ | 0,420318 $h$ | 0,426142 $h$ |
| $d =$ | + 0,680458 $h$ | 0 688123 $h$ | 0,695631 $h$ |

Si nous comparons ce cas avec le V^me^, où est pareillement $\epsilon = 3$, mais $\mu = 3$, nous voyons que le rayon $c$ qui est le plus petit, est ici 2 fois plus grand que là, & partant ces objectifs admettront une plus grande ouverture, ce qui nous peut procurer de très grands avantages.

27. Considérons ces objectifs plus particulierement, & développons en toutes les déterminations:

I. La

I. La distance des verres est $\frac{1}{3}h$.

II. Le foyer de l'objectif tombe à la distance $h$ depuis le second verre CD.

| *Hypotheses de refraction:* | 1,53:1 | 1,54:1 | 1,55:1 |
|---|---|---|---|
| III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon en est - - | 1,060000 $h$ | 1,080000 $h$ | 1,100000 $h$ |
| IV. du second verre la face de devant est concave & le rayon en est - - - - - | 0,414423 $h$ | 0,420318 $h$ | 0,426142 $h$ |
| or la face de derriere est convexe, dont le rayon - - | 0,680458 $h$ | 0,688123 $h$ | 0,695631 $h$ |
| V. Le diametre de l'ouverture du premier verre est - | 0,310816 $h$ | 0,315238 $h$ | 0,319606 $h$ |
| VI. celui du second verre - | 0,207211 $h$ | 0,210159 $h$ | 0,213071 $h$ |
| VII. Exprimant la distance $h$ en pouces, ces objectifs pourront grossir tant de fois - - | 10,3605 $h$ | 10,5079 $h$ | 10,6535 $h$ |
| VIII. Pour produire cet effet il faut employer un oculaire dont la distance de foyer - | 0,149pouc. | 0,145pouc. | 0,141pouc. |

Cet effet seroit bien surprenant, si l'exécution n'opposoit des obstacles peut-être insurmontables qu'on ne sauroit prévoir. Pour produire un grossissement de 100 fois en diametre, il suffira de mettre $h = 9\frac{1}{4}$, & puisque $e = 3\frac{1}{8}$ pouces, toute la lunette ne seroit que de $13\frac{2}{3}$, & une lunette d'environ 2 pieds égaleroit presque les ordinaires de 100 pieds. Cependant, quand on voudroit se contenter d'un moindre grossissement, ces objectifs procureroient toujours des avantages très considérables.

28. L'hypothese $\mu = \frac{3}{2}$ a cet avantage, qu'elle donne la valeur de M à peu près la plus petite; & puisque les objectifs qu'elle fournit paroissent l'emporter sur les autres, nous pourrons donc encore augmenter cet avantage, en donnant à $\alpha$ aussi une valeur telle, que

$aa - aB + D$ devienne le plus petit, ce qui arrive en posant $a = \frac{8}{9}$, d'où l'on aura:

$$a = \tfrac{8}{9}(m-1).\frac{2\epsilon+3}{3\epsilon}h;\ \&\ b = 9(m-1).\frac{2\epsilon+3}{3\epsilon}h,$$

& pour les trois hypotheses

$$m = 1{,}53;\ \omega = -0{,}669661 \pm \sqrt{\left(0{,}019039 + 1{,}623632.\frac{2\epsilon+3}{2\epsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}54;\ \omega = -0{,}678648 \pm \sqrt{\left(0{,}021744 + 1{,}647991.\frac{2\epsilon+3}{2\epsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}55;\ \omega = -0{,}687676 \pm \sqrt{\left(0{,}024545 + 1{,}673096.\frac{2\epsilon+3}{2\epsilon}\right)}$$

## VIII. Cas.

29. Soit $\epsilon = 15$, & nous aurons $a = \frac{3}{4}\frac{3}{5}(m-1)h$ & $b = \frac{33}{5}(m-1)h$

$m = 1{,}53;\ \omega = -0{,}669661 \pm \sqrt{1{,}805034} = 0{,}673854$

$m = 1{,}54;\ \omega = -0{,}678648 \pm \sqrt{1{,}832018} = 0{,}674872$

$m = 1{,}55;\ \omega = -0{,}687676 \pm \sqrt{1{,}864950} = 0{,}677955$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,530000 | 1,540000 | 1,550000 |
| $\omega =$ | 0,673854 | 0,674872 | 0,677955 |
| $m - \omega =$ | 0,856146 | 0,865128 | 0,872045 |
| $m - \omega - \frac{3}{2} =$ | −0,643854 | 0,634872 | 0,627955 |
| $1 - m + \omega =$ | 0,143854 | 0,134872 | 0,127955 |
| $l(m-1) =$ | 9,7242759 | 9,7323938 | 9,7403627 |
| $l(m-\omega-\frac{3}{2}) =$ | −9,8087874 | 9,8026862 | 9,7979286 |
| $l(1-m+\omega) =$ | 9,1579220 | 9,1299219 | 9,1070573 |
| $l\frac{c}{h} =$ | 9,9154885 | 9,9297076 | 9,9424341 |
| $l\frac{d}{h} =$ | 0,5663539 | 0,6024719 | 0,6333054 |
| $a =$ | 0,437250 $h$ | 0,445500 $h$ | 0,453750 $h$ |
| $b =$ | 3,498000 $h$ | 3,564000 $h$ | 3,630000 $h$ |
| $c =$ | −0,823168 $h$ | 0,850565 $h$ | 0,875859 $h$ |
| $d =$ | 3,684290 $h$ | 4,003795 $h$ | 4,296386 $h$ |

Or

Or ici il faut régler l'ouverture ſur la premiere face, & partant elle deviendra plus petite que dans l'hypotheſe précédente, qui eſt par conſéquent préférable à celle-ci.

## IX. Cas.

30. Mais poſons $\epsilon = 3$, pour avoir $a = \frac{2}{5}(m-1)h$ & $b = 9(m-1)h$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m =$ | 1,530000 | 1,540000 | 1,550000 |
| $\omega =$ | 0,897019 | 0,900468 | 0,904238 |
| $m - \omega =$ | 0,632981 | 0,639532 | 0,645762 |
| $m - \omega - \frac{3}{2} =$ | −0,867091 | 0,860468 | 0,854238 |
| $1 - m + \omega =$ | 0,367081 | 0,360468 | 0,354238 |
| $l(m-1) =$ | 9,7242759 | 9,7323938 | 9,7403627 |
| $l(m - \omega - \frac{3}{2}) =$ | −9,9380285 | 9,9347347 | 9,9315789 |
| $l(1 - m + \omega) =$ | 9,5647619 | 9,5568667 | 9,5492952 |
| $l^{-\frac{c}{h}} =$ | 9,7862474 | 9,7976591 | 9,8087838 |
| $l\frac{d}{h} =$ | 0,1595140 | 0,1755271 | 0,1910675 |
| $a =$ | 0,596250 $h$ | 0,607500 $h$ | 0,618750 $h$ |
| $b =$ | 4,770000 $h$ | 4,860000 $h$ | 4,950000 $h$ |
| $c =$ | −0,611290 $h$ | 0,627565 $h$ | 0,643848 $h$ |
| $d =$ | + 1,443823 $h$ | 1,498053 $h$ | 1,552628 $h$ |

Ces objectifs n'admettent point une ſi grande ouverture que ceux du VII. Cas. Il y auroit bien quelque choſe à gagner en poſant $\alpha = \frac{3}{4}$, ou environ; mais alors il faudroit employer un trop petit oculaire; ce qui eſt la raiſon pourquoi je ne pouſſerai pas plus loin ces recherches.

31. Je remarque donc, en général, qu'on peut toujours déterminer la figure des deux verres, lorſque les diſtances de foyer de ces deux verres avec leur diſtance $= e$ eſt donnée, pourvu que le premier ſoit convexe, & l'autre concave, afin que toute confuſion relative à l'ouverture évanouiſſe. Pour cet effet, ſuppoſons la diſtance de foyer

du premier verre $AB = \zeta e$, & celle de l'autre $CD = -\eta e$: & les équations

$$\zeta e = \frac{\zeta h}{\varepsilon} = \frac{h(\varepsilon+\mu)}{\varepsilon\mu} \quad \& \quad \eta e = \frac{\eta h}{\varepsilon} = \frac{h}{\mu-1}$$

donnent $\varepsilon + \mu = \zeta\mu$ & $\eta(\mu-1) = \varepsilon$; donc $\eta\mu + \mu - \eta = \zeta\mu$, & partant $\mu = \frac{\eta}{1+\eta-\zeta}$ & $\varepsilon = \frac{(\zeta-1)\eta}{1+\eta-\zeta}$. Or il faut que $\mu > 1$; donc $1 + \eta > \zeta$ & $\zeta > 1$; ou bien $\zeta$ doit être contenu entre les limites 1 & $1 + \eta$.

32. Outre cela je remarque que ces objectifs compoſés repréſentent les images des objets dans la même grandeur que feroit un verre ſimple dont la diſtance de foyer $= \frac{\varepsilon+\mu}{\varepsilon}h$; de ſorte que, ſi l'on y joint un oculaire dont la diſtance de foyer $= r$, on obtient un groſſiſſement de $\frac{\varepsilon+\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{h}{r}$ fois, comme j'ai déjà obſervé ci-deſſus. Mais on pourroit auſſi conſtruire les verres oculaires ſuivant ces regles en prenant la quantité $h$ fort petite, de ſorte que $\frac{\varepsilon+\mu}{\varepsilon}h$ devînt égal à la diſtance de foyer que le verre oculaire doit avoir, & les derniers cas ſeront les plus propres pour ce deſſein, puiſque les rayons des faces ne deviennent pas trop petits. Or un tel oculaire devroit être placé de façon que le verre convexe regardât l'œil, & alors on jouiroit de ce grand avantage, que l'oculaire ne cauſeroit pas une nouvelle confuſion, comme il arrive ordinairement. Mais, en employant de cette ſorte pluſieurs verres, il ſe préſente une nouvelle recherche qui regarde leur diſpoſition néceſſaire afin que les couleurs d'iris évanouiſſent, ou que les rayons des diverſes couleurs qui émanent de chaque point de l'objet, ſe réuniſſent dans la même direction en entrant dans l'œil. Cet article étant de la derniere importance, ſera le ſujet d'un Mémoire particulier.

Fig. 1.

Fig. 2.

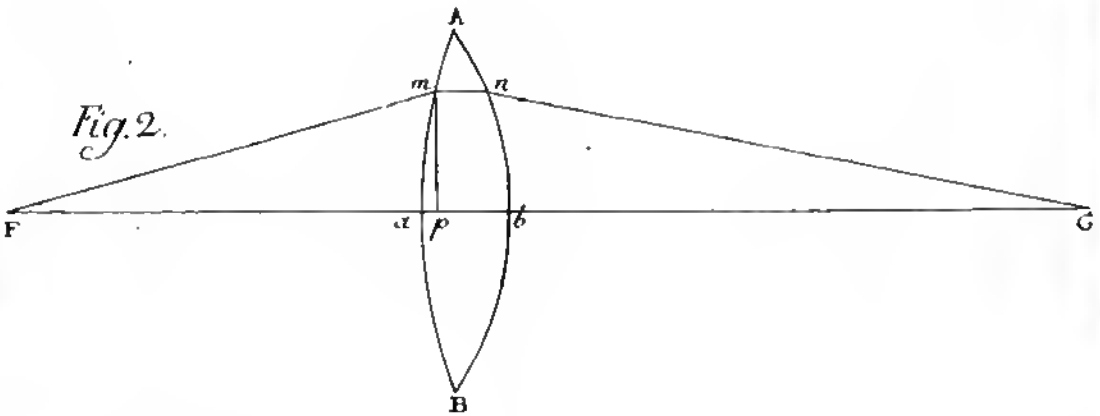



Fig. 3.

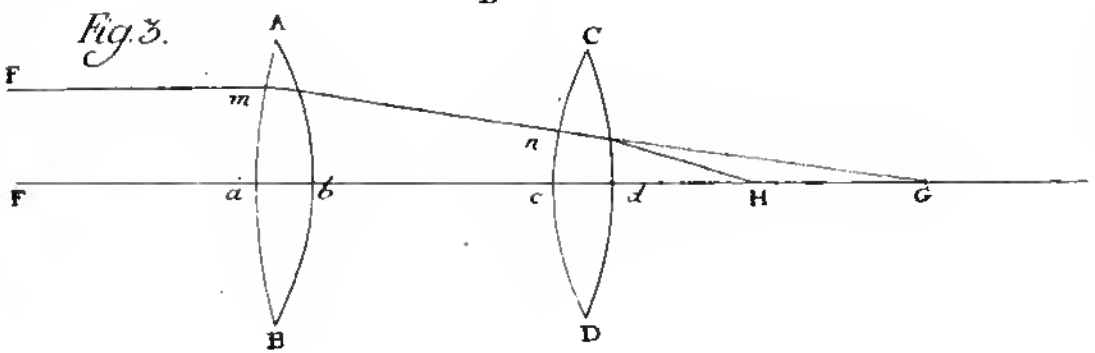



Fig. 4.

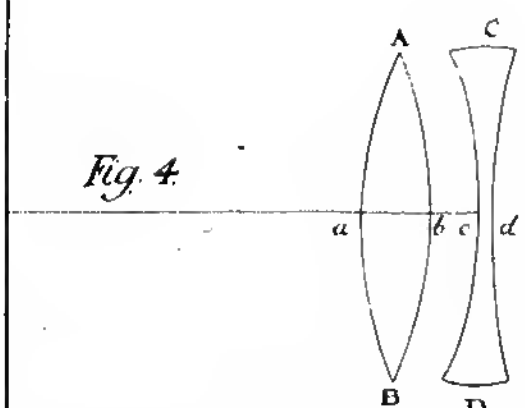
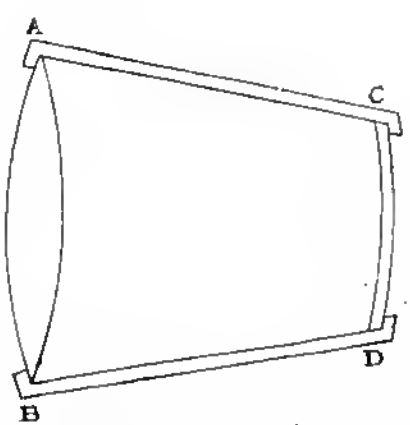



Fig. 5.



# SUR LA SOLUTION DES PROBLEMES INDÉTERMINÉS DU SECOND DEGRÉ.

PAR M. DE LA GRANGE. (*)

Lorſque l'équation finale à laquelle conduit la ſolution d'une queſtion, renferme plus d'une inconnue, le probleme eſt indéterminé; & enviſagé généralement, il eſt ſuſceptible d'une infinité de ſolutions. Mais ſi la nature de la queſtion exige que les quantités cherchées ſoient rationelles, ou même qu'elles ſoient exprimées par des nombres entiers, alors le nombre des ſolutions peut être très-limité; & la difficulté ſe réduit à trouver parmi toutes les ſolutions poſſibles, celles qui peuvent ſatisfaire à la condition preſcrite. Quand l'équation finale n'eſt que du premier degré, toutes les ſolutions ſont rationelles par la nature même de cette équation; &, ſi l'on veut de plus que les inconnues ſoient des nombres entiers, on peut les déterminer facilement par la méthode des fractions continues (voyez plus bas l'art. 8). Il n'en eſt pas de même des équations qui paſſent le premier degré, & qui conduiſent naturellement à des expreſſions irrationelles. On n'a point de méthode directe & générale pour trouver les nombres commenſurables qui peuvent ſatisfaire à ces équations lors même qu'elles ne ſont qu'au ſecond degré; & il faut avouer que cette branche de l'Analyſe, quoique peut-être une des plus importantes, eſt néanmoins une de celles que les Géometres paroiſſent avoir le plus négligées, ou du moins dans leſquelles ils ont fait juſqu'à préſent le moins de progrès.



(*) Lû à l'Académie le 24 Novembre 1768.

Diophante & ſes Commentateurs ont à la vérité réſolu un grand nombre de problemes indéterminés du ſecond, du troiſieme, & même du quatrieme degré; mais, la plûpart de leurs ſolutions n'étant que particulieres, il n'eſt pas étonnant qu'il ſe trouve encore des cas d'ailleurs fort ſimples, & en même tems fort étendus, pour leſquels les méthodes de Diophante ſoient abſolument inſuffiſantes.

S'il s'agiſſoit, par exemple, de réſoudre l'équation $A + Bt^2 = u^2$, en ſuppoſant A & B des nombres entiers non carrés, c'eſt à dire de trouver une valeur rationelle de $t$ telle que $A + Bt^2$ devînt un carré, on verroit aiſément que tous les artifices connus de l'Analyſe de Diophante ſeroient en défaut pour ce cas; or c'eſt préciſément à ce cas que ſe réduit la ſolution générale des problemes indéterminés du ſecond degré à deux inconnues, comme on le verra ci-après. Perſonne que je ſache ne s'eſt occupé de ce probleme, ſi on en excepte M. Euler qui en a fait l'objet de deux excellens Mémoires qui ſe trouvent parmi ceux de l'Académie de Petersbourg (Tome VI des anciens *Commentaires* & Tome IX des nouveaux); mais il s'en faut encore beaucoup que la matiere ſoit épuiſée. Car 1°. M. Euler n'a conſidéré dans l'équation $A + Bt^2 = u^2$, que le cas où B eſt un nombre poſitif, & où $t$ & $u$ doivent être des nombres entiers. 2°. Dans ce cas même, M. Euler ſuppoſe qu'on connoiſſe déjà une ſolution de l'équation, & il donne le moyen d'en déduire une infinité d'autres. Ce n'eſt pas que ce grand Géometre n'ait tâché de donner auſſi quelques regles pour connoître *a priori* ſi l'équation propoſée eſt réſoluble ou non; mais, outre que ces regles ne ſont fondées que ſur des principes précaires & tirés ſeulement de l'induction, elles ne ſont d'ailleurs d'aucune utilité pour la recherche de la premiere ſolution qui doit être ſuppoſée connue (voyez le premier Mémoire du Tome IX des nouveaux Commentaires de Petersbourg, & ſurtout la concluſion de ce Mémoire page 38). 3°. Les formules que M. Euler donne pour trouver une infinité de ſolutions dès qu'on en connoit une ſeule, ne renferment pas toujours & ne ſauroient renfermer toutes les ſolutions poſſibles à moins que A ne ſoit un nombre premier (voyez plus bas l'art. 45).

Les

Les recherches que j'ai faites depuis quelque tems ſur cette matiere m'ont conduit à des méthodes directes, générales, & nouvelles, pour réſoudre les équations de la forme $A + Bt^2 = u^2$, & en général toutes les équations du ſecond degré, à deux inconnues, ſoit que les inconnues puiſſent être des nombres quelconques entiers, ou fractionaires, ſoit qu'elles doivent être des nombres entiers. Ce ſont ces méthodes qui font l'objet de ce Mémoire; je les crois d'autant plus dignes de l'attention des Mathématiciens qu'elles laiſſent encore un vaſte champ à leurs recherches.

## §. I.

*De la maniere de ramener toute équation du ſecond degré à deux inconnues à cette forme* $A = u^2 - Bt^2$

*& des cas dans leſquels les équations de cette forme peuvent ſe réſoudre par les méthodes connues.*

1. Soit

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$$

l'équation générale propoſée dans laquelle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\epsilon$, & $\zeta$ ſoient des nombres donnés entiers, poſitifs ou négatifs (il eſt évident que ſi les coëfficiens $\alpha$, $\beta$, &c. n'étoient pas des nombres entiers, on pourroit toujours les rendre tels en faiſant évanouir tous les dénominateurs par la multiplication); & où $x$, & $y$ ſoient les deux inconnues qu'il s'agit de déterminer en ſorte qu'elles ſoient exprimées par des nombres rationels. Qu'on tire de cette équation la valeur de l'une des deux inconnues, comme $x$, & l'on aura

$$2\alpha x + \beta y + \delta = \sqrt{((\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \epsilon y + \delta))},$$

d'où l'on voit que la queſtion ſe réduit à déterminer $y$ en ſorte que la quantité $(\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \epsilon y + \delta)$ ſoit un carré. Soit pour abréger

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = B$$
$$\beta\delta - 2\alpha\epsilon = f$$
$$\delta^2 - 4\alpha\zeta = g$$

&

& il faudra que $By^2 + 2fy + g$ ſoit un carré; ſoit donc

$$By^2 + 2fy + g = t^2$$

on aura par la réſolution de cette équation

$$By + f = \sqrt{(Bt^2 + f^2 - Bg)}$$

de ſorte qu'il ne s'agira plus que de rendre $Bt^2 + f^2 - Bg$ carré. Soit encore

$$f^2 - Bg = A$$

& toute la difficulté ſe réduira à ſatisfaire à cette équation

$$A + Bt^2 = u^2.$$

A, B étant des nombres entiers donnés & $t$, & $u$ devant être des nombres rationels.

2. Puiſque nous avons ſuppoſé $(\beta y - \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \epsilon y + \delta) = By^2 + 2fy + g = t^2$, & $Bt^2 + f^2 - Bg = Bt^2 + A = u^2$, on aura

$$2\alpha x + \beta y + \delta = \pm t$$

$$By + f = \pm u$$

d'où

$$y = \frac{\pm u - f}{B}$$

$$x = \frac{\pm t - \delta}{2\alpha} - \frac{\beta(\pm u - f)}{2\alpha B}$$

(les ſignes ambigus de $u$, & de $t$ pouvant être pris à volonté) par où l'on déterminera $x$, & $y$, dès que l'on connoitra $t$ & $u$.

On voit auſſi par là que, ſi $x$, & $y$ doivent être des nombres entiers, il faut que $t$, & $u$ ſoient entiers auſſi; mais il faudra de plus que $\pm u - f$ ſoit diviſible par B, & que $\pm t - \delta - \frac{\beta(\pm u - f)}{B}$ ſoit diviſible par $2\alpha$. Si on vouloit ſeulement que $x$, & $y$ fuſſent des nombres rationels, il ſuffiroit que $t$, & $u$ fuſſent auſſi rationels.

3. Si l'un des nombres A, ou B, étoit carré, l'équation $A + Bt^2 = u^2$ ſeroit ſuſceptible des méthodes de Diophante.

Car

Car 1°. ſoit $B = b^2$, on ſuppoſera $u = bt + z$ & l'équation deviendra, en ôtant ce qui ſe détruit, $A = 2btz + z^2$; d'où l'on tire $t = \frac{A - z^2}{2bz}$; de ſorte qu'on pourra prendre pour $z$ un nombre quelconque. Cependant, ſi on vouloit que $t$ & $u$ fuſſent des nombres entiers, il ne faudroit prendre pour $z$ que des nombres entiers tels que $A - z^2$ fût diviſible par $2bz$; mais, comme la recherche des nombres qui auroient cette propriété pourroit être longue & pénible, on conſidérera que l'équation $A + b^2t^2 = u^2$ donne $A = u^2 - b^2t^2 = (u + bt)(u - bt)$; d'où l'on voit d'abord que $u + bt$, & $u - bt$ doivent être des facteurs du nombre donné A; de ſorte qu'il n'y aura qu'à réſoudre ce nombre en deux facteurs de toutes les manieres poſſibles, & prendre enſuite l'un des facteurs pour $u + bt$ & & l'autre pour $u - bt$; on aura par ce moyen deux équations à l'aide deſquelles on déterminera $t$, & $u$; & on choiſira entre toutes les valeurs de $t$, & $u$, que chaque couple de facteurs aura fournies, celles qui ſeront des nombres entiers. De cette maniere on ſera aſſuré d'avoir toutes les ſolutions poſſibles en entiers de l'équation propoſée.

Suppoſons 2°. que l'on ait $A = a^2$, on fera $u = a + tz$, & l'on aura en ſubſtituant & effaçant ce qui ſe détruit, $Bt^2 = 2atz + t^2z^2$, ou bien en diviſant par $t$, & tirant enſuite la valeur de $t$, $t = \frac{2az}{B - z^2}$, où l'on pourra prendre pour $z$ tout ce que l'on voudra. Si $t$ & $u$ devoient être entiers, il faudroit que $z$ fût entier & tel que $2az$ fût diviſible par $A - z^2$; ainſi on pourroit ſuppoſer d'abord $z = o$, ce qui donneroit $t = o$, & $u = a$; mais, pour avoir une ſolution générale, on conſidérera l'équation $a^2 + Bt^2 = u^2$, laquelle donne $Bt^2 = u^2 - a^2 = (u + a)(u - a)$, & nous apprend que $t + a$, & $t - a$ doivent être des facteurs de $Bt^2$. Soit $B = b\beta$; $b$, & $\beta$ étant deux facteurs quelconques de B, on pourra déterminer $t$, & $u$ en ſuppoſant $u + a = bt$, & $u - a = \beta t$, d'où l'on tire

$2a = (b - \beta)t$, & $t = \frac{2a}{b-\beta}$; ainſi l'équation ne ſera réſoluble en nombres entiers, au moins par cette méthode, que lorſque $2a$ ſera diviſible par $b - \beta$; je dis par cette méthode, car il eſt évident que la ſuppoſition de $u + a = bt$, & $u - a = \beta t$ n'eſt que particuliere, & qu'on pourroit faire auſſi, (en ſuppoſant $t = pq$) $u + a = bp^2$, $u - a = \beta q^2$; ce qui donneroit $2a = bp^2 - \beta q^2$, équation qui rentre, comme l'on voit, dans le cas général de l'art. 1.

3. Ce ſont là les ſeules méthodes qu'on ait eues juſqu'à préſent pour réſoudre les équations de la forme de $A + Bt^2 = u^2$, méthodes qui ne ſont abſolument applicables qu'aux cas ou A, & B ſont des nombres carrés; dans tous les autres cas on en étoit réduit au ſimple tâtonnement, moyen non ſeulement long & pénible, mais preſque impraticable, à moins que les quantités cherchées ne ſoient renfermées dans de certaines limites: or c'eſt ce qui n'a lieu que dans le cas où A étant poſitif, B eſt négatif; car, puiſque $u^2$ doit être entier & poſitif, il eſt clair que $Bt^2$ devra être moindre que A, & que par conſéquent $t$ devra néceſſairement être moindre que $\sqrt{\frac{A}{B}}$; de ſorte qu'il n'y aura dans ce cas qu'à ſubſtituer ſucceſſivement, au lieu de $t$, tous les nombres poſitifs moindres que $\sqrt{\frac{A}{B}}$, (il ſeroit inutile de ſubſtituer des nombres négatifs, le carré $t^2$ étant le même ſoit que $t$ ſoit poſitif, ou négatif,) & choiſir ceux qui rendront $A - Bt^2$ égal à un carré; il n'en eſt pas de même lorſque B eſt poſitif, parce qu'alors $t$ peut augmenter à l'infini: & en général, ſoit que B ſoit poſitif ou négatif, le nombre des ſubſtitutions à eſſayer ſera toujours néceſſairement indéfini, dès qu'on voudra admettre des nombres rompus; ce qui prouve d'autant plus la néceſſité d'avoir pour cet objet des méthodes directes & analitiques telles que celles que nous allons donner.

§. II.

## §. II.

*Réſolution de l'équation* $A = u^2 - Bt^2$

*lorſque* u, *&* t *peuvent être des nombres quelconques entiers ou fractionaires.*

4. Suppoſons en général que $u$, & $t$ ſoient des fractions quelconques, leſquelles étant réduites au même dénominateur, & aux moindres termes poſſibles, ſoient repréſentées par $\frac{p}{r}$, & $\frac{q}{r}$, en ſorte que l'on ait $u = \frac{p}{r}$, $t = \frac{q}{r}$, & l'équation $A + Bt^2 = u^2$, ſavoir $A = u^2 - Bt^2$, deviendra

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2,$$

de ſorte que la queſtion ſera réduite à trouver des nombres entiers qui, étant ſubſtitués pour $p$, $q$ & $r$, ſatisfaſſent à cette équation.

Nous pouvons ſuppoſer de plus que l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ ſoit telle que ni A ni B ne contiennent aucun facteur carré. Car, ſi on avoit $A = a\varrho^2$, $B = b\pi^2$, l'équation deviendroit $a\varrho^2 r^2 = p^2 - b\pi^2 q^2$; ou bien, en faiſant $\varrho r = m$, $\pi q = n$ $am^2 = p^2 - bn^2$, laquelle eſt de la même forme que la précédente.

En général, au lieu de faire ſimplement $u = \frac{p}{r}$ & $t = \frac{q}{r}$, on fera dans ce cas $u = \frac{\varrho p}{r}$ & $t = \frac{\varrho q}{\pi r}$, & les facteurs carrés $\varrho^2$ & $\pi^2$ diſparoîtront par la diviſion. Ainſi il ſuffira de réſoudre l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ dans l'hypotheſe que ni A ni B ne contiennent aucun facteur carré.

Nous ſuppoſerons encore que B ne ſoit pas $= 1$, ni que l'on ait à la fois $B = -1$ & $A = 1$; car, outre que ces cas n'ont point de difficulté, nous nous réſervons d'en donner la ſolution plus bas (art. 19).

Enfin nous ſuppoſerons que A ſoit toujours plus grand que B. En effet il eſt clair

1°. que, ſi A étoit moindre que B, il n'y auroit qu'à tranſpoſer les termes $Ar^2$, & $Bq^2$, & échanger A en B, & $q$ en $r$.

2°. Si A étoit $= \pm$ B, alors comme A eſt ſuppoſé ne contenir aucun facteur carré, il faudroit néceſſairement que $p$ fût diviſible par A, de ſorte qu'en faiſant $p = As$, on auroit, après avoir diviſé par A, $r^2 = As^2 \pm q^2$, c'eſt à dire $As^2 = p^2 \pm q^2$, laquelle rentre dans l'équation générale $Ar^2 = p^2 - Bq^2$, en faiſant $B = \mp 1$, $r = s$; or, ſi le ſigne inférieur a lieu, on aura déjà le cas de l'art. 19; & ſi c'eſt le ſigne ſupérieur qui ait lieu, alors on aura auſſi le cas de l'art. 19 ſi $A = 1$; de ſorte que nous ſuppoſerons ici $A > 1$, & par conſéquent $A > B$.

De cette maniere la réſolution de l'équation propoſée ſe réduira toujours à celle d'une équation de la forme

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2$$

où $p$, $q$, $r$, devront être des nombres entiers, & où A, & B ſeront des nombres entiers donnés non carrés, ni contenant des facteurs carrés, & dont l'un A ſera plus grand que l'autre B.

5. Je dis maintenant que les nombres $p$, & $q$ doivent être premiers entr'eux; car, s'ils avoient un commun diviſeur $\varrho$, il faudroit que $Ar^2$ fût auſſi diviſible par $\varrho^2$; mais, comme les fractions $\frac{p}{r}$, & $\frac{q}{r}$, ſont ſuppoſées réduites à leurs moindres termes, il eſt clair que $p$, $q$, & $r$ n'auront aucun diviſeur commun; & qu'ainſi $r$ ne ſera point diviſible par $\varrho$; d'ailleurs il eſt clair que ſi $p$, $q$ & $r$ avoient un diviſeur commun, on en pourroit toujours faire abſtraction, parce que ce diviſeur s'en iroit de lui-même par la diviſion; donc il faudra que A ſoit diviſible par $\varrho^2$, ce qui ne ſe peut à cauſe que A eſt ſuppoſé ne contenir aucun facteur carré.

6. Cela

6. Cela posé, je remarque d'abord que, pour que l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ puisse subsister, il faut que A soit un diviseur d'un nombre de cette forme $\alpha^2 - B$, $\alpha$ étant un nombre entier, c'est à dire que B soit le résidu de la division d'un carré quelconque par A. Car, si on multiplie l'équation dont il s'agit par $p'^2 - Bq'^2$, on aura $Ar^2(p'^2 - Bq'^2) = (p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2)$; or $(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2)$ se réduit à cette forme $(pp' \pm Bqq')^2 - B(pq' \pm qp')^2$, comme il est facile de s'en assurer par le développement de ces deux expressions; donc, si on prend pour $p'$ & $q'$ des nombres entiers tels que $pq' - qp'$ soit $-1$ ou $= -1$, ce qui est toujours possible à cause que $p$, & $q$ sont premiers entr'eux (art. préc.), & qu'on fasse $pp' - Bqq' = \alpha$, on aura $Ar^2(p'^2 - Bq'^2) = \alpha^2 - B$; par conséquent A sera un diviseur de $\alpha^2 - B$.

7. Pour trouver les nombres $p'$, & $q'$ qui peuvent satisfaire à la condition $pq' - qp' = \pm 1$, on réduira la fraction $\frac{p}{q}$ en une fraction continue, d'où l'on déduira, comme l'on sait, une suite de fractions convergentes vers $\frac{p}{q}$, & alternativement plus grandes ou plus petites que cette même fraction (voyez plus bas l'art. 29.), & l'on prendra pour $p'$ le numérateur de la fraction qui précédera immédiatement la fraction $\frac{p}{q}$ & pour $q'$ le dénominateur de la même fraction; si la fraction $\frac{p'}{q'}$ est plus petite que la fraction $\frac{p}{q}$, on aura $pq' - qp' = 1$, & si $\frac{p'}{q'} > \frac{p}{q}$, on aura $pq' - qp' = -1$.

8. Cette méthode est utile pour résoudre en général toutes les équations du premier degré à deux inconnues, lorsque ces inconnues doivent être des nombres entiers. Car soit l'équation

$$py - qx = r$$



dans

dans laquelle $p$, & $q$ ſoient des nombres entiers premiers entr'eux; je dis premiers entr'eux, car il eſt évident que ſi $p$, & $q$ avoient un diviſeur commun $\varrho$, il faudroit que $r$ fût auſſi diviſible par $\varrho$, pour que les nombres $x$, & $y$ puſſent être des nombres entiers; donc diviſant toute l'équation par $\varrho$, on auroit une nouvelle équation de la forme $py - qx = r$, dans laquelle $p$, & $q$ ſeroient néceſſairement premiers entr'eux.

Qu'on cherche, comme ci-deſſus, la fraction $\frac{p'}{q'}$, telle que $pq' - qp' = \pm 1$, & l'on aura, en multipliant par $r$, $pq'r - qp'r = \pm r$; donc retranchant cette équation de la propoſée, ou l'y ajoutant, on aura celle-ci

$$p(y \mp rq') - q(x \mp rp') = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{x \mp rp'}{y \mp rq'} = \frac{p}{q}.$$

Or, $p$ & $q$ étant premiers entr'eux, la fraction $\frac{p}{q}$ ſera déjà réduite à ſes moindres termes, de ſorte que comme $x$, & $y$ doivent être des nombres entiers, il faudra que l'on ait

$$x \mp rp' = mp, \quad y \mp rq' = mq,$$

$m$ étant un nombre quelconque entier; d'où l'on tirera

$$x = mp \pm rp', \quad y = mq \pm rq'.$$

Ce ſont les expreſſions générales de tous les nombres entiers $x$, & $y$ qui peuvent ſatisfaire à l'équation $py - qx = r$.

Ainſi, pour ſatisfaire en général à l'équation $py - qx = \pm 1$, qui eſt celle de l'art. préc., on prendra $r = \pm 1$, & l'on aura

$$x = mp \pm p', \quad y = mq \pm q',$$

les ſignes ambigus étant à volonté auſſi bien que le nombre $m$.

9. La réduction que nous avons faite (art. 6) de la quantité $(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2)$ à $(pp' \pm Bqq')^2 - B(pq' \pm qp')$, doit être

être bien remarquée, parce que nous en ferons un fréquent uſage dans la ſuite de ce Mémoire; il réſulte de là que le produit de deux nombres quelconques de la forme $p^2 - Bq^2$ eſt encore de la même forme, & que par conſéquent le produit d'autant de nombres qu'on voudra de la forme $p^2 - Bq^2$ ſera auſſi de la même forme. En effet on a

$$(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2) = P^2 - BQ^2$$
$$(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2)(p''^2 - Bq''^2) = P'^2 - BQ'^2$$
&c.
$$P = pp' \pm Bqq', \quad Q = pq' \pm qp'$$
$$P' = Pp'' \pm BQq'', \quad Q' = Pq'' \pm Qp''$$
&c.

où l'on obſervera à l'égard des ſignes ambigus de les prendre les mêmes dans les deux quantités P & Q, P' & Q' &c.

On aura de même

$$(p^2 - Bq^2)^2 = P^2 - BQ^2$$
$$(p^2 - Bq^2)^3 = P'^2 - BQ'^2$$
&c.

en faiſant

$$P = p^2 + Bq^2; \quad Q = 2pq$$
$$P' = p^3 + 3Bpq^2, \quad Q' = 3pq^2 + Bq^3$$
&c.

& en général ſi on fait

$$(p^2 - Bq^2)^m = P^2 - BQ^2,$$

on aura

$$P = p^m + \frac{m(m-1)}{2} p^{m-2} q^2 B +$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^{m-4} q^4 B^2 + \text{&c.}$$

Q =

$$Q = mp^{m-1}q + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}p^{m-3}q^3B + \frac{m(m-1)\cdots(m-4)}{2.3.4.5}p^{m-5}q^5B^2 + \text{&c.}$$

ou bien

$$P = \frac{(p+q\sqrt{B})^m + (p-q\sqrt{B})^m}{2}$$

$$Q = \frac{(p+q\sqrt{B})^m - (p-q\sqrt{B})^m}{2\sqrt{B}}.$$

10. Nous avons démontré plus haut (art. 6.) que l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ ne peut avoir lieu à moins que A ne ſoit un diviſeur d'un nombre de cette forme $\alpha^2 - B$; or je dis que l'on peut toujours ſuppoſer que le nombre $\alpha$ ſoit moindre que la moitié du nombre A. En effet, ſoit $a$ un nombre tel que $a^2 - B$ ſoit diviſible par A, il eſt clair qu'en faiſant $\alpha = \mu A \pm a$, $\mu$ étant un nombre quelconque entier, $\alpha^2 - B$ ſera auſſi diviſible par A; d'autre part il eſt facile de voir qu'on peut toujours déterminer le nombre $\mu$ & le ſigne ambigu de $a$ en ſorte que $\alpha$ ſoit $< \frac{A}{2}$; donc s'il exiſte un nombre quelconque $a$ tel que $a^2 - B$ ſoit diviſible par A, il doit exiſter auſſi un nombre $\alpha < \frac{A}{2}$, qui ait la même propriété.

On doit conclure de là que pour que l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ ſoit réſoluble, il faut néceſſairement que A ſoit un diviſeur d'un nombre tel que $\alpha^2 - B$, $\alpha$ étant un nombre moindre que $\frac{A}{2}$.

On eſſayera donc ſucceſſivement pour $\alpha$ tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à $\frac{A}{2}$, & ſi l'on n'en trouve aucun qui ſatisfaſſe à la condition dont il s'agit, ce ſera une marque ſure que l'équation propoſée n'admet aucune ſolution rationelle.

Nous

Nous donnerons plus bas (voyez le §. IV) des moyens directs pour pouvoir reconnoitre ſi un nombre donné peut être un diviſeur d'un nombre de la forme $\alpha^2 - B$, B étant auſſi donné; il nous ſuffit ici qu'on puiſſe toujours s'en aſſurer par un tâtonnement fort ſimple.

Au reſte il faut remarquer, pour éviter toute équivoque, que quand nous diſons que $\alpha$ doit être $< \frac{A}{2}$, nous entendons que $\alpha$, & A ſoient pris poſitivement, quoiqu'ils puiſſent être d'ailleurs poſitifs, ou négatifs; de ſorte qu'on ne doit avoir égard dans cette comparaiſon des nombres $\alpha$, & A, qu'à leur valeur abſolue.

11. Reprenons maintenant l'équation

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2 \quad - - - - - - \quad (A)$$

& ſuppoſons qu'on ait trouvé un nombre entier $\alpha < \frac{A}{2}$ (abſtraction faite des ſignes de $\alpha$ & A) tel que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par A; dénotant par $A'$ le quotient de la diviſion de $\alpha^2 - B$ par A, on aura l'équation $AA' = \alpha^2 - B$.

Qu'on faſſe $\alpha' = \mu' A' \pm \alpha$, $\mu'$ étant un nombre quelconque entier, & qu'on prenne le nombre $\mu'$ & le ſigne de $\alpha$ en ſorte que l'on ait $\alpha' < \frac{A'}{2}$ (abſtraction faite des ſignes de $\alpha'$ & $A'$), ce qui eſt évidemment toujours poſſible, comme nous l'avons déjà obſervé plus haut; il eſt clair que puiſque $\alpha^2 - B$ eſt déjà diviſible par $A'$, $\alpha'^2 - B$ le ſera auſſi, de ſorte qu'en dénotant le quotient de cette diviſion par $A''$, on aura cette équation analogue à la précédente, $A'A'' = \alpha'^2 - B$.

Faiſant de même $\alpha'' = \mu'' A'' \pm \alpha'$, & prenant $\mu''$ & le ſigne de $\alpha'$, en ſorte que l'on ait $\alpha'' < \frac{A''}{2}$, (les nombres $\alpha''$ & $A''$ étant conſidérés comme poſitifs,) on aura $\alpha''^2 - B$ diviſible par $A''$; de ſorte qu'en dénotant le quotient de cette diviſion par $A'''$, on aura cette troiſieme équation $A''A''' = \alpha''^2 - B$, & ainſi de ſuite.

12. De cette maniere on pourra trouver une ſuite d'équations telles que

$$\left.\begin{array}{l} A\,A' = \alpha^2 - B \\ A'A'' = \alpha'^2 - B \\ A''A''' = \alpha''^2 - B \\ \&c. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

dans leſquelles on ait (en conſidérant les nombres $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ &c. A, A', A'' &c. comme poſitifs) $\alpha < \frac{A}{2}$, $\alpha' < \frac{A'}{2}$, $\alpha'' < \frac{A''}{2}$ &c.

Or je dis que les nombres A, A', A'', A''' &c. formeront néceſſairement une ſuite décroiſſante, juſqu'à ce que l'on arrive à un terme comme $A^n$ (l'expoſant $n$ dénotant non pas une puiſſance de A, mais le quantieme du terme $A^n$) lequel ſoit $= B$ ou $< B$, abſtraction faite des ſignes de $A^n$ & de B. Pour prouver cette propoſition, il eſt à propos de diſtinguer les deux cas de B poſitif, & de B négatif.

13. Suppoſons d'abord que B ſoit un nombre poſitif; dans ce cas il eſt clair que A pourra être poſitif ou négatif.

Soit 1°. A poſitif, & ſoit $\alpha^2 > B$, il eſt clair que A' ſera auſſi poſitif; or, puiſque $\alpha < \frac{A}{2}$, on aura auſſi $\alpha^2 < \frac{A^2}{4}$, & à plus forte raiſon $\alpha^2 - B < \frac{A^2}{4}$; donc $AA' < \frac{A^2}{4}$ & par conſéquent (A, & A' étant poſitifs) $A' < \frac{A}{4}$.

De même, puiſque A' eſt poſitif, ſi $\alpha'^2 > B$, on aura auſſi A'' poſitif, & on prouvera pareillement que $A'' < \frac{A'}{4}$, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que l'on arrive à une équation telle que $A^n A^{n+1} = (\alpha^n)^2 - B$, dans laquelle $(\alpha^n)^2$ ne ſoit plus $> B$; or, puiſque $\alpha < \frac{A}{2}$, $A' <$

A

$\frac{A}{4}$, $\alpha' < \frac{A'}{2}$, $A'' < \frac{A'}{4}$ &c. il eſt clair que les nombres A, A', A'' &c. iront néceſſairement en diminuant, ainſi que les nombres $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ &c.; de ſorte qu'on parviendra néceſſairement à l'équation $A^n A^{n+1} = (\alpha^n)^2 - B$, où $(\alpha^n)^2 = B$ ou $< B$; mais, à cauſe que B eſt ſuppoſé non carré, & différent de l'unité (art. 4.), on ne ſauroit avoir $(\alpha^n)^2 = B$; de ſorte qu'il faudra que l'on ait $(\alpha^n)^2 < B$. Ainſi $B - (\alpha^n)^2$ ſera néceſſairement un nombre moindre que B, ou tout au plus égal à B ſi $\alpha^n = o$; donc, puiſque $A^n$ doit être un diviſeur de $B - (\alpha^n)^2$, il eſt clair que $A^n$ ſera auſſi néceſſairement moindre que B, ou tout au plus égal à B.

Soit 2°. A négatif & $= -a$, $a$ étant un nombre poſitif, & ſoit auſſi $\alpha^2 > B$, il eſt clair que A' devra être négatif; or, en prenant $\alpha$ poſitif, on aura $\alpha < \frac{a}{2}$ (hyp.), donc $\alpha^2 - B < \frac{a^2}{4}$, & faiſant $A' = -a'$ ($a'$ étant poſitif), on aura auſſi $aa' < \frac{a^2}{4}$, & par conſéquent $a' < \frac{a}{4}$.

De même, en ſuppoſant $\alpha'^2 > B$, on aura A'' négatif, & faiſant $A'' = -a''$ ($a''$ étant poſitif), on aura $\alpha' < \frac{a'}{2}$, & $a'' < \frac{a'}{4}$, & ainſi de ſuite. Ainſi on prouvera, comme ci-deſſus, que les nombres $a$, $a'$, $a''$ &c. iront en diminuant ainſi que les nombres $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ &c. juſqu'à ce que l'on arrive à un nombre comme $a^n$, qui ſoit moindre que B, ou tout au plus égal à B.

14. Soit, en ſecond lieu, B égal à un nombre négatif comme $-b$, $b$ étant poſitif, il eſt clair d'abord que dans ce cas tous les nombres A, A', A'' &c. ſeront poſitifs, parce que l'on aura par les équations (A) & (a) $Ar^2 = p^2 + bq^2$, $AA' = \alpha^2 + b$, $A'A'' = \alpha'^2 + b$ &c.; or ſi $A > b$, l'équation $AA' = \alpha^2 + b$ donnera $AA' < \frac{A^2}{4} + A$,

à cauſe de $b < A$, & de $a < \frac{A}{2}$, donc $A' < \frac{A}{4} + 1$.

De même, ſi $A' > b$, l'équation $A'A'' = a'^2 + b$ donnera, à cauſe de $a' < \frac{A'}{2}$, $A'A'' < \frac{A'^2}{4} + A'$, & par conſéquent $A'' < \frac{A'}{4} + 1$, & ainſi de ſuite; d'où l'on voit que les nombres A, A', A'' &c. décroîtront continuellement juſqu'à ce que l'on arrive à un terme $A^n$ égal à $b$ ou moindre que $b$.

Si $b$ eſt $= 1$, il eſt clair qu'on parviendra néceſſairement à un terme $A^n = 1$; car, puiſque les nombres A, A', A'' &c. ne peuvent jamais devenir nuls, à cauſe des équations $AA' = a^2 + b$, $A'A'' = a'^2 + b$ &c., $A^n$ ne pourra pas être $< 1$, par conſéquent il ſera néceſſairement $= 1$.

15. Au reſte, quoiqu'on puiſſe toujours pouſſer la ſuite A, A', A'' &c. juſqu'à un terme égal ou moindre que B, cependant ſi l'on en trouve un qui étant encore plus grand que B, ſoit en même tems carré, ou multiple d'un carré, mais tel qu'étant diviſé par le plus grand carré qui le meſure, il laiſſe un quotient égal ou moindre que B, alors on pourra s'arrêter à ce terme.

En général, nous ſuppoſerons que la ſuite A, A', A'' &c. ſoit pouſſée juſqu'à un terme $A^n$ de cette forme $a^2C$, $a$ étant un nombre quelconque, & C un nombre qui ne ſoit ni carré ni multiple d'un carré, & qui ſoit en même tems égal ou moindre que B, abſtraction faite des ſignes de B & de C.

Ainſi, ſi $B = -1$, il faudra néceſſairement que l'on ait $C = 1$.

16. Cela poſé, ſi on multiplie enſemble toutes les équations (*a*) de l'art. 12, juſqu'à l'équation $A^{n-1}A^n = (a^n - 1)^n - B$, on aura (art. 9) une équation dont le premier membre ſera $AA'^nA''^n \ldots (A^{n-1})^nA^n$, & dont le ſecond membre ſera de cette forme $P^2 - BQ^2$; de ſorte qu'à cauſe de $A^n = a^nC$, on aura l'équation

CA

$$CA\,(A'A''\,\text{- - - -}\,A^{n-1}a)^2 = P^2 - BQ^2,$$

laquelle étant encore multipliée par l'équation (A) deviendra de cette forme $C\,(AA'A''\,\text{- - -}\,A^{n-1}ar)^2 = p'^2 - Br'^2$, ou bien, en faiſant $AA'A''\,\text{- - -}\,A^{n-1}ar = q'$, de la forme $Cq'^2 = p'^2 - Br'^2$; c'eſt à dire

$$Br'^2 = p'^2 - Cq'^2 \quad \text{- - - - - - - (B).}$$

D'où l'on voit que, ſi l'équation (A) eſt réſoluble, il faut auſſi que celle-ci le ſoit.

Réciproquement, ſi l'équation (B) eſt réſoluble, on pourra réſoudre auſſi l'équation (A). En effet, en mettant l'équation (B) ſous cette forme $Cq'^2 = p'^2 - Br'^2$, & la multipliant ſucceſſivement par chacune des équations (*a*), à commencer par l'équation $A^{n-1}A^n = (a^{n-1})^2 - B$ qui eſt la derniere, on aura, à cauſe de $A^n = a^2C$, une équation de cette forme $A\,(A'A''\,\text{- - -}\,A^{n-1}Ca)^2\,q'^2 = p^2 - Bq^2$, c'eſt à dire, en faiſant $A'A''\,\text{- - -}\,A^{n-1}Caq' = r$, de la forme $Ar^2 = p^2 - Bq^2$, qui eſt l'équation (A) même.

Donc la réſolution de l'équation (A) ſe réduira à celle de l'équation (B), dans laquelle B eſt $< A$, & C $=$ ou $< B$, de ſorte que cette derniere eſt plus ſimple que la premiere.

Or, ſi $C = 1$, l'équation (B) ſera déjà dans le cas que nous réſoudrons plus bas (art. 19); ainſi nous ſuppoſerons que, ſi C eſt poſitif, il ſoit encore plus grand que l'unité.

Nous appellerons dans la ſuite les équations (A), (B), & les autres équations analogues à celles-ci, équations *principales*, & les les équations (*a*), ainſi que les autres équations ſemblables qu'on pourra trouver, équations *ſecondaires*; ainſi nous nommerons l'équation (A) la 1^ere^ des équations *principales*, l'équation (B) la 2^de^ des équations *principales*, & ainſi des autres; nous nommerons de même les équations (*a*) la premiere ſuite d'équations *ſecondaires*, & ainſi du reſte.

17. Or, l'équation $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$ étant ſemblable à l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$, on pourra la traiter de la même ma-

niere; en effet, ſi $B = \pm C$, il faudra que $p'$ ſoit auſſi diviſible par B, de ſorte qu'en faiſant $p' = Bs'$, on aura l'équation $r'^2 = Bs'^2 \mp q'^2$, c'eſt à dire $Bs'^2 = r'^2 \pm q'^2$; ainſi cette équation ſera déjà dans le cas de l'art. 19, ſi le ſigne inférieur a lieu; & quand le ſigne ſupérieur aura lieu, alors, à cauſe de $B > 1$ par l'hyp., elle rentrera dans la forme générale $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$, B étant $> C$. Donc, puiſque C eſt ou égal à B ou moindre que B, on aura toujours à réſoudre une équation de cette forme $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$, dans laquelle ni B, ni C ne contiendront aucun facteur carré, & où C ſera $< B$.

On commencera donc par chercher de nouveau un nombre $\beta < \frac{B}{2}$ (en regardant $\beta$ & B comme poſitifs), & tel que $\beta^2 - C$ ſoit diviſible par B; & ſi l'on n'en trouve aucun qui ſatisfaſſe à cette condition, ce ſera une marque certaine que l'équation $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$ ne ſera point réſoluble rationellement, & par conſéquent que la propoſée ne le ſera pas non plus; je ſuppoſerai donc qu'on ait trouvé un tel nombre $\beta$, en ſorte qu'en nommant $B'$ le quotient de la diviſion de $\beta^2 - C$ par B, on ait $\beta^2 - C = BB'$, on pourra former cette ſeconde ſuite d'équations *ſecondaires*

$$\left.\begin{array}{l} BB' = \beta^2 - C \\ B'B'' = \beta'^2 - C \\ B''B''' = \beta''^2 - C \end{array}\right\} - - - (b)$$

&c.

dans leſquelles les nombres B, $B'$, $B''$ &c. formeront une ſuite décroiſſante qu'on continuera juſqu'à ce que l'on parvienne à un terme de cette forme $b^2D$, D étant égal à C ou moindre que C, (abſtraction faite des ſignes de C & D); ce qui arrivera néceſſairement, comme nous l'avons prouvé plus haut; & par le moyen de ces équations on parviendra en opérant comme dans l'art. 16, à une nouvelle équation de la forme

$$Cr''^2 = p''^2 - Dq''^2 \quad - - - - \quad (C)$$

dont la réſolution dépendra de celle de l'équation $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$ &

*vice*

*vice versâ*; de ſorte que, cette équation étant réſolue, on pourra en remontant réſoudre la propoſée.

18. En ſuivant toujours le même procédé, on trouvera cette ſuite d'équations *principales*

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2$$
$$Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$$
$$Cr''^2 = p''^2 - Dq''^2$$
$$Dr'''^2 = p'''^2 - Eq'''^2$$
&c.

dans leſquelles les nombres A, B, C, &c. formeront une ſérie décroiſſante juſqu'à ce que l'on parvienne à un terme égal à l'unité, priſe poſitivement, ou négativement; car, comme ces nombres ne ſont ni carrés ni multiples de carrés par l'hypotheſe, il eſt impoſſible qu'on parvienne à un terme égal à zéro, avant d'être parvenu à un terme égal à l'unité; en effet, ſi $E = o$, on aura $Dr'''^2 = p'''^2$; donc $D = 1$; donc, puiſque les termes A, B, C &c. deviennent toujours plus petits, il eſt évident qu'on arrivera néceſſairement à un terme égal à 1, ou à $-1$.

Soit, par exemple, $E = 1$, alors la derniere équation ſera $Dr'''^2 = p'''^2 - q'''^2$; c'eſt à dire de la forme

$$Vz^2 = x^2 - y^2.$$

Mais, ſi $E = -1$, alors on pourra continuer encore les mêmes opérations, & on parviendra néceſſairement à une nouvelle équation *principale* telle que $Er^{IV2} = p^{IV2} - Fq^{IV2}$, dans laquelle, à cauſe de $E = -1$, on aura néceſſairement $F = 1$ (art. 15); de ſorte que la derniere des équations *principales* ſera, dans ce cas, de la forme $-z^2 = x^2 - y^2$, laquelle rentre dans la formule précédente en faiſant $V = -1$.

Or nous avons démontré que, ſi l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ eſt réſoluble, les équations ſuivantes $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$, $Cr''^2 = p''^2 - Dq''^2$ &c. doivent l'être auſſi; & réciproquement que, ſi l'une de celles-

celles-ci peut ſe réſoudre, toutes les précédentes pourront ſe réſoudre auſſi (art. 16); donc la réſolution de l'équation $Ar^2 = p^4 - Bq^2$, ſe réduira toujours par ce moyen à celle d'une équation de la forme $Vz^2 = x^2 - y^2$, V étant un nombre donné.

19. Or l'équation $Vz^2 = x^2 - y^2$ eſt facile à réſoudre par la méthode même de l'art. 3; mais, pour avoir pour $x$, $y$, & $z$ des expreſſions ſans fractions, on fera $x + y = \xi$, $x - y = \psi$, & l'on aura $Vz^2 = \xi\psi$, donc $\psi = \frac{Vz^2}{\xi}$; de ſorte qu'il faudra que $Vz^2$ ſoit diviſible par $\xi$; ſoit M la plus grande meſure commune de V & $\xi$, en ſorte que $V = MN$, & $\xi = M\varrho$, $\varrho$ & N étant premiers entr'eux, & l'on aura $\psi = \frac{Nz^2}{\varrho}$; donc $z^2 = \varrho\sigma$, & par conſéquent $\xi = M\varrho$, $\psi = N\sigma$, M & N étant deux facteurs quelconques de V; or ſoit $l$ la plus grande commune meſure de $\varrho$ & $\sigma$, & comme $\varrho\sigma$ doit être égal à un carré, il eſt clair que $\varrho$ & $\sigma$ ne pourront être que de cette forme $\varrho = lm^2$, & $\sigma = ln^2$, $l$, $m$, & $n$ étant des nombres quelconques entiers; ainſi on aura $z^2 = l^2m^2n^2$, $\xi = x + y = Ml m^2$, $\psi = x - y = Nln^2$, donc $z = lmn$, $x = \frac{l(Mm^2 + Nn^2)}{2}$ & $y = \frac{l(Mm^2 - Nn^2)}{2}$; mais, comme il eſt inutile d'avoir dans les expreſſions de $x$, $y$, & $z$, un multiplicateur commun, parce qu'il eſt viſible que, dans l'équation $Vz^2 = x^2 - y^2$, on peut toujours multiplier à volonté $x$, $y$, & $z$ par un nombre quelconque, on fera pour plus de ſimplicité $l = 1$, ou bien $l = 2$ pour faire diſparoître le dénominateur 2 de $x$, & de $y$, & l'on aura en général

$$x = Mm^2 + Nn^2,\quad y = Mm^2 - Nn^2,\quad z = 2mn;$$

$m$, & $n$ étant des nombres quelconques entiers, & M & N deux facteurs quelconques de V, en ſorte que $V = MN$. Ainſi, ſi V a pluſieurs facteurs, parmi leſquels il faudra toujours compter l'unité, on aura autant de différentes expreſſions de $x$, $y$, & $z$ qu'il y aura de manieres de partager le nombre V en deux facteurs.

EXEM-

EXEMPLES.

20. Appliquons maintenant notre méthode à quelques exemples.

*Exemple* 1. Soit proposé de résoudre l'équation

$$109 = u^2 - 7t^2.$$

En mettant $\frac{p}{r}$ au lieu de $u$, & $\frac{q}{r}$ au lieu de $t$, elle deviendra

$$109r^2 = p^2 - 7q^2 \quad \text{(A)}$$

de sorte qu'on aura. $A = 109$, & $B = 7$; car, comme ces deux nombres ne renferment aucun facteur carré, il n'y aura aucune réduction à y faire.

Il faudra donc chercher un nombre entier $\alpha$ moindre que $\frac{109}{2}$ & tel que $\alpha^2 - 7$ soit divisible par 109; mais pour cela, au lieu d'essayer successivement pour $\alpha$ tous les nombres naturels moindres que 54, il sera beaucoup plus commode de chercher un multiple de 109, qui soit de la forme $\alpha^2 - 7$, c'est à dire, qui étant augmenté de 7 devienne un carré.

En général on remarquera que, dans l'équation $AA' = \alpha^2 - B$ à laquelle il s'agit de satisfaire, $A'$ doit être $< \frac{A}{4}$ lorsque B est positif, & $< \frac{A}{4} + 1$ lorsque B est négatif (art. 13 & 14), de sorte qu'il n'y aura qu'à essayer successivement pour $A'$ tous les nombres naturels moindres que $\frac{A}{4} + 1$, pris positivement ou négativement suivant que A sera positif ou négatif (art. cités); & s'il ne s'en trouve aucun dont le produit par A étant augmenté de B devienne un carré, ce sera une marque certaine que le probleme n'admet point de solution rationelle.

On en usera de même à l'égard des autres équations de condition $BB' = \beta^2 - C$, $CC' = \gamma^2 - D$ &c. dans lesquelles il faudra aussi que $B' < \frac{C}{4} + 1$, $C' < \frac{D}{4} + 1$ &c.

Dans l'exemple propoſé on trouve d'abord $2 . 109 + 7 = 225$; de ſorte qu'on aura $A' = 2$, $\alpha = 15$; & comme $A'$ eſt déjà $< B$, la premiere ſuite d'équations *ſecondaires* ſe réduira à cette ſeule équation (art. 12.)

$$109 . 2 = 15^2 - 7 \quad - - - - - - \quad (a)$$

Ainſi on fera (art. 15) $C = 2$, de ſorte que la ſeconde équation *principale* ſera

$$7r' = p'^2 - 2q'^2 \quad - - - - - - \quad (B)$$

Il faudra donc ſatisfaire à l'équation $BB' = \beta^2 - C$, ſavoir $7B' = \beta^2 - 2$, $\beta$ étant $< \frac{7}{2}$, & on trouvera $\beta = 3$, $B' = 1$, de ſorte que comme $B'$ eſt déjà $< C$, la ſeconde ſuite d'équations ſecondaires que nous avons déſignée par $(b)$ à l'art. 17, ſe réduira à cette équation unique $7 . 1 = 3^2 - 2$ ; - - - - - - - $(b)$.

On fera donc $D = 1$, & la troiſieme équation principale ſera

$$2r''^2 = p''^2 - q''^2 \quad - - - - - - \quad (C)$$

laquelle eſt déjà comme l'on voit dans le cas de l'art. 19.

Comparant donc cette derniere équation à l'équation $Vz^2 = x^2 - y^2$, on aura $V = 2$, $x = p''$, $y'' = q''$, $z = r''$; donc $M = 1$, $N = 2$, & par conſéquent $p'' = m^2 + 2n^2$, $q'' = m^2 - 2n^2$, $r'' = 2mn$; ainſi il n'y aura plus qu'à remonter de l'équation C) à l'équation (B), & de celle-ci à l'équation propoſée (A) par la méthode de l'art. 16.

Pour cela on changera d'abord l'équation (C) en celle-ci $q''^2 = p''^2 - 2r''^2$, & on la multipliera par l'équation $(b)$ (s'il y avoit plus d'une de ces équations *ſecondaires* $(b)$ il faudroit multiplier l'équation dont il s'agit ſucceſſivement par chacune de ces équations,) on aura, par les formules de l'art. 9, l'équation $7q''^2 = (3p'' \pm 2r'')^2 - 2(3r'' \pm p'')^2$, laquelle étant comparée à l'équation (B) donnera $p' = 3p'' \pm 2r''$, $q' = 3r'' \pm p''$, $r' = q'$

les ſignes ambigus étant à volonté.

On

On changera de même l'équation (B) en $2q'^2 = p'^2 - 7r'^2$, & on la multipliera enſuite par l'équation (*a*), ce qui donnera $109.4q'^2 = (15p' \pm 7r')^2 - 7(15r' \pm p')^2$; & comparant cette équation avec l'équation (A), on aura enfin

$$p = 15p' \pm 7r', \quad q = 15r' \pm p', \quad r = 2q',$$

de ſorte qu'il n'y aura plus qu'à ſubſtituer ſucceſſivement les valeurs de $p'$, $q'$, $r'$, & enſuite celles de $p''$, $q''$, $r''$.

Les valeurs de $p$, $q$, & $r$ étant ainſi trouvées, on aura $u = \frac{p}{r}$, & $t = \frac{q}{r}$; & l'équation propoſée $109 = u^2 - 7t^2$ ſera réſolue.

*Exemple* 2. Qu'on propoſe maintenant l'équation ſuivante

$$-207 = u^2 - 13t^2.$$

Puiſque le nombre 207 eſt diviſible par le carré 9, je ſuppoſerai (art. 4) $u = \frac{3p}{r}$, & $t = \frac{3q}{r}$, ce qui donnera l'équation

$$-23r^2 = p^2 - 13q^2 \quad \text{(A)}.$$

Or, en ſuivant le même procédé que dans l'exemple précédent, & marquant les équations analogues par les mêmes lettres, on trouvera les équations ſuivantes

$$-23.-1 = 6^2 - 13 \quad \text{(}a\text{)}$$
$$13r'^2 = p'^2 + q'^2 \quad \text{(B)}$$
$$\left.\begin{aligned} 13.2 &= 5^2 + 1 \\ 2.1 &= 1 + 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(}b\text{)}$$
$$-r''^2 = p''^2 - q''^2 \quad \text{(C)}$$

dont la derniere eſt, comme on le voit, dans le cas de l'art. 19. On aura donc, $p'' = x$, $q'' = y$, $r'' = z$, & $V = -1$; donc $M = 1$ & $N = -1$; par conſéquent $p'' = m^2 - n^2$, $q'' = m^2 + n^2$, $r = 2mn$.

Enſuite on mettra la même équation (C) ſous la forme des équations (*b*), en tranſpoſant les termes $r''^2$ & $q''^2$, en ſorte que l'on ait $q''^2 = p''^2 + r''^2$, & on multipliera ſucceſſivement cette équation par les deux équations (*b*). Pour cela on fera d'abord le produit de ces deux-ci, qui ſera exprimé par $13.4 = (5 \pm 1)^2 + (5 \mp 1)^2$, ou bien ſimplement $13.4 = 6^2 + 4^2$, c'eſt à dire, en diviſant par $4$, $13 = 3^2 + 2^2$; donc, multipliant l'équation précédente par celle-ci & comparant le produit à l'équation (B), on aura

$$p' = 3p'' \pm 2r'', \quad q' = 3r'' \mp 2p'', \quad r' = q''.$$

On tranſpoſera de même le premier & le dernier terme de l'équation (B), pour la réduire à la forme de l'équation (*a*), & on la multipliera enſuite par cette dernière équation, ce qui donnera une équation ſemblable à l'équation (A), de ſorte qu'on aura enfin

$$p = 6p' \pm 13r', \quad q = 6r' \pm p', \quad r = q'.$$

Ainſi l'équation propoſée ſera réſolue.

*Exemple* 3. Si l'équation propoſée étoit

$$51 = u^2 - 7t^2$$

dans laquelle $51$ & $7$ ne renferment aucun facteur carré, on feroit $u = \frac{p}{r}$, $t = \frac{q}{r}$, pour avoir

$$51r^2 = p^2 - 7q^2$$

& il faudroit d'abord ſatisfaire à l'équation $51A' = \alpha^2 - 7$; mais, en eſſayant pour $A'$ tous les nombres naturels juſqu'à $\frac{51}{7} + 1$, c'eſt à dire, juſqu'à $13$, on n'en trouve aucun qui étant multiplié par $51$ & augmenté de $7$ devienne un carré; d'où il s'enſuit que l'équation propoſée n'admet aucune ſolution rationelle.

*Exemple* 4. Soit encore propoſée l'équation

$$1459 = u^2 - 30t^2$$

comme

comme 1459 eſt un nombre premier, on fera d'abord $u = \frac{p}{r}$, $t = \frac{q}{r}$, pour avoir l'équation

$$1459r^2 = p^2 - 30q^2 \quad \text{(A)}.$$

Ayant donc ici $1459 = A$, $30 = B$, il faudra d'abord trouver un nombre $\alpha < \frac{1459}{2}$, & tel que $\alpha^2 - 30$ ſoit diviſible par 1459, ou bien un nombre $A' < \frac{1459}{4}$, & tel que $1459A' + 30 =$ à un carré, comme nous l'avons dit dans l'exemple 1^er.

Après quelques eſſais je trouve $A' = 241$, & $\alpha = 593$; & à l'aide de ces valeurs je forme cette premiere ſuite d'équations *ſecondaires* (art. 12)

$$\left.\begin{array}{rrl} 1459. & 241 = & 593^2 - 30 \\ 241. & 51 = & 111^2 - 30 \\ 51. & 1 = & 9^2 - 30 \end{array}\right\} \quad \text{(a)}.$$

Donc, puiſque 1 eſt $< 30$, on fera $C = 1$ (art. 15), & j'aurai cette ſeconde équation *principale*

$$30r'^2 = p'^2 - q'^2 \quad \text{(B)}$$

laquelle eſt déjà, comme l'on voit, dans le cas de l'art. 19.

J'aurai donc $p' = x$, $q' = y$, $r' = z$, & $30 = V$; donc, puiſque $30 = 2.3.5$, on aura $M = 1$, $N = 30$, ou $M = 2$, $N = 15$, ou $M = 3$, $N = 10$, ou enfin $M = 5$, $N = 6$; de ſorte qu'on aura

$$\begin{array}{lll} p' = m^2 + 30n^2, & q' = m^2 - 30n^2, & r' = 2mn \\ \text{ou} = 2m^2 + 15n^2, & = 2m^2 - 15n^2 & \\ \text{ou} = 3m^2 + 10n^2, & = 3m^2 - 10n^2 & \\ \text{ou} = 5m^2 + 6n^2, & = 5m^2 - 6n^2 & \end{array}$$

Ayant ainſi $p'$, $q'$ & $r'$, on mettra l'équation (B) ſous cette forme $q'^2 = p'^2 - 30r'^2$, & on la multipliera ſucceſſivement par chacune des équations (*a*). Pour faire cette multiplication plus aiſément, on multi-

pliera d'abord la 2^de & la 3^eme de ces équations enſemble, & faiſant pour abréger $\mu = 9.111 \pm 30$, $\nu = 111 \pm 9$, on aura $241.51^2 = \mu^2 - 3\nu^2$; enſuite on multipliera cette équation par la 1^ere des équations (*a*), & faiſant encore $\mu' = 593\mu \pm 30\nu$, $\nu' = 593\nu \pm \mu$, on aura $1459\,(241.51)^2 = \mu'^2 - 30\nu'^2$; équation qui étant multipliée maintenant par l'équation $q'^2 = p'^2 - 30r'^2$, donnera celle-ci: $1459\,(241.51q')^2 = (\mu'p' \pm 30\nu'r')^2 - (\mu'r' \pm \nu'p')^2$, laquelle étant comparée à l'équation (A), donnera enfin

$$p = \mu'p' \pm 30\nu'r'$$
$$q = \mu'r' \pm \nu'p'$$
$$r = 241.51q.$$

*Exemple* 5. Si on avoit l'équation

$$23 = u^2 + 5t^2,$$

on feroit toujours $u = \frac{p}{q}$, & $t = \frac{p}{r}$, ce qui donneroit celle-ci

$$23r^2 = p^2 + 5q^2 \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

& en opérant comme ci-deſſus, on trouveroit d'abord les équations

$$23.3 = 8^2 + 5 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$
$$-5r'^2 = p'^2 - 3q'^2 \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

mais, comme il faudroit enſuite ſatisfaire à l'équation $-5B' = \beta^2 - 3$, en prenant pour $-B'$ un nombre $< \frac{5}{4} + 1$, c'eſt à dire, en faiſant $B' = -1$, ou $-2$, & que ni l'une ni l'autre de ces deux valeurs étant multipliée par 5 & augmentée de 3, ne donne un carré, on en conclura que l'équation propoſée n'eſt ſuſceptible d'aucune ſolution rationelle; ainſi, quoique le nombre 23 puiſſe être un diviſeur d'une infinité de nombres de la forme $p^2 + 5q^2$, cependant il eſt impoſſible que le quotient de cette diviſion ſoit jamais un carré.

21. Ces exemples peuvent ſuffire pour faire connoître l'eſprit & l'uſage de notre méthode. Nous allons voir maintenant comment il fau-

il faudra s'y prendre lorſqu'il s'agira d'avoir des ſolutions en nombres entiers; car, quoique les ſolutions que fournit la méthode précédente ſoient générales, & renferment par conſéquent tous les nombres ſoit entiers, ſoit fractionaires, qui peuvent ſatisfaire à l'équation $A = u^2 - Bt^2$; cependant, comme les valeurs générales de $u$, & de $t$ ſe préſentent toujours ſous une forme fractionaire, il ſeroit ſouvent difficile & preſque impoſſible de les réduire à des nombres entiers. De ſorte que, pour ne rien laiſſer à déſirer ſur cette matiere, il eſt néceſſaire de donner auſſi une méthode particuliere pour réſoudre l'équation $A = u^2 - Bt^2$, lorſque $u$, & $t$ doivent être des nombres entiers.

## §. III.

*Réſolution de l'équation* $A = u^2 - Bt^2$

*lorſque* u, *&* t *doivent être des nombres entiers.*

22. Je remarque d'abord que, ſi le nombre A n'a aucun facteur carré, les nombres $u$, & $t$ doivent être néceſſairement premiers entr'eux; car, ſi ces nombres avoient un commun diviſeur $\varrho$, il eſt clair que, puiſque $u^2$ & $t^2$ ſeroient diviſibles par $\varrho^2$, il faudroit auſſi que A le fût. On voit par là que les nombres $t$, & $u$ ne ſauroient avoir d'autres diviſeurs communs que ceux dont les carrés ſont auſſi des diviſeurs de A.

Ainſi, ſi A ne contient qu'un ſeul facteur carré, comme ſi $A = al^2$, $l$ étant un nombre premier, & $a$ un nombre qui ne contient aucun facteur carré, les nombres $u$ & $t$ pourront être premiers entr'eux, ou bien pourront avoir le nombre $l$ pour commun diviſeur; & dans ce dernier cas, faiſant $u = lp$, $t = lq$, l'équation $A = u^2 - Bt^2$ deviendra $a = p^2 - Bq^2$, $p$, & $q$ étant premiers entr'eux. Si $A = al^2m^2$, $l$ & $m$ étant des nombres premiers, alors $u$, & $t$ pourront être premiers entr'eux, ou bien pourront être diviſibles tous les deux par $l$, ou par $m$, ou par $lm$, de ſorte qu'en faiſant ſucceſſivement $u = lp$, $t = lq$, $u = mp$, $t = mq$, & $u = lmp$, $t = lmq$, on aura $am^2 = p^2 - Bq^2$, ou $al^2 = p^2 - Bq^2$, ou $a = p^2 - Bq^2$; $p$, & $q$ étant

étant toujours premiers entr'eux. En général, ſi le nombre donné A eſt diviſible par un ou pluſieurs nombres carrés, & qu'on déſigne chacun de ces nombres par $\varrho^2$, on fera $u = \varrho p$, $t = \varrho q$, $\frac{A}{\varrho^2} = a$, & l'équation $A = u^2 - Bt^2$ ſe réduira à des équations de la forme, $a = p^2 - Bq^2$, ou $p$, & $q$ ſeront néceſſairement premiers entr'eux; ainſi, donnant ſucceſſivement à $\varrho$ toutes les valeurs poſſibles, dont la premiere ſera toujours l'unité, on aura toutes les transformées de l'équation propoſée; & par ce moyen on n'aura plus à réſoudre que des équations de la forme $A = p^2 - Bq^2$, $p$, & $q$ étant premiers entr'eux.

23. Soit donc propoſée l'équation

$$A = p^2 - Bq^2$$

dans laquelle $p$, & $q$ doivent être des nombres entiers & premiers entr'eux. Si B eſt un nombre poſitif, nous ſuppoſerons

1°. que B ne ſoit pas carré, le cas de $B = b^2$ pouvant toujours ſe réſoudre par la méthode de l'art. 3.

2°. nous ſuppoſerons d'abord que A pris poſitivement ſoit $> \sqrt{B}$, & nous donnerons enſuite la méthode pour réſoudre l'équation propoſée lorſque $A < \sqrt{B}$, (art. 29 & ſuiv.)

Si B eſt un nombre négatif $-b$, alors nous ſuppoſerons toujours que A ſoit $> b$; autrement l'équation $A = p^2 + bq^2$ ne ſauroit ſubſiſter qu'en faiſant $p = 0$, ou $q = 0$; de ſorte que ce cas n'auroit aucune difficulté: voyez plus bas l'art. 27.

Enfin nous ſuppoſerons que A & B n'aient aucun diviſeur commun carré; car ſi A & B étoient diviſibles à la fois par $\varrho^2$, il eſt clair que $p$ devroit être auſſi diviſible par $\varrho$, de ſorte que le facteur commun $\varrho^2$ s'évanouiroit de lui-même par la diviſion.

Cela poſé, ſi on multiplie l'équation $A = p^2 - Bq^2$, par $p'^2 - Bq'^2$, & qu'on prenne pour $p'$ & $q'$ des nombres entiers tels que l'on ait

$$pq' - qp' = \pm 1$$

on

on aura comme dans l'art. 6.

$$A(p'^2 - Bq'^2) = (pp' - Bqq')^2 - B,$$

ou bien en faiſant

$$A' = p'^2 - Bq'^2, \quad \alpha = pp' - Bqq',$$

on aura l'équation $AA' = \alpha^2 - B$.

Or ſoit $\frac{m}{n}$ la fraction que nous avons déſignée, dans l'art. 7, par $\frac{p'}{q'}$, & l'on aura (art. 8), pour les valeurs générales de $p'$, & $q'$ dans l'équation $pq' - qp' = \pm 1$,

$$p' = \mu p \pm m, \qquad q' = \mu q \pm n$$

$\mu$ étant un nombre quelconque entier.

Donc, ſubſtituant ces valeurs dans l'expreſſion de $\alpha$, on aura $\alpha = \mu(p^2 - Bq^2) \pm (pm - Bqn)$, ou bien, en faiſant $a = mp - Bnq$

$$\alpha = \mu A \pm a.$$

De ſorte qu'on pourra toujours prendre $\alpha < \frac{A}{2}$ (art. 10); ce qui rendra $A' < \frac{A}{4}$, ſi B eſt poſitif, & $< \frac{A}{4} + 1$, ſi B eſt négatif (art. 13 & 14), & par conſéquent toujours $A' < A$, en regardant A & $A'$ comme poſitifs.

De là il s'enſuit que, pour que l'équation propoſée puiſſe avoir lieu, c'eſt à dire, que le nombre A ſoit de la forme $p^2 - Bq^2$, il faut que ce nombre ſoit un diviſeur d'un nombre tel que $\alpha^2 - B$, $\alpha$ étant $< \frac{A}{2}$ (abſtraction faite des ſignes de $\alpha$ & de A), & que de plus le quotient $A'$ de la diviſion de $\alpha^2 - B$ par A ſoit auſſi de la forme $p'^2 - Bq'^2$.

Donc, ſi parmi les nombres naturels moindres que $\frac{A}{2}$, on n'en trouve aucun dont le carré diminué de B ſoit diviſible par A, on en conclura que l'équation eſt impoſſible.

Si l'on en trouve un, on prendra ce nombre pour $\alpha$, & l'on aura à réſoudre une nouvelle équation de cette forme $A' = p'^2 - Bq'^2$, dans laquelle $A'$ ſera $< A$.

Si cette derniere équation eſt réſoluble, alors connoiſſant les valeurs de $p'$ & $q'$, on trouvera celles de $p$, & $q$ par les deux équations $\alpha = pp' - Bqq'$ & $pq' - qp' = \pm 1$, leſquelles donnent à cauſe de $p'^2 - Bq'^2 = A'$,

$$p = \frac{\alpha p' \mp Bq'}{A'}, \quad q = \frac{\alpha q' \mp p'}{A'}.$$

Et ſi ces expreſſions donnent des nombres entiers, on aura la réſolution de l'équation propoſée; ſinon elle ne ſera pas réſoluble.

Si on trouvoit pluſieurs nombres qu'on pût prendre pour $\alpha$, alors chacun d'eux donneroit une équation de la forme $A' = p'^2 - Bq'^2$, & chacune de ces équations pourroit donner enſuite une ou pluſieurs ſolutions de la propoſée; d'où l'on voit que, pour avoir toutes les ſolutions poſſibles, il eſt néceſſaire de connoître tous les nombres $\alpha$, qui étant $< \frac{A}{2}$ ſont tels que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par A; & d'examiner en particulier chacune des équations $A' = p'^2 - Bq'^2$ qui en réſulteront.

Au reſte, lorſqu'on aura trouvé un ſeul nombre $\alpha$ qui ait les conditions requiſes, on pourra par ſon moyen trouver tous les autres.

24. Suppoſons en effet qu'on ait trouvé un nombre $\alpha < \frac{A}{2}$ & tel que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par A, & ſoit $\beta$ une autre valeur de $\alpha$, en ſorte que l'on ait $\beta < \frac{A}{2}$, & $\beta^2 - B$ diviſible par A, (A, $\alpha$, & $\beta$ étant ſuppoſés poſitifs,) il eſt clair que puiſque $\alpha^2 - B$ & $\beta^2 - B$ ſont diviſibles en même tems par A, il faudra que $\beta^2 - \alpha^2$ le ſoit auſſi, c'eſt à dire que $(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)$ ſoit diviſible par A.

Donc

Donc 1°. ſi A eſt un nombre premier, il faudra que l'un ou l'autre des facteurs $\beta + \alpha$, $\beta - \alpha$ ſoit diviſible par A, ce qui ne ſe peut tant que $\alpha < \frac{A}{2}$ & $\beta < \frac{A}{2}$; donc, dans ce cas, il ne pourra abſolument y avoir qu'un ſeul nombre $\alpha$ qui ait les conditions requiſes.

2°. Si A eſt compoſé, en ſorte que l'on ait $A = ab$, $a$, & $b$ étant deux facteurs quelconques de A, alors il ſuffit que l'un des facteurs $\beta + \alpha$, $\beta - \alpha$ ſoit diviſible par $a$, & l'autre par $b$.

Je remarque d'abord qu'on ne peut prendre pour $a$, & $b$ que des nombres premiers entr'eux, ou au moins dont le plus grand commun diviſeur ſoit 2.

Car, ſi $a$, & $b$ avoient un commun diviſeur $\varrho$ autre que 2, il faudroit que $\alpha$, & $\beta$ fuſſent auſſi diviſibles par $\varrho$; donc A étant diviſible par $\varrho^2$ & $\alpha$ par $\varrho$, il eſt clair que B devroit être auſſi diviſible par $\varrho^2$; de ſorte que A & B ſeroient diviſibles à la fois par $\varrho^2$, ce qui eſt contre l'hypotheſe (art. 23).

Suppoſons donc en premier lieu que $a$, & $b$ ſoient premiers entr'eux, on ſera $\beta + \alpha = \mu a$, $\beta - \alpha = \nu b$, & l'on aura $2\alpha = \mu a - \nu b$. Soit $\frac{a'}{b'}$ la fraction la plus proche de $\frac{a}{b}$ (art. 8), & les nombres $\mu$, & $\nu$ ſeront exprimés en général de cette maniere

$$\mu = mb \pm 2\alpha b', \quad \nu = ma \pm 2\alpha a',$$

$m$ étant un nombre quelconque entier, & le ſigne ſupérieur, ou l'inférieur ayant lieu ſuivant que $\frac{a'}{b'} <$ ou $> \frac{a}{b}$. Donc, puiſque $\beta = \mu a - \alpha$, & $ab = A$, on aura $\beta = -mA \pm 2\alpha ab' - \alpha$.

Ainſi faiſant pour plus de ſimplicité

$$\omega = (1 \mp 2ab')\,\alpha$$

le ſigne ſupérieur étant pour le cas où $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$, & l'inférieur pour celui où $\frac{a'}{b'} > \frac{a}{b}$, on aura $\beta = mA - \omega$.

Si au lieu de ſuppoſer $\beta + \alpha = \mu a$, $\beta - \alpha = \nu b$, on ſuppoſe $\beta + \alpha = \mu b$, $\beta - \alpha = \nu a$, on trouvera de la même maniere $\beta = mA + \omega$.

De ſorte que la conſidération des deux facteurs premiers $a$, & $b$, donnera en général $\beta = mA \pm \omega$,

& il n'y aura plus qu'à déterminer $m$, & le ſigne de $\omega$, en ſorte que $\beta$ ſoit $< \frac{A}{2}$, ce qui peut toujours ſe faire, mais d'une ſeule maniere, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut.

On voit par là que chaque couple de facteurs de A premiers entr'eux, donnera un nouveau nombre $\beta$, & n'en donnera abſolument qu'un ſeul; de ſorte que, ſi A eſt un nombre premier, ou une puiſſance d'un nombre premier, il ne pourra y avoir qu'une ſeule valeur de $\alpha$; ſi A a deux facteurs premiers, ou qui ſoient des puiſſances quelconques de deux nombres premiers, il pourra y avoir ſeulement deux valeurs de $\alpha$; ſi A contient trois facteurs premiers, ou qui ſoient des puiſſances quelconques de trois nombres premiers, il ne pourra y avoir que quatre valeurs de $\alpha$, & ainſi de ſuite; d'où il s'enſuit en général que, ſi le nombre des facteurs premiers de A eſt $n$, ſoit que ces facteurs ſoient des nombres premiers, ou des puiſſances quelconques de nombres premiers, le nombre des valeurs de $\alpha$ ſera ou nul, ou égal a $2^{n-1}$.

Suppoſons en ſecond lieu que $a$, & $b$ aient pour plus grand commun diviſeur, le nombre 2; & faiſons $a = 2f$, $b = 2g$, $f$ & $g$ étant premiers entr'eux; en ſorte que l'on ait $A = 4fg$.

Dans ce cas, on pourra faire $\beta + \alpha = 2\mu f$ & $\beta - \alpha = 2\nu g$, ſans que $\alpha$, & $\beta$ ſoient diviſibles par 2, puiſqu'il n'y a qu'à ſuppoſer $\alpha$, & $\beta$ impairs; on aura donc $\alpha = \mu f - \nu g$, d'où, en ſuppoſant que $\frac{f'}{g'}$ ſoit la fraction la plus proche de $\frac{f}{g}$, & faiſant pour abréger $\theta = \alpha (1 \mp 2fg')$,

le

le ſigne ſupérieur étant pour le cas ou $\frac{f'}{g'} < \frac{f}{g}$, & le ſigne inférieur pour le cas ou $\frac{f'}{g'} > \frac{f}{g}$, on trouvera

$$\beta = \frac{m\mathrm{A}}{2} \pm \theta.$$

Ici il eſt viſible qu'on peut déterminer le nombre $m$, & le ſigne de $\theta$, de deux manieres différentes, en ſorte que l'on ait $\beta < \frac{\mathrm{A}}{2}$; ce qui donnera par conſéquent deux valeurs de $\beta$; mais il peut arriver que ces valeurs ſe trouvent déjà compriſes dans celles qui réſultent de la conſidération des facteurs premiers de A; on pourroit même déterminer en général le cas où les valeurs de $\beta$ réſultantes de cette derniere formule ſeront toutes, ou en partie ſeulement, identiques avec celles qu'on pourra déduire de la formule précédente; mais ce détail nous meneroit trop loin, & d'ailleurs il ſeroit plus curieux qu'utile.

Nous nous contenterons de remarquer que, lorſque le nombre A eſt diviſible par 4, alors ſi $\beta$ eſt une des valeurs de $\alpha$, $\frac{\mathrm{A}}{2} - \beta$ en ſera toujours une auſſi; car ſoit $\mathrm{A} = 4\mathrm{E}$, & $\beta^2 - \mathrm{B}$ diviſible par $4\mathrm{E}$, prenant au lieu de $\beta$ le nombre $2\mathrm{E} - \beta$, on aura

$$(2\mathrm{E} - \beta)^2 - \mathrm{B} = 4\mathrm{E}^2 - 4\mathrm{E}\beta + \beta^2 - \mathrm{B},$$

qui eſt évidemment diviſible par $4\mathrm{E}$.

25. Conſidérons maintenant l'équation de l'art. 23,

$$\mathrm{A}' = p'^2 - \mathrm{B}q'^2,$$

& comme les nombres $p'$, & $q'$ de cette équation ſont déterminés par la condition que $pq' - qp' = \pm 1$ (art. 23), il eſt facile de voir que ces nombres ſeront néceſſairement premiers entr'eux; de ſorte que l'équation dont il s'agit ſera parfaitement analogue à l'équation précé-

dente $A = p^2 - Bq^2$, & par conſéquent ſera ſuſceptible d'opérations ſemblables; donc

1°. ſi B eſt poſitif, & que $A'$, conſidéré comme poſitif, ſoit $< \sqrt{B}$, cette équation ſera déjà dans le cas que nous traiterons plus bas, (art. 29).

2°. Si B eſt négatif & $= -b$, & que $A'$ ſoit $= b$, ou $< b$, on aura le cas de l'art. 27.

Ainſi nous ſuppoſerons encore ici que $A'$ regardé comme poſitif ſoit $> \sqrt{B}$, dans le cas de B poſitif, & $> b$ dans le cas de $B = -b$; & on pourra traiter l'équation $A' = p'^2 - Bq'^2$, comme on a fait ci-deſſus l'équation $A = p^2 - Bq^2$.

On multipliera donc cette équation par $p''^2 - Bq''^2$, & on déterminera $p''$ & $q''$, en ſorte que l'on ait

$$p'q'' - q'p'' = \pm 1$$

ce qui, en faiſant pour abréger

$$A'' = p''^2 - Bq''^2, \quad \alpha' = p'p'' - Bq'q'',$$

donnera l'équation

$$A'A'' = \alpha'^2 - B.$$

Or, puiſqu'on a déjà $pq' - qp' = \pm 1$ (art. 23), on aura, en ajoutant cette équation à celle-ci $p'q'' - q'p'' = \pm 1$, ou en l'en retranchant, $(q'' \mp q)\, p' - (p'' \mp p)\, q' = 0$; d'où $\frac{p'' \mp p}{q'' \mp q} = \frac{p'}{q'}$, & par conſéquent

$$p'' = \mu' p' \pm p, \quad q'' = \mu' q' \pm q$$

$\mu'$ étant un nombre entier quelconque.

Si on ſubſtitue ces valeurs de $p''$ & $q''$ dans l'expreſſion de $\alpha'$, on aura $\alpha' = \mu' (p'^2 - Bq'^2) \pm (pp' - Bqq')$,

ou bien $$\alpha' = \mu' A' \pm \alpha.$$

Ainſi

Ainſi on pourra déterminer $\alpha'$, en ſorte que $\alpha' < \frac{A'}{2}$, ce qui rendra $A'' < A'$ (art. 13 & 14), en regardant $\alpha'$, $A'$ & $A''$ comme poſitifs pour éviter toute équivoque; & il eſt facile de voir qu'on ne ſauroit ſatisfaire à cette condition que d'une ſeule maniere, de ſorte que la valeur de $\mu'$ & le ſigne de $\alpha$ ſe trouveront par là entierement déterminés; & comme les ſignes ambigus de $p$, & $q$ dans les expreſſions de $p''$ & $q''$ doivent être les mêmes que celui de $\alpha$ dans l'expreſſion de $\alpha'$, il ne reſtera plus rien d'arbitraire dans ces expreſſions.

Par ce moyen la réſolution de l'équation $A' = p'^2 - Bq'^2$ ſera réduite à celle de l'équation $A'' = p''^2 - Bq''^2$, dans laquelle $A'' < A'$, (abſtraction faite des ſignes de $A'$ & de $A''$.)

En effet, dès qu'on aura trouvé les valeurs de $p''$ & de $q''$, il n'y aura qu'à chercher celles de $p'$ & $q'$ à l'aide des équations

$$\alpha' = p'p'' - Bq'q'' \quad \& \quad p'q'' - q'p'' = \pm 1$$

leſquelles donnent

$$p' = \frac{\alpha' p'' \mp Bq''}{A''}, \quad q' = \frac{\alpha' q'' \mp p''}{A''};$$

ſi ces expreſſions donnent, (en prenant à volonté les ſignes ſupérieurs, ou inférieurs,) des nombres entiers, alors on aura par les expreſſions de $p''$ & $q''$ trouvées ci-deſſus

$$\pm p = p'' - \mu' p', \quad \pm q = q'' - \mu' q',$$

& le probleme ſera réſolu.

Mais, ſi les expreſſions de $p'$, & $q'$ ne donnent que des nombres rompus, ce ſera une marque que l'équation propoſée n'eſt point réſoluble en entiers.

Maintenant, puiſque l'on a $p'q'' - q'p'' = \pm 1$, il eſt viſible que $p''$ & $q''$ ſeront premiers entr'eux; d'où il s'enſuit que l'équation $A'' = p''^2 - Bq''^2$, ſera parfaitement ſemblable à l'équation $A' = p'^2 - Bq'^2$, & que par conſéquent on y pourra appliquer

les

les mêmes raiſonnemens, & les mêmes opérations que nous venons de faire ſur celle-ci, & ainſi de ſuite.

26. Donc, ſi on fait comme dans l'art. 12

$$\left.\begin{array}{lll} A\,A' = \alpha^2 - B, & \alpha < \frac{A}{2} & \\ A'A'' = \alpha'^2 - B, & \alpha' = \mu' A' \pm \alpha < \frac{A'}{2} & \\ A''A''' = \alpha''^2 - B, & \alpha'' = \mu'' A'' \pm \alpha' < \frac{A''}{2} & \end{array}\right\} \cdots (\alpha)$$

&c. &c.

(c'eſt à dire $\alpha < \frac{A}{2}$, $\alpha' < \frac{A'}{2}$, $\alpha'' < \frac{A''}{2}$ &c. en regardant $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ &c. & A, A', A'' &c. comme tous poſitifs,)

on aura cette ſuite d'équations

$$\left.\begin{array}{l} A = p^2 - Bq^2 \\ A' = p'^2 - Bq'^2 \\ A'' = p''^2 - Bq''^2 \\ A''' = p'''^2 - Bq'''^2 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (\beta)$$

&c.

dans leſquelles

$$\left.\begin{array}{ll} \pm p = p'' - \mu' p', & \pm q = q'' - \mu' q' \\ \pm p' = p''' - \mu'' p'', & \pm q' = q''' - \mu'' q'' \\ \pm p'' = p^{IV} - \mu''' p''', & \pm q'' = q^{IV} - \mu''' q''' \end{array}\right\} \cdots (\gamma)$$

&c &c.

où il faudra toujours ſe ſouvenir que les ſignes ambigus de $p$, $q$, & $\alpha$ doivent être les mêmes, ainſi que ceux de $p'$, $q'$, $\alpha'$ &c.

De plus, on aura auſſi en général les équations ($n$, & $n-1$ dénotant des quantiemes, & non des expoſans.)

$p^{n-1}$

$$\left.\begin{aligned} p^{n-1} &= \frac{\alpha^{n-1}p^n \pm Bq^n}{A^n} \\ q^{n-1} &= \frac{\alpha^{n-1}q^n \pm p^n}{A^n} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (\delta)$$

les ſignes ambigus étant à volonté, pourvu qu'on les prenne de même dans les deux équations.

Donc, ſi on peut réſoudre une quelconque des équations ($\beta$) comme $A^n = (p^n)^2 - B(q^n)^2$, c'eſt à dire trouver les valeurs de $p^n$, & $q^n$, on pourra trouver auſſi par les équations ($\delta$) les valeurs des quantités précédentes $p^{n-1}$, & $q^{n-1}$, & ces quatre valeurs étant connues, on pourra par le moyen des formules ($\gamma$) remonter aux valeurs de $p$, & $q$ qui réſolvent l'équation $A = p^2 - Bq^2$; & qui ſeront néceſſairement des nombres entiers, ſi $p^n$, $q^n$, $p^{n-1}$ & $q^{n-1}$ le ſont.

Réciproquement, ſi l'équation $A^n = (p^n)^2 - B(q^n)^2$ n'admet point de ſolution en nombres entiers, ou que les expreſſions de $p^{n-1}$, $q^{n-1}$ ne donnent point de nombres entiers, on en devra conclure que l'équation $A = p^2 - Bq^2$ n'eſt point réſoluble en nombres entiers.

Au reſte il faut remarquer que, comme on peut prendre également $\alpha$ poſitif, ou négatif, chaque valeur de $\alpha$ donnera deux ſuites différentes de formules telles que ($\alpha$) & ($\gamma$), qu'il faudra conſidérer chacune en particulier pour avoir toutes les ſolutions poſſibles de l'équation $A = p^2 - Bq^2$; mais, ſans être obligé de faire un nouveau calcul, il ſuffira d'obſerver qu'en prenant $\alpha$ négatif, les formules ($\alpha$) reſteront les mêmes en changeant ſimplement les ſignes de $\alpha'$, $\alpha''$ &c. & de $\mu'$, $\mu''$ &c., d'où il s'enſuit qu'il n'y aura d'autre changement à faire aux formules ($\gamma$) que de prendre $\mu'$, $\mu''$, $\mu'''$ &c. avec des ſignes contraires.

*Analiſe du cas où* B *eſt négatif.*

27. Conſidérons d'abord le cas de B négatif, parce qu'il eſt plus facile à réſoudre que celui de B poſitif, & on prouvera, comme

on a fait dans l'art. 14, que la ſérie des quantités A, A′, A″, A‴ &c. pourra être continuée juſqu'à ce que l'on arrive à un terme comme $A^n$, ($n$ dénotant un quantieme & non pas une puiſſance,) lequel ſoit égal ou moindre que B conſidéré comme poſitif, c'eſt à dire qu'en ſuppoſant $B = -b$, on aura $A^n = b$ ou $< b$.

Soit 1°. $A^n = b$, & l'équation $A^n = (p^n)^2 + b(q^n)^2$ ne pourra ſubſiſter, à moins que $(p^n)^2$ ne ſoit diviſible par $b$; donc, ſi $b = c^2 d$, on aura néceſſairement $p^n = cdr$; & l'équation $b = (p^n)^2 + b(q^n)^2$ deviendra en diviſant par $b$, $1 = dr^2 + (q^n)^2$; laquelle donne ou $r = o$ & par conſéquent $p^n = o$, & $q^n = 1$; ou $q^n = o$, & $dr^2 = 1$, c'eſt à dire $r = 1$, & $d = 1$; donc $p^n = c$; de ſorte que ce ſecond cas ne peut avoir lieu à moins que $b$ ne ſoit carré; or, ſi on cherche dans ce même cas les valeurs de $p^{n-1}$ & $q^{n-1}$ par les formules de l'art. préc., on trouvera $q^{n-1} = \pm \frac{c}{c^2} = \pm \frac{1}{c}$; d'où l'on voit que $q^{n-1}$ ne ſauroit être un nombre entier, à moins que $c$ ne ſoit $= 1$, & qu'ainſi le probleme ne peut être réſolu dans le cas dont il s'agit que lorſque $c = 1$, ce qui donne $b = 1$, & $p^n = 1$, $q^n = 0$. Or, lorſque $b = 1$, il eſt clair que dans l'équation $A^n = (p^n)^2 + (q^n)^2$, les quantités $p^n$ & $q^n$ peuvent s'échanger entr'elles, & que la même choſe a lieu auſſi à l'égard des autres équations analogues; de ſorte que la ſuppoſition de $p^n = 1$, & $q^n = 0$, rentre dans celle de $p^n = 0$ & $q^n = 1$, que nous allons examiner.

On aura donc en général, lorſque $A^n = b$, $p^n = 0$ & $q^n = 1$, d'où l'on trouvera (art. préc.) $p^{n-1} = \pm 1$, $q^{n-1} = \frac{\alpha^{n-1}}{b}$; de ſorte qu'il faudra dans ce cas, pour que le probleme ſoit réſoluble, que $\alpha^{n-1}$ ſoit diviſible par $b$; ſi cette condition a lieu, alors on aura

$$p^n = 0, \quad q^n = 1$$

$$p^{n-1} = \pm 1, \quad q^{n-1} = \frac{\alpha^{n-1}}{b}$$

&

& on pourra en remontant trouver les valeurs de $p$, & $q$; ſur quoi il eſt bon de remarquer que, quoique l'on ait trouvé $p^{n-1} = \pm 1$, il ſeroit cependant inutile de faire $p^{n-1} = -1$, parce qu'il eſt facile de voir qu'à cauſe de $p^n = 0$, les valeurs de $p^{n-3}$, $p^{n-5}$ &c. $p$ ne différeroient que par les ſignes, de celles qu'on a en faiſant $p^{n-1} = 1$.

Soit 2°. $A^n < b$; dans ce cas, il eſt viſible que l'équation $A^n = (p^n)^2 + b(q^n)^2$ ne ſauroit avoir lieu, à moins que l'on n'ait $q^n = 0$, & $A^n = (p^n)^2$; ce qui donnera $p^{n-1} = \frac{\alpha^{n-1}}{p^n}$, $q^{n-1} = \pm \frac{1}{p^n}$; d'où l'on voit qu'à moins que l'on n'ait $p^n = 1$, & par conſéquent auſſi $A^n = 1$, les valeurs de $p^{n-1}$ & de $q^{n-1}$ ne pourront être des nombres entiers.

Donc, ſi on pouſſe la ſérie des nombres A, A′, A″ &c. juſqu'à ce que l'on parvienne à un terme $A^n$ moindre que $b$, & que ce terme ſoit différent de l'unité, on en devra conclure que l'équation propoſée $A = p^2 + bq^2$ n'eſt point réſoluble en nombres entiers.

Si au contraire on a $A^n = 1$, alors on aura, en ne donnant à $q^{n-1}$ que le ſigne +, par une raiſon ſemblable à celle que nous avons dite ci-deſſus à l'égard de $p^{n-1}$,

$$p^n = 1, \qquad q^n = 0$$
$$p^{n-1} = \alpha^{n-1}, \qquad q^{n-1} = 1$$

& on pourra en remontant trouver les valeurs cherchées de $p$ & $q$.

De là on voit que chaque valeur de $\alpha$ (art. 23) ne pourra donner qu'une ſeule ſolution de l'équation $A = p^2 - Bq^2$, lorſque B eſt négatif, de ſorte que, comme le nombre des valeurs que peut avoir la quantité $\alpha$ eſt néceſſairement limité, celui des ſolutions de l'équation $A = p^2 + bq^2$ le ſera auſſi.

Ainſi, ſi A eſt un nombre premier, ou une puiſſance quelconque d'un nombre premier autre que 2, l'équation $A = p^2 + bq^2$ ne pourra avoir qu'une ſeule ſolution en nombres entiers (voyez plus haut l'art. 24).

Quant aux valeurs négatives de $\alpha$, il eſt facile de voir par les formules $(\gamma)$, qu'en changeant les ſignes de $\mu'$, $\mu''$, $\mu'''$ &c. & de $\alpha^{n-1}$, les valeurs de $p$, & $q$ demeureront les mêmes, ou changeront ſimplement de ſigne, à cauſe que l'on a $p^n = 0$, $p^{n-1} = 1$, $q^n = 1$, $q^{n-1} = -\frac{\alpha^{n-1}}{b}$, ou $p^n = 1$, $p^{n-1} = -\alpha^{n-1}$, $q^n = 0$, $q^{n-1} = 1$. Ainſi la conſidération de $\alpha$ négatif ſera tout à fait inutile, lorſque B eſt un nombre négatif.

*Analiſe du cas où B eſt poſitif.*

28. Suppoſons préſentement que B ſoit un nombre poſitif; on prouvera d'abord par un raiſonnement ſemblable à celui de l'art. 13, que les nombres $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ &c. iront en diminuant juſqu'à ce que l'on arrive à un nombre comme $\alpha^n$ qui ſoit $= \sqrt{B}$, ou $< \sqrt{B}$; mais, comme B eſt ſuppoſé non carré (art. 23), il eſt impoſſible que $\alpha^n = \sqrt{B}$, de ſorte qu'on aura néceſſairement $\alpha^n < \sqrt{B}$.

On aura donc (art 26) une équation de cette forme $A^n A^{n+1} = (\alpha^n)^2 - B$, ou bien $-A^n A^{n+1} = B - (\alpha^n)^2$, dans laquelle, à cauſe de $(\alpha^n)^2 < B$, il eſt clair que les nombres $A^n$ & $A^{n+1}$ devront être de ſignes différens; & que de plus l'un de ces nombres, abſtraction faite de ſon ſigne, devra être $< \sqrt{B}$.

Faiſons pour plus de ſimplicité $\alpha^n = e$, & nommons $\pm E$ l'un des nombres $A^n$, $A^{n+1}$, & $\mp D$ l'autre, D & E étant des nombres poſitifs & E étant $< \sqrt{B}$; en ſorte que l'on ait l'équation

$$DE = B - e^2,$$

& comme l'on a par les formules $(\beta)$ $A^n = (p^n)^2 - B(q^n)^2$, & $A^{n+1} = (p^{n+1})^2 - B(q^{n+1})^2$, il eſt clair que les nombres D & E ſeront de ces formes

$$\mp D = \rho^2 - B\sigma^2, \quad \pm E = r^2 - Bs^2.$$

Ainſi la queſtion ſe réduit à réſoudre ces deux équations dans leſquelles $DE < B$; en effet les valeurs de $\rho$, $\sigma$, $r$ & $s$ étant connues, on aura celles

celles de $p''$, $q''$, $p''^{+1}$, $q''^{+1}$, & on pourra à l'aide des formules ($\gamma$) remonter aux valeurs de $p$, & $q$.

Il ſuffit même de réſoudre l'une de ces deux équations; car il eſt facile de voir par les art. 23 & 25 que les quantités $\varrho$, $\sigma$, $r$ & $s$ doivent être telles que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} r\sigma - s\varrho = \pm 1 \\ r\varrho - Bs\sigma = \epsilon \end{array}\right\} \quad - - - - - - \quad (\epsilon)$$

par où l'on pourra déterminer $\varrho$, & $\sigma$, dès qu'on aura $r$, & $s$, ou *vice verſâ*.

Il faut remarquer ici que l'ambiguité des ſignes dans l'équation $r\sigma - s\varrho = \pm 1$ n'eſt point arbitraire, mais qu'elle doit répondre à celle de l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$; en effet cette équation étant combinée avec l'équation $\mp D = \varrho^2 - B\sigma^2$, donne $\pm (E\sigma^2 + Ds^2) = r^2\sigma^2 - s^2\varrho^2 = (r\sigma + s\varrho)(r\sigma - s\varrho)$, d'où l'on voit que la quantité $r\sigma - s\varrho$ doit être néceſſairement poſitive ou négative ſuivant que l'on a le ſigne ſupérieur, ou l'inférieur, dans l'équation dont il s'agit.

A l'égard de $\epsilon$, c'eſt à dire de $\alpha^n$, elle peut être poſitive ou négative, & il faudra même la faire ſucceſſivement poſitive & négative pour avoir toutes les ſolutions poſſibles de l'équation propoſée (art. 26), en ayant attention, comme nous l'avons fait obſerver dans cet article, de changer les ſignes de $\mu'$, $\mu''$, $\mu'''$ &c. dans les formules ($\gamma$) lorſqu'on prendra $\epsilon$ négative, tout le reſte demeurant d'ailleurs le même.

29. Conſidérons donc l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, dans laquelle $E < \sqrt{B}$, & ſuppoſons pour un moment que l'on connoiſſe déjà les nombres entiers $r$, & $s$ qui y ſatisfont; il eſt d'abord clair que ces nombres ſeront premiers entr'eux en vertu de la premiere des équations ($\epsilon$) de l'art. préc.; enſuite il eſt facile de prouver que l'on pourra toujours former deux ſuites décroiſſantes de nombres entiers, comme $r$, $r'$, $r''$, $r'''$ &c. & $s$, $s'$, $s''$, $s'''$ &c. dont la premiere

commence par $r$, & ſe termine par 1, & dont la ſeconde commence par $s$ & ſe termine par $o$, & qui ſoient de plus telles que l'on ait

$$rs' - sr' = \pm 1, \quad r's'' - s'r'' = \mp 1,$$
$$s''s''' - s''r''' = \pm 1 \text{ &c.}$$

Car, ſi on diviſe le nombre $r$ par le nombre $s$, (il eſt clair que $r$ doit être $> s$, à cauſe que l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ donne $\frac{r}{s} = \sqrt{\left(B \pm \frac{E}{s^2}\right)}$, & que $E < \sqrt{B}$), qu'enſuite on diviſe $s$ par le reſte de la premiere diviſion, & qu'on continue toujours de diviſer le reſte précédent par le dernier reſte, juſqu'à ce que l'on arrive à une diviſion exacte, & qu'on nomme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ &c. $\omega$ les quotiens qui en réſultent, on aura, comme l'on ſait

$$\frac{r}{s} = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} \text{ &c.} + \frac{1}{\omega}$$

où l'on remarquera qu'à cauſe que les nombres $r$ & $s$ ſont premiers entr'eux, le dernier reſte ſera néceſſairement l'unité, & par conſéquent le dernier quotient ſera plus grand que l'unité, de ſorte qu'on aura $\omega = 2$ ou $> 2$.

Cette fraction continue étant coupée ſucceſſivement au premier, au ſecond, au troiſieme &c. de ſes termes, donnera autant de fractions particulieres, leſquelles, en y ajoutant au commencement la fraction $\frac{1}{0}$ formeront cette ſuite de fractions;

$$\frac{1}{0}, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \text{ &c. } \frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{s},$$

où

où l'on aura

$$a = \alpha \qquad b = 1$$
$$c = \beta a + 1 \qquad d = \beta b$$
$$e = \gamma c + a \qquad f = \gamma d + b$$
$$\text{\&c} \qquad \text{\&c.}$$
$$r = \omega p + m \qquad s = \omega q + n$$

de ſorte qu'on aura auſſi

$$1b - 0a = 1$$
$$ad - bc = -1$$
$$cf - de = 1$$
$$\text{\&c.}$$
$$mq - np = \pm 1$$
$$ps - qr = \mp 1$$

De plus, ces fractions ſeront convergentes vers la fraction $\frac{r}{s}$, avec cette différence que les fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{c}{d}$, &c. qui occupent les places impaires ſeront toujours plus grandes que $\frac{r}{s}$, & qu'au contraire les fractions qui occupent les places paires comme $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ &c. ſeront toutes plus petites que $\frac{r}{s}$; comme il eſt facile de le démontrer par la nature même de ces fractions. Au reſte, nous n'aurons pas beſoin de trouver ces fractions; il nous ſuffira de conſidérer qu'il eſt toujours poſſible de les trouver, quelle que ſoit la fraction donnée $\frac{r}{s}$.

M. Huygens eſt, je crois, le premier qui ait imaginé de réduire une fraction quelconque en une fraction continue, & d'en déduire une ſuite de fractions particulieres convergentes vers la fraction donnée

née (voyez ſon traité de *Autoniate planetario*). D'autres Géometres ont enſuite étendu & perfectionné cette théorie, ſurtout M. Euler dans ſon *Introductio in Analyſin*, & dans pluſieurs excellens Mémoires imprimés parmi ceux de l'Académie de Petersbourg; cette matiere ſe trouve auſſi très bien développée dans l'Algebre de M. Saunderſon qui emploie une méthode indépendante des fractions continues.

Maintenant, ſi dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, c'eſt le ſigne ſupérieur qui a lieu, en ſorte que l'on doive avoir $rs' - sr' = 1$, $r's'' - s'r'' = -1$, $r''s''' - s''r''' = 1$ &c. & que le nombre des termes dans la ſérie $\frac{1}{0}$, $\frac{a}{b}$, &c. $\frac{r}{s}$ ſoit impair, il eſt clair qu'il n'y aura qu'à faire $r' = p$, $r'' = m$ &c. $s' = q$, $s'' = n$ &c. mais, ſi le nombre des termes eſt pair, alors on fera $r' = r - p$, $r'' = p$, $r''' = m$ &c. $s' = s - q$, $s'' = q$, $s''' = n$ &c.; en effet on aura dans ce cas $mq - np = -1$, $ps - qr = 1$; donc $rs' - sr' = -rq + sp = 1$, $r's'' - s'r'' = rq - sp = -1$, $r''s''' - s''r''' = pn - qm = 1$ &c.; or, comme $r = \omega p + m$, & $s = \omega q + n$, & que $\omega$ eſt $= ou > 2$, on aura, en faiſant $\omega - 1 = \psi$, $r' = \psi p + m$, $s' = \psi q + n$, & $r = r' + r''$, & $s = s' + s''$, $\psi$ étant un nombre poſitif.

On réſoudra de même le cas où ce ſeroit le ſigne inférieur qui devroit avoir lieu, & l'on en conclura qu'il eſt toujours poſſible de trouver des nombres $r'$, $r''$, $r'''$ &c. & $s'$, $s''$, $s'''$ &c. qui aient les propriétés requiſes; & que ces nombres peuvent être ſuppoſés tels que l'on ait

$$\left.\begin{array}{llll} r = \lambda' r' + r'', & & s = \lambda' s' + s'' & \\ r' = \lambda'' r'' + r''', & & s' = \lambda'' s'' + s''' & \\ r'' = \lambda''' r''' + r^{IV}, & & s'' = \lambda''' s''' + s^{IV} & \\ r''' = \lambda^{IV} r^{IV} + r^{V}, & & s''' = \lambda^{IV} s^{IV} + s^{V} & \\ \text{&c.} & & \text{&c.} & \end{array}\right\} \quad - - \quad (\zeta)$$

$\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ &c. étant des nombres entiers & poſitifs.

On

On voit de plus que les deux derniers termes de la ſérie $r, r', r'', r'''$ etc. ſeront $\alpha, 1$, ($\alpha$ étant le nombre entier qui approchera le plus de la fraction $\frac{r}{s}$) & que les deux derniers termes de la ſérie $s, s', s'', s'''$ etc. ſeront $1, 0$; de ſorte que, ſi on connoiſſoit les nombres $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. avec le nombre $\alpha$, on pourroit en remontant par les formules précédentes trouver les nombres cherchés $r$ & $s$.

Les conditions par leſquelles on doit déterminer les nombres $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. ſont, que ces nombres ſoient tous entiers poſitifs, & tels que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} rs' - sr' = \pm 1 \\ r's'' - s'r'' = \mp 1 \\ r''s''' - s''r''' = \pm 1 \\ r'''s'''' - s'''r'''' = \mp 1 \end{array}\right\} \quad \text{(}\eta\text{)}$$

etc.

en prenant les ſignes ſupérieurs, ou inférieurs, ſuivant que l'on aura le ſigne ſupérieur ou l'inférieur dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$. Or il eſt facile de voir que, ſi la premiere équation $rs' - sr' = \pm 1$ a lieu, les ſuivantes auront lieu d'elles-mêmes, en vertu des formules ($\zeta$); en effet, on aura par ces formules $r'' = r - \lambda' r'$, $s'' = s - \lambda' s'$, donc $r's'' - s'r'' = r's - s'r = \mp 1$, & ainſi des autres.

30. Cela poſé, reprenons l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, & ſoit d'abord le ſigne ſupérieur, en ſorte que l'on ait $E = r^2 - Bs^2$; donc, diviſant par $r^2$, on aura $\frac{r^2}{s^2} - B = \frac{E}{s^2}$, & diviſant encore par $\frac{r}{s} + \sqrt{B}$, $\frac{r}{s} - \sqrt{B} = \frac{E}{s^2\left(\frac{r}{s} + \sqrt{B}\right)}$; donc, puiſ-

que $E < \sqrt{B}$ (hyp.), on aura à plus forte raiſon $E < \sqrt{B} + \frac{r}{s}$; donc $\frac{r}{s} - \sqrt{B} > 0$, & $< \frac{1}{s^2}$.

Or l'équation $rs' - sr' = 1$, donne $\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = \frac{1}{ss'}$, donc ayant $\frac{r}{s} - \sqrt{B} < \frac{1}{s^2}$, on aura auſſi $\frac{r'}{s'} - \sqrt{B} < \frac{1}{s^2} - \frac{1}{ss'}$; mais à cauſe de $s' < s$, il eſt clair que $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{ss'} < 0$; donc auſſi $\frac{r'}{s'} - \sqrt{B} < 0$, & multipliant par $\frac{r'}{s'} + \sqrt{B}$, $\frac{r'^2}{s'^2} - B < 0$, & par conſéquent $r'^2 - Bs'^2 < 0$; ainſi l'on aura $r'^2 - Bs'^2 = -E'$, $E'$ étant un nombre poſitif.

De même l'équation $r's'' - s'r'' = -1$, donnera celle-ci $\frac{r'}{s'} - \frac{r''}{s''} = -\frac{1}{s's''}$, laquelle étant ajoutée à l'équation ci-deſſus $\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = \frac{1}{ss'}$, on aura $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} = \frac{1}{ss'} - \frac{1}{s's''}$; mais ayant $s' < s$, & $s'' < s'$, il eſt clair que $\frac{1}{ss'} < \frac{1}{s's''}$; donc $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} < 0$, c'eſt à dire $\frac{r''}{s''} - \frac{r}{s} > 0$. Or l'on a auſſi $\frac{r}{s} - \sqrt{B} > 0$; donc on aura encore $\frac{r''}{s''} - \sqrt{B} > 0$, & multipliant par $\frac{r''}{s''} + \sqrt{B}$, $\frac{r''^2}{s''^2} - B > 0$, & $r''^2 - Bs''^2 > 0$; donc $r''^2 - Bs''^2 = E''$, $E''$ étant un nombre poſitif.

L'équa-

L'équation $r''s''' - s''r''' = 1$, donnera pareillement $\frac{r''}{s''} - \frac{r'''}{s'''} = \frac{1}{s''s'''}$, & ajoutant l'équation $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} = \frac{1}{ss'} - \frac{1}{s's''}$, on aura $\frac{r}{s} - \frac{r'''}{s'''} = \frac{1}{ss'} - \frac{1}{s's''} + \frac{1}{s''s'''}$; donc, puiſque $\frac{r}{s} - \sqrt{B} < \frac{1}{s^2}$, on aura $\frac{r'''}{s'''} - \sqrt{B} < \frac{1}{s^2} - \frac{1}{ss'} + \frac{1}{s's''} - \frac{1}{s''s'''}$; or, à cauſe de $s' < s$, $s'' < s'$ & $s''' < s''$, on aura $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{ss'} < 0$ & $\frac{1}{s's''} - \frac{1}{s''s'''} < 0$; donc auſſi $\frac{r'''}{s'''} - \sqrt{B} < 0$; donc $r'''^2 - Bs'''^2 < 0$, donc on aura $r'''^2 - Bs'''^2 = -E'''$, $E'''$ étant un nombre poſitif; & ainſi de ſuite.

Suppoſons en ſecond lieu que l'on ait $-E = r^2 - Bs^2$, donc $\frac{r^2}{s^2} - B = -\frac{E}{s^2}$ & $\frac{r}{s} - \sqrt{B} = -\frac{E}{s^2\left(\frac{r}{s} + \sqrt{B}\right)}$; donc, à cauſe de $E < \sqrt{B}$, on aura $\frac{r}{s} - \sqrt{B} < 0$ & $> -\frac{1}{s^2}$. Or on a dans ce cas $rs' - sr' = -1$; donc $\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = -\frac{1}{ss'}$; donc, à cauſe de $\frac{r}{s} - \sqrt{B} > -\frac{1}{s^2}$, on aura auſſi $\frac{r'}{s'} - \sqrt{B} > \frac{1}{ss'} - \frac{1}{s^2}$; mais, puiſque $s' < s$, on a $\frac{1}{ss'} - \frac{1}{s^2} > 0$, donc $\frac{r'}{s'} - \sqrt{B} > 0$, donc auſſi $r'^2 - Bs'^2 > 0$, donc on aura $r'^2 - Bs'^2 = E'$, $E'$ étant un nombre poſitif.

On aura enſuite $r's'' - s'r'' = 1$, donc $\frac{r'}{s'} - \frac{r''}{s''} = \frac{1}{s's''}$, donc, puiſque $\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = -\frac{1}{ss'}$, on aura auſſi $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} = -\frac{1}{ss'} + \frac{1}{s's''} > 0$, à cauſe de $s' < s$ & $s'' < s'$; donc $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} > 0$, & par conſéquent $\frac{r''}{s''} - \frac{r}{s} < 0$; mais $\frac{r}{s} - \sqrt{B} < 0$; donc on aura auſſi $\frac{r''}{s''} - \sqrt{B} < 0$; donc $r''^2 - Bs''^2 < 0$; donc $r''^2 - Bs''^2 = -E''$, $E''$ étant un nombre poſitif.

On prouvera de même que l'on aura $r'''^2 - Bs'''^2 = E'''$, $E'''$ étant poſitif, & ainſi de ſuite.

Donc, en combinant les deux cas, on aura en général les formules ſuivantes

$$\left.\begin{array}{l} \pm E = r^2 - Bs^2 \\ \mp E' = r'^2 - Bs'^2 \\ \pm E'' = r''^2 - Bs''^2 \\ \mp E''' = r'''^2 - Bs'''^2 \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\theta)$$

dans leſquelles E eſt poſitif, & moindre que $\sqrt{B}$ par l'hypothèſe, & $E'$, $E''$, $E'''$ &c. ſont auſſi néceſſairement poſitifs.

31. Qu'on multiplie préſentement les équations ($\theta$) deux à deux, on aura (art. 9)

1°. $-EE' = (rr' - Bss')^2 - B(rs' - sr')^2$; mais on a par les formules ($\eta$) $rs' - sr' = \pm 1$; donc, ſi on fait

$$rr' - Bss' = \mp \epsilon$$

on aura l'équation $-EE' = \epsilon^2 - B$, ou bien

$$EE' = B - \epsilon^2.$$

2°.

2°. $-E'E'' = (r'r'' - Bs's'')^2 - B(r's'' - s'r'')^2$; mais $r's'' - s'r'' = \mp 1$; donc faiſant

$$r'r'' - Bs's'' = \pm \varepsilon'$$

on aura $-E'E'' = \varepsilon'^2 - B$, ou bien

$$E'E'' = B - \varepsilon'^2.$$

3°. Faiſant de même

$$r''r''' - Bs''s''' = \mp \varepsilon''$$

on trouvera $-E''E''' = \varepsilon''^2 - B$, ou bien

$$E''E''' = B - \varepsilon''^2$$

& ainſi de ſuite.

Maintenant on a par les formules $(\zeta)$ $r'' = r - \lambda' r'$, $s'' = s - \lambda' s'$, donc $r'r'' - Bs's'' = rr' - Bss' - \lambda(r'^2 - Bs'^2)$; donc $\pm \varepsilon' = \mp \varepsilon \pm \lambda' E'$, ſavoir $\varepsilon' = \lambda' E' - \varepsilon$.

On a de même $r''' = r' - \lambda'' r''$, $s''' = s' - \lambda'' s''$, donc $r''r''' - Bs''s''' = r'r'' - Bs's'' - \lambda''(r''^2 - Bs''^2)$, ſavoir $\mp \varepsilon'' = \pm \varepsilon' \mp \lambda'' E''$, ou bien $\varepsilon'' = \lambda'' E'' - \varepsilon'$; & ainſi des autres.

De ſorte qu'on aura les équations

$$\left.\begin{aligned} EE' &= B - \varepsilon^2 \\ E'E'' &= B - \varepsilon'^2 \\ E''E''' &= B - \varepsilon''^2 \\ E'''E^{IV} &= B - \varepsilon'''^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{etc.} \qquad \cdots\cdots (\varkappa)$$

dans leſquelles

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon' &= \lambda' E' - \varepsilon \\ \varepsilon'' &= \lambda'' E'' - \varepsilon' \\ \varepsilon''' &= \lambda''' E''' - \varepsilon'' \end{aligned}\right\} \quad \text{etc.} \qquad \cdots\cdots (\lambda)$$

32. Nous avons vu (art. 30) que les nombres E, E′, E″ etc. ſont néceſſairement tous poſitifs; donc, pour que les équations (*) puiſſent ſubſiſter, il faudra que les carrés $\varepsilon^2$, $\varepsilon'^2$, $\varepsilon''^2$ etc. ſoient tous moindres que B.

Or je vais prouver d'abord que, pour que ces conditions puiſſent avoir lieu, il faut que les nombres $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ etc. dans les équations (λ) ſoient tous poſitifs.

Car 1°. ſuppoſons, s'il eſt poſſible, que $\varepsilon$ ſoit $= -\eta$, $\eta$ étant un nombre poſitif, on aura donc $\varepsilon' = \lambda' E' + \eta$, & par conſéquent $\varepsilon'$ poſitif, à cauſe de $\lambda'$ & E′ poſitif; mais il faut que $\varepsilon'^2 < B$, donc $\lambda' E' + \eta < \sqrt{B}$; & par conſéquent $\lambda' < \frac{\sqrt{B} - \eta}{E'}$; mais $\lambda'$ doit être entier poſitif; donc il faut que $E' < \sqrt{B} - \eta$; or l'on a $EE' = B - \eta^2 = (\sqrt{B} + \eta)(\sqrt{B} - \eta)$; donc E′ ne peut être $< \sqrt{B} - \eta$ que E ne ſoit en même tems $> \sqrt{B} + \eta$; mais $E < \sqrt{B}$ (hyp.), donc il eſt impoſſible que $\varepsilon$ ſoit négatif.

2°. Suppoſons $\varepsilon' = -\eta'$, $\eta'$ étant poſitif, on aura $\varepsilon'' = \lambda'' E'' + \eta'$, & par conſéquent $\varepsilon''$ poſitif; mais on doit avoir $\varepsilon''^2 < B$, donc il faudra que $\lambda'' E'' + \eta' < \sqrt{B}$, & par conſéquent $\lambda'' < \frac{\sqrt{B} - \eta'}{E''}$; donc, pour que $\lambda''$ puiſſe être entier poſitif, comme il le doit, il faut que $E'' < \sqrt{B} - \eta'$; or $E'E'' = B - \eta'^2 = (\sqrt{B} + \eta')(\sqrt{B} - \eta')$, donc E″ ne ſauroit être $< \sqrt{B} - \eta'$ que E′ ne ſoit $> \sqrt{B} + \eta'$, & à plus forte raiſon $E' > \sqrt{B}$; mais l'équation $\varepsilon' = \lambda' E' - \varepsilon$ donne, à cauſe de $\varepsilon' = -\eta$, $\lambda' E' = \varepsilon - \eta'$; & par conſéquent, puiſque $\varepsilon < \sqrt{B}$, $\lambda' E' < \sqrt{B}$; ce qui répugne tant que $\lambda'$ eſt entier poſitif.

Donc $\varepsilon'$ ſera néceſſairement poſitif, & on démontrera de même que les nombres $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$ etc. dans les équations (λ) devront être auſſi tous poſitifs.

33. Maintenant, puiſqu'on doit avoir $\varepsilon^2$, $\varepsilon'^2$, $\varepsilon''^2$ etc. moindres que B, il eſt clair qu'il faudra que $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$ etc. ſoient tous $< \sqrt{B}$.

Sup-

Suppoſons donc que $\varepsilon$ ſoit en effet $< \sqrt{B}$, & voyons comment on doit déterminer les nombres $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. dans les équations ($\lambda$) pour que les nombres $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$ etc. ſoient tous moindres que $\sqrt{B}$.

Soit 1°. $\varepsilon' < \sqrt{B}$, donc $\lambda' E' - \varepsilon < \sqrt{B}$; donc

$$\lambda' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'}$$

Mais, comme $\lambda'$ doit être un nombre entier poſitif, il faudra que $E' < \sqrt{B} + \varepsilon$; & par conſéquent, à cauſe de $EE' = B - \varepsilon^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon)(\sqrt{B} - \varepsilon)$, que E ſoit $> \sqrt{B} - \varepsilon$; ainſi le nombre $\varepsilon$ devra être $< \sqrt{B}$ & $> \sqrt{B} - E$.

Soit 2°. $\varepsilon'' < \sqrt{B}$, donc $\lambda'' E'' - \varepsilon' < \sqrt{B}$, & de là

$$\lambda'' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''}.$$

Mais, pour que $\lambda''$ puiſſe être entier poſitif, il faudra que $E'' < \sqrt{B} + \varepsilon'$, & par conſéquent, à cauſe de $E'E'' = B - \varepsilon'^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon')(\sqrt{B} - \varepsilon')$, que $E'$ ſoit $> \sqrt{B} - \varepsilon'$, ou bien $\varepsilon' > \sqrt{B} - E'$, donc $\lambda' E' - \varepsilon > \sqrt{B} - E'$, & par conſéquent

$$\lambda' + 1 > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'}.$$

Soit 3°. $\varepsilon''' < \sqrt{B}$, donc $\lambda''' E''' - \varepsilon'' < \sqrt{B}$, & par conſéquent

$$\lambda''' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E'''}.$$

Or, puiſque $\lambda'''$ doit être entier & poſitif, il faudra que $E''' < \sqrt{B} + \varepsilon''$, par conſéquent, à cauſe de $E''E''' = B - \varepsilon''^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon'')(\sqrt{B} - \varepsilon'')$, il faudra que $E'' > \sqrt{B} - \varepsilon''$, c'eſt à dire $\varepsilon'' > \sqrt{B} - E''$, donc $\lambda'' E'' - \varepsilon' > \sqrt{B} - E''$, & par conſéquent

$$\lambda'' + 1 > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''}. \qquad \text{Et ainſi de ſuite.}$$

Si

Si la quantité $E'''$ étoit la derniere de la ſérie E, E′, E″ etc. en ſorte que l'équation $E'''E^{IV} = B - \epsilon'''^2$ fût la derniere des équations (κ), alors on auroit ſeulement pour la détermination de $\lambda'''$ la condition $\lambda''' < \frac{\sqrt{B} + \epsilon''}{E'''}$; mais, ſi on veut de plus que le dernier terme de la ſerie E, E′, E″ etc. ſoit $< \sqrt{B}$, alors en ſuppoſant que ce ſoit $E'''$, on aura $E^{IV} < \sqrt{B}$, & à plus forte raiſon $E''' < \sqrt{B} + \epsilon'''$, donc, à cauſe de $E'''E^{IV} = (\sqrt{B} + \epsilon''')(\sqrt{B} - \epsilon''')$, $E''' > \sqrt{B} - \epsilon'''$, c'eſt à dire $\epsilon''' > \sqrt{B} - E'''$, & par conſéquent $\lambda'''E''' - \epsilon'' > \sqrt{B} - E'''$, d'où

$$\lambda''' + 1 > \frac{\sqrt{B} + \epsilon''}{E'''}.$$

C'eſt la même condition qu'on auroit par la conſidération de l'équation ſuivante $E''E'' = B - \epsilon''^2$, ſi le terme $E''$ n'étoit pas le dernier.

Donc en général, ſi la ſérie des nombres E, E′, E″ etc. eſt ſuppoſée continuée juſqu'à un terme $< \sqrt{B}$, il faudra, pour que les équations (κ) & (λ) puiſſent ſubſiſter en ne prenant pour E, E′, E″ etc. & pour λ′, λ″, λ‴ etc. que des nombres entiers poſitifs, il faudra, dis-je, que l'on ait d'abord

$$\epsilon < \sqrt{B} \quad \& \quad \epsilon > \sqrt{B} - E$$

& enſuite

$$\left.\begin{array}{llll} \lambda' < \frac{\sqrt{B} + \epsilon}{E'}, & \lambda' > \frac{\sqrt{B} + \epsilon}{E'} - 1 \\ \lambda'' < \frac{\sqrt{B} + \epsilon'}{E''}, & \lambda'' > \frac{\sqrt{B} + \epsilon'}{E''} - 1 \\ \lambda''' < \frac{\sqrt{B} + \epsilon''}{E'''}, & \lambda''' > \frac{\sqrt{B} + \epsilon''}{E'''} - 1 \end{array}\right\} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad (\mu)$$

On voit par là que les nombres λ′, λ″, λ‴ etc. ſeront abſolument déterminés, de ſorte que les nombres E & ε étant connus, tous les autres le ſeront auſſi par le moyen des formules (κ), (λ) & (μ).

En

En effet connoiſſant E & $\epsilon$, on aura E′ par l'équation $EE' = B - \epsilon^2$; enſuite, à cauſe de $\lambda' < \frac{\sqrt{B} + \epsilon}{E'}$ & $> \frac{\sqrt{B} + \epsilon}{E'} - 1$, il eſt clair qu'on ne pourra prendre pour $\lambda'$ que le nombre entier qui eſt immédiatement plus petit que $\frac{\sqrt{B} + \epsilon}{E'}$, & il eſt facile de voir que ce nombre ſera néceſſairement poſitif; car, à cauſe de $E > \sqrt{B} - \epsilon$ (hyp.), on aura $E' < \sqrt{B} + \epsilon$, en vertu de l'équation $EE' = B - \epsilon^2 = (\sqrt{B} + \epsilon)(\sqrt{B} - \epsilon)$; le nombre $\lambda'$ étant ainſi connu, on aura $\epsilon' = \lambda' E' - \epsilon$; après quoi on tirera E″ de l'équation $E'E'' = B - \epsilon'^2$, & comme $\lambda'' < \frac{\sqrt{B} + \epsilon'}{E''}$ & $> \frac{\sqrt{B} + \epsilon'}{E''} - 1$, il faudra prendre néceſſairement pour $\lambda''$ le nombre entier qui ſera immédiatement moindre que $\frac{\sqrt{B} + \epsilon'}{E''}$, & il eſt clair que ce nombre ſera poſitif, à cauſe que, $\lambda'$ étant $> \frac{\sqrt{B} + \epsilon}{E'} - 1$, on a $\lambda' E' - \epsilon = \epsilon' > \sqrt{B} - E'$, & par conſéquent $E' > \sqrt{B} - \epsilon'$, & $E'' < \sqrt{B} + \epsilon'$, en vertu de l'équation $E'E'' = B - \epsilon'^2 = (\sqrt{B} + \epsilon')(\sqrt{B} - \epsilon')$; & ainſi de ſuite.

34. Ainſi pour réſoudre l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, où $E < \sqrt{B}$, on commencera par chercher un nombre entier $\epsilon < \sqrt{B}$ & $> \sqrt{B} - E$, & tel que $B - \epsilon^2$ ſoit diviſible par E; ſi aucun des nombres qui tombent entre $\sqrt{B} - E$, & $\sqrt{B}$ ne ſatisfait à cette condition, ce ſera une marque que l'équation propoſée n'eſt point réſoluble en entiers.

Ayant trouvé une ou pluſieurs valeurs de $\epsilon$, on formera d'après chacune de ces valeurs, & par le moyen des formules de l'art. préc. les ſéries E, E′, E″, E‴ etc. $\epsilon'$, $\epsilon''$, $\epsilon'''$ etc. & $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. & ſi l'équation propoſée eſt réſoluble en nombres entiers, on parviendra néceſſairement à un terme de la ſérie E′, E″, E‴ etc. qui ſera égal

à l'unité, & qui occupera une place paire ou impaire, ſuivant que, dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, ce ſera le ſigne ſupérieur ou l'inférieur qui aura lieu. En effet nous avons vu (art. 29) qu'en continuant les ſéries des nombres $r$, $r'$, $r''$ etc. & $s$, $s'$, $s''$ etc. on arrivera néceſſairement à des termes comme $r^m$ & $s^m$, tels que $r^m = 1$ & $s^m = 0$; or on a, par les formules $(\theta)$, $(r^m)^2 - B(s^m)^2 = \pm E^m$, lorſque le quantieme $m$ eſt pair, & $(r^m)^2 - B(s^m)^2 = \mp E^m$, lorſque le quantieme $m$ eſt impair; donc on aura dans le premier cas $\pm E^m = 1$, & dans le ſecond $\mp E^m = 1$; d'où l'on voit que le premier cas ne peut avoir lieu qu'en prenant le ſigne ſupérieur & faiſant $E^m = 1$, & le ſecond ne peut avoir lieu qu'en prenant le ſigne inférieur & faiſant de même $E^m = 1$, à cauſe que $E^m$ doit être poſitif (art. 30).

Donc, lorſque l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ peut ſe réſoudre en nombres entiers, il doit y avoir dans la ſérie E, E', E'' etc. un terme, comme $E^m = 1$, le quantieme $m$ étant pair, ou impair ſuivant qu'on aura le ſigne ſupérieur ou l'inférieur dans l'équation dont il s'agit; & comme 1 eſt toujours $< \sqrt{B}$, il eſt clair qu'on doit parvenir à ce terme $E^m$ par la méthode de l'art. préc., & alors on fera $r^m = 1$, & $s^m = 0$. De plus il eſt clair par les formules $(\eta)$ que l'on doit avoir $r^{m-1}r^m - Bs^{m-1}s^m = \mp 1$ ſi $m$ eſt pair, & $= \pm 1$ ſi $m$ eſt impair; c'eſt à dire (à cauſe que le quantieme $m$ doit être pair pour le ſigne ſupérieur, & impair pour l'inférieur) $r^{m-1}s^m - s^{m-1}r^m = -1$, d'où, en faiſant $r^m = 1$ & $s^m = 0$, on aura $s^{m-1} = 1$; enfin il eſt facile de voir par les formules de l'art. 31 qu'on aura auſſi $r^{m-1}r^m - Bs^{m-1}s^m = \pm \varepsilon^{m-1}$ lorſque $m$ pair, & $= \mp \varepsilon^{m-1}$ lorſque $m$ impair, c'eſt à dire, par la remarque précédente, $r^{m-1}r^m - Bs^{m-1}s^m = \varepsilon^{m-1}$; d'où, à cauſe de $r^m = 1$, & $s^m = 0$, on aura $r^{m-1} = \varepsilon^{m-1}$; de ſorte qu'on aura ces quatre valeurs

$$r^m = 1, \qquad s^m = 0$$
$$r^{m-1} = \varepsilon^{m-1}, \qquad s^{m-1} = 1$$

à l'aide deſquelles on pourra, en remontant par les formules $(\zeta)$ de l'art. 29, trouver les valeurs cherchées de $r$ & $s$.

35. Comme tout ſe réduit à trouver un terme de la ſérie E, $E'$, $E''$ etc. qui ſoit égal à l'unité, conſidérons plus particulierement la loi de cette ſérie. Et d'abord il eſt clair, par ce qu'on a enſeigné dans l'art. 33, que cette ſérie peut être pouſſée auſſi loin que l'on veut, parce que les opérations par leſquelles les nombres $E'$, $E''$, $E'''$ etc. $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$ etc. & $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. doivent être déterminés, peuvent être continuées tant qu'on voudra.

D'autre part il eſt évident par les formules (ϰ) que les nombres E, $E'$, $E''$, $E'''$ etc. doivent être néceſſairement moindres que B; de ſorte que, comme ces nombres doivent être en même tems entiers, ils ne pourront avoir qu'un nombre limité de valeurs différentes, & qu'ainſi, en ſuppoſant la ſérie pouſſée à l'infini, il faudra abſolument que le même terme revienne une infinité de fois; par conſéquent il faudra auſſi que la même combinaiſon de deux termes conſécutifs revienne une infinité de fois.

Suppoſons donc que dans la ſérie E, $E'$, $E''$, $E'''$, $E^{IV}$, $E^{V}$, $E^{VI}$, $E^{VII}$, $E^{VIII}$, $E^{IX}$, $E^{X}$ etc. les deux termes conſécutifs $E^{VII}$, $E^{VIII}$ ſoient les mêmes que les termes $E'''$, $E^{IV}$, c'eſt à dire que l'on ait $E^{VII} = E'''$, & $E^{VIII} = E^{IV}$, il eſt facile de voir que l'on aura auſſi néceſſairement $E^{IX} = E^{V}$, $E^{X} = E^{VI}$ etc.

En effet, puiſque $E^{VII} = E'''$ & $E^{VIII} = E^{IV}$, on aura, par les formules (ϰ), $\varepsilon^{VII} = \varepsilon'''$; donc par les formules (μ), $\lambda^{VIII} = \lambda^{IV}$, & par les formules (λ), $\varepsilon^{VIII} = \varepsilon^{IV}$; donc par les formules (ϰ), $E^{IX} = E^{V}$, & ainſi de ſuite. En général il eſt évident que deux termes conſécutifs étant donnés, tous les ſuivans le ſeront auſſi par les formules (ϰ), (λ) & (μ); de ſorte que, dès que la même combinaiſon de deux termes conſécutifs reviendra après un certain nombre de termes, tous les termes ſuivans reviendront les mêmes auſſi, & par conſéquent la ſérie ne ſera plus qu'une ſuite de périodes identiques à la premiere.

Mais il y a plus; je vais démontrer qu'en ſuppoſant les termes conſécutifs $E^{VII}$, $E^{VIII}$ identiques avec les termes $E'''$, $E^{IV}$, les termes précédens $E^{VI}$, $E^{V}$ etc. ſeront les mêmes auſſi que les termes $E''$, $E'$ etc.

Pour démontrer cette propoſition il eſt clair qu'il ſuffit de faire voir que, lorſque deux termes quelconques conſécutifs comme $E'''$, $E^{IV}$ ſont donnés, tous les précédens le ſeront auſſi. Or il eſt viſible par les formules ($\varkappa$) que $E'''$ & $E^{IV}$ étant donnés, $\varepsilon'''$ le ſera auſſi; mais on doit avoir $\varepsilon'' < \sqrt{B}$, donc, par les formules ($\lambda$), il faudra que $\lambda'''E''' - \varepsilon''' < \sqrt{B}$, & par conſéquent

$$\lambda''' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''}.$$

De même on doit avoir $\varepsilon' < \sqrt{B}$, donc $\lambda''E'' - \varepsilon'' < \sqrt{B}$, & de là

$$\lambda'' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''}$$

or $\lambda''$ devant être un nombre entier poſitif, il faudra que $E''$ ſoit $< \sqrt{B} + \varepsilon''$, donc, à cauſe de $E''E''' = B - \varepsilon''^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon'')(\sqrt{B} - \varepsilon'')$, il faudra que $E''' > \sqrt{B} - \varepsilon''$, ſavoir $\varepsilon'' > \sqrt{B} - E'''$, & comme $\varepsilon'' = \lambda'''E''' - \varepsilon'''$, il faudra que $(\lambda''' + 1)E''' > \sqrt{B} + \varepsilon'''$, d'où

$$\lambda''' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''} - 1.$$

On trouvera de même, par la conſidération de la condition $\varepsilon < \sqrt{B}$, ces deux conditions

$$\lambda' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'},$$

$$\lambda'' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''} - 1.$$

Enſuite, comme $E$ eſt $< \sqrt{B}$ (hyp.), on aura à plus forte raiſon $E < \sqrt{B} + \varepsilon$, & par conſéquent, en vertu de l'équation $EE' = B - \varepsilon^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon)(\sqrt{B} - \varepsilon)$, $E' > \sqrt{B} - \varepsilon$, ſavoir, à cauſe de $\varepsilon = \lambda'E' - \varepsilon'$, $(\lambda' + 1)E' > \sqrt{B} + \varepsilon'$, d'où

$$\lambda' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'} - 1.$$

Ainſi on aura, en conſidérant les ſéries $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$ etc. & E, E', E'', E''' etc., à rebours les conditions ſuivantes

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda''' < \dfrac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''}, & \lambda''' > \dfrac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''} - 1 \\ \lambda'' < \dfrac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''}, & \lambda'' > \dfrac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''} - 1 \\ \lambda' < \dfrac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'}, & \lambda' > \dfrac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'} - 1 \end{array}\right\} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{- - - (}\nu\text{)}$$

leſquelles étant combinées avec les formules (κ) & (λ) ſerviront à déterminer tous les termes de ces mêmes ſéries, en ſuppoſant deux termes conſécutifs comme E''', E'' donnés. Car E'' & E''' étant donnés, $\varepsilon'''$ le ſera auſſi; par conſéquent $\lambda'''$ ſera auſſi donné, à cauſe que $\lambda'''$ devant être entier, on ne pourra prendre pour $\lambda'''$ que le nombre entier qui ſera immédiatement moindre que $\frac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''}$; ayant ainſi $\lambda'''$, on aura $\varepsilon''$ par la formule $\varepsilon''' = \lambda'''E''' - \varepsilon''$, ſavoir $\varepsilon'' = \lambda'''E''' - \varepsilon'''$; & enſuite E'' par l'équation $E''E''' = B - \varepsilon''^2$; or E'' & $\varepsilon''$ étant donnés, $\lambda''$ le ſera auſſi, parce que l'on ne pourra prendre pour $\lambda''$ que le nombre entier qui ſera immédiatement moindre que $\frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''}$, & ainſi de ſuite.

Il réſulte de là que, dans la ſuite E, E', E'', E''', E'' etc., une combinaiſon quelconque de deux termes conſécutifs comme E''', E'' ne peut revenir, que toutes les combinaiſons précédentes E'', E''', E', E'' etc. ne ſoient déjà revenues, de ſorte que la premiere combinaiſon E, E' devra néceſſairement être auſſi la premiere à revenir. Donc, puiſqu'il eſt abſolument néceſſaire qu'une combinaiſon quelconque

revienne, à cauſe du nombre limité des valeurs que peuvent avoir les nombres $E, E', E''$ etc., comme nous l'avons obſervé dans l'art. préc.; il eſt évident que la premiere combinaiſon $E, E'$ devra revenir néceſſairement, auſſitôt que toutes les autres combinaiſons poſſibles ſeront épuiſées; & alors toute la ſérie devra auſſi revenir la même par l'art. préc.; de ſorte qu'après la premiere période, le reſte de la ſérie, quelque loin qu'elle ſoit pouſſée, ne ſera plus compoſée que d'une ſuite de périodes identiques à la premiere.

Ainſi, par exemple, ſi on trouve $E'' = E$, & $E''' = E'$, la ſérie ſera de cette forme $E, E', E'', E''', E^{IV}, E, E', E'', E''', E^{IV}, E, E', E'', E''', E^{IV}$ etc. à l'infini; de ſorte que les termes qui ne ſe trouveront point dans la premiere période $E, E', E'', E''', E^{IV}$, ne ſe trouveront pas non plus dans tout le reſte de la ſérie continuée même à l'infini.

36. Donc, pour pouvoir réſoudre l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, il ne s'agira que de continuer la ſérie $E, E', E'', E'''$ etc. juſqu'à ce que les deux premiers termes reparoiſſent dans le même ordre, ce qui arrivera néceſſairement avant qu'aucune autre couple de deux termes conſécutifs puiſſe reparoître; & ſi dans cette premiere période de la ſérie il ne ſe trouve aucun terme égal à l'unité, on en devra conclure que cette équation n'admet point de ſolution en nombres entiers.

Mais ſi l'on trouve dans la premiere période un terme comme $E^m = 1$, alors ce terme donnera d'abord une ſolution de l'équation propoſée (art. 34), pourvu que le quantieme $m$ ſoit pair, ou impair ſuivant que dans cette équation on prendra le ſigne ſupérieur, ou l'inférieur. Si l'expoſant $m$ du rang n'eſt pas tel, alors on continuera la ſérie, & comme le terme 1 doit reparoître dans les périodes ſuivantes, on verra s'il ſe trouve avec un expoſant qui ait les conditions requiſes; & alors ce nouveau terme donnera de même une ſolution de l'équation dont il s'agit; enſuite, en continuant toujours la ſérie, on pourra retrouver ce même terme autant de fois qu'on voudra, & par conſéquent en tirer encore d'autres ſolutions à l'infini.

D'où

D'où l'on voit que, ſi l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ admet une ſolution quelconque en nombres entiers, il faut auſſi qu'elle en admette une infinité d'autres.

37. On a vu dans l'art. 33 que les ſéries $E, E', E''$ etc. $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc. & $\lambda', \lambda''$ etc. ſont entierement déterminées par les deux termes $E$, & $E'$, parce que $E$, & $E'$ étant donnés, $\varepsilon$ l'eſt auſſi, & ainſi des autres; d'où il s'enſuit que lorſque la ſérie $E, E', E''$ etc. recommence, les deux autres doivent recommencer auſſi.

Suppoſons donc que dans la ſérie $E, E', E''$ etc. le terme $E^\mu$ ſoit $= E$, & le terme ſuivant $E^{\mu+1} = E'$; alors on aura en général (art. 35) $E^{\mu+\nu} = E'$, & par conſéquent $E^{2\mu} = E^\mu = E$, $E^{2\mu+\nu} = E'$ etc.; donc auſſi $E^{n\mu+\nu} = E'$, $n$ étant un nombre quelconque poſitif & entier.

De même on aura $\varepsilon^{\mu+\nu} = \varepsilon'$, & en général $\varepsilon^{n\mu+\nu} = \varepsilon'$, & pareillement $\lambda^{\mu+\nu} = \lambda'$, & en général $\lambda^{n\mu+\nu} = \lambda'$; ainſi connoiſſant les termes $E, E', E''$ etc. $E^{\mu-1}$, $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc. $\varepsilon^{\mu-1}$, & $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. $\lambda^\mu$, on connoîtra tous les termes ſuivans à l'infini.

Soit maintenant $E^m = 1$, $m$ étant $< \mu$; on aura donc auſſi $E^{\mu+m} = 1$, $E^{2\mu+m} = 1$ etc. & en général $E^{n\mu+m} = 1$; donc, ſi le quantieme $n\mu + m$ eſt pair, ou impair ſuivant que dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ on aura le ſigne ſupérieur ou l'inférieur, on pourra faire, comme dans l'art. 34, (en mettant $n\mu + m$, à la place de $m$)

$$r^{n\mu+m} = 1, \qquad s^{n\mu+m} = 0$$

$$r^{n\mu+m-1} = \varepsilon^{n\mu+m-1}, \qquad s^{n\mu+m-1} = 1$$

d'où en retrogradant on trouvera $r$, & $s$ par les formules ($\zeta$), & il eſt clair que ces valeurs ſeront toujours d'autant plus grandes que $n$ ſera un plus grand nombre; de ſorte que pour avoir les plus petites valeurs poſſibles de $r$, & $s$, il faudra prendre $n$ le plus petit poſſible; enſuite, en augmentant ſucceſſivement $n$, on aura par ordre toutes les autres valeurs

valeurs de $r$, & $s$ qui peuvent ſatisfaire à l'équation dont il s'agit, à moins que dans la premiere période $E$, $E'$, $E''$ etc. $E^{\mu-1}$, il ne ſe trouve plus d'un terme $E^m$ égal à l'unité, auquel cas il faudra faire ſucceſſivement $m$ égal à l'expoſant du quantieme de ces termes.

Donc, puiſque $n\mu + m$ doit toujours être pair, ou impair ſuivant que dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ on veut prendre le ſigne ſupérieur ou l'inférieur, il s'enſuit

1°. Que ſi l'équation eſt

$$E = r^2 - Bs^2$$

elle ne ſera pas ſoluble en nombres entiers à moins que l'on n'ait $m$ pair, ou $m$ & $\mu$ impairs à la fois; car il eſt évident que $n\mu + m$ ne peut être pair, que $n\mu$ & $m$ ne ſoient tous deux pairs ou impairs. Si $m$ eſt pair & que $\mu$ le ſoit auſſi, alors $n$ pourra être un nombre quelconque entier poſitif; mais ſi $m$ étant pair $\mu$ eſt impair, alors il faudra que $n$ ſoit pair, de ſorte qu'on ne pourra prendre pour $n$ que des nombres poſitifs pairs. Mais ſi $m$ eſt impair, alors il faudra que $n\mu$ ſoit auſſi impair, & par conſéquent que $\mu$ & $n$ ſoient tous deux impairs; ainſi $m$, & $\mu$ étant impairs en même tems, on ne pourra prendre pour $n$ que des nombres quelconques poſitifs impairs.

2°. Que ſi l'équation eſt

$$-E = r^2 - Bs^2$$

alors elle ne ſera pas réſoluble à moins que $m$ ne ſoit impair, ou que $m$ ne ſoit pair, & $\mu$ impair. Car, puiſque $n\mu + m$ doit être impair dans ce cas il faudra néceſſairement que $n\mu$ & $m$ ſoient l'un pair, & l'autre impair. Donc, ſi $m$ eſt impair, il faudra que $n\mu$ ſoit pair, par conſéquent ſi $\mu$ eſt pair on pourra prendre pour $n$ des nombres quelconques entiers poſitifs; & ſi $\mu$ eſt impair, il ne faudra prendre pour $n$ que des nombres poſitifs pairs. Mais ſi $m$ eſt pair, alors il faudra que $n\mu$ ſoit impair, par conſéquent il faudra que $n$ & $\mu$ le ſoient auſſi chacun en particulier; de ſorte que $m$ étant pair, & $\mu$ impair, le probleme

ſera

ſera réſoluble pourvu qu'on ne prenne pour $n$ que des nombres quelconques pairs poſitifs.

38. Nous avons vu (art. 30 & 31) que $rr' - Bss' = \mp \epsilon$, & $rs' - sr' = \pm 1$; donc on aura

$$\mp (\epsilon + \sqrt{B}) = (r + s\sqrt{B})(r' - s'\sqrt{B});$$

de même, à cauſe de $r'r'' - Bs's'' = \pm \epsilon'$ & $r's'' - s'r'' = \mp 1$, on aura

$$\pm (\epsilon' + \sqrt{B}) = (r' + s'\sqrt{B})(r'' - s''\sqrt{B})$$

& pareillement

$$\mp (\epsilon'' + \sqrt{B}) = (r'' + s''\sqrt{B})(r''' - s'''\sqrt{B})$$
$$\pm (\epsilon''' + \sqrt{B}) = (r''' + s'''\sqrt{B})(r^{IV} - s^{IV}\sqrt{B})$$

& ainſi de ſuite.

Donc, multipliant ces équations ſucceſſivement entr'elles, & faiſant attention que $(r' - s'\sqrt{B})(r' + s'\sqrt{B}) = r'^2 - Bs'^2 = \mp E'$, $(r'' - s''\sqrt{B})(r'' + s''\sqrt{B}) = r''^2 - Bs''^2 = \pm E''$, & ainſi des autres, on aura

$$(\epsilon + \sqrt{B})(\epsilon' + \sqrt{B}) = \pm E'(r + s\sqrt{B})(r'' - s''\sqrt{B})$$
$$(\epsilon + \sqrt{B})(\epsilon' + \sqrt{B})(\epsilon'' + \sqrt{B}) = \mp E'E''(r + s\sqrt{B})(r''' - s'''\sqrt{B})$$
$$(\epsilon + \sqrt{B})(\epsilon' + \sqrt{B})(\epsilon'' + \sqrt{B})(\epsilon''' \sqrt{B}) = \pm E'E''E'''(r + s\sqrt{B})(r^{IV} - s^{IV}\sqrt{B})$$

& en général

$$(\epsilon + \sqrt{B})(\epsilon' + \sqrt{B})(\epsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\epsilon^{n-1} + \sqrt{B})$$
$$= \pm E'E''E''' \cdots\cdots E^{n-1}(r + s\sqrt{B})(r^n - s^n\sqrt{B}),$$

les ſignes ambigus devant être les mêmes que dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, lorſque $n$ eſt pair, & différens, lorſque $n$ eſt impair.

Suppoſons maintenant $n = n\mu + m$, & l'on aura (art. préc.) $r^n = 1$, $s^n = 0$, pourvu que $n\mu + m$ ſoit pair, ou impair ſuivant que le ſigne ſupérieur, ou l'inférieur aura lieu dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$; donc la formule précédente deviendra, en conſervant $n$ à la place de $n\mu + m$ pour plus de ſimplicité,

$$(\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{n-1} + \sqrt{B}) = E'E''E''' \cdots\cdots E^{n-1}\,(r + s\sqrt{B}),$$

équation d'où, à cauſe de l'ambiguité naturelle du ſigne du radical $\sqrt{B}$, on pourra tirer $r$, & $s$.

Maintenant, puiſque $u = n\mu + m$, & que nous avons vu que l'on a en général $E^{n\mu+\nu} = E^{\nu}$, & $\varepsilon^{n\mu+\nu} = \varepsilon^{\nu}$ (art. préc.), il eſt facile de voir que l'équation précédente peut ſe ramener à celle-ci :

$$((\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{m-1} + \sqrt{B})) \times ((\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{\mu-1} + \sqrt{B}))^{n} = E'E''E'' \cdots E^{m-1}(EE'E'' \cdots E^{\mu-1})^{n}\,(r + s\sqrt{B}).$$

De ſorte que, ſi on fait pour abréger

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{m-1} + \sqrt{B})}{E' \cdot E'' \cdot E''' \cdots\cdots E^{m-1}} = R + S\sqrt{B},$$

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{\mu-1} + \sqrt{B}}{E \cdot E' \cdot E'' \cdots\cdots E^{\mu-1}} = X + Y\sqrt{B},$$

(car il eſt évident qu'en développant les produits continuels de $\varepsilon + \sqrt{B}$, $\varepsilon' + \sqrt{B}$ etc. on doit avoir des quantités compoſées d'une partie toute rationelle, & d'une autre partie toute multipliée par $\sqrt{B}$,) on aura

$$(R + S\sqrt{B})\,(X + Y\sqrt{B})^{n} = r + s\sqrt{B}.$$

Et ſi on fait de plus

$$(X + Y\sqrt{B})^{n} = \xi + \psi\sqrt{B},$$

ce qui donne, en général, à cauſe de l'ambiguité de $\sqrt{B}$,

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{n} + (X - Y\sqrt{B})^{n}}{2}$$

$$\psi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{n} - (X - Y\sqrt{B})^{n}}{2\sqrt{B}}$$

on aura

(R +

$$(R + SV\!B)\,(\xi + \psi V\!B) = r + sV\!B,$$

ſavoir $R\xi + BS\psi + (R\psi + S\xi)\,V\!B = r + sV\!B$, d'où, en comparant la partie rationelle avec la rationelle & l'irrationelle avec l'irrationelle, on aura enfin

$$r = R\xi + BS\psi, \qquad s = R\psi + S\xi.$$

C'eſt l'expreſſion générale des nombres $r$ & $s$ qui peuvent ſatisfaire à l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$.

Si on vouloit avoir auſſi les expreſſions de $r'$ & $s'$ dans l'équation ſuivante $\mp E' = r'^2 - Bs'^2$, il n'y auroit qu'à remarquer que, puiſqu'on a trouvé ci-deſſus $\mp(\varepsilon + V\!B) = (r + sV\!B)\,(r' - s'V\!B)$, on aura $\mp(\varepsilon + V\!B)\,(r' + s'V\!B) = (r + sV\!B)\,(r'^2 - Bs'^2) = \mp E'\,(r + sV\!B)$, d'où $r' + s'V\!B = \dfrac{E'}{\varepsilon + V\!B}\,(r + sV\!B)$.

Donc, ſi on fait

$$\frac{(\varepsilon' + V\!B)\,(\varepsilon'' + V\!B)\,\ldots\,(\varepsilon^{(m-1)} + V\!B)}{E''\,\ldots\,E^{(m-1)}} = R' + S'V\!B$$

on trouvera comme ci-deſſus

$$(R' + S'V\!B)\,(\xi + \psi V\!B) = r' + s'V\!B$$

d'où

$$r' = R'\xi + BS'\psi, \qquad s' = R'\psi + S'\xi.$$

Ces valeurs ſerviront à trouver celles de $\rho$ & $\sigma$ dans l'équation $\mp D = \rho^2 - B\sigma^2$ (art. 29), comme nous le ferons voir ci-après (art. 43).

39. Quoiqu'il ſoit facile de trouver les valeurs de R, S, X & Y par le développement des produits de $(\varepsilon + V\!B)$, $(\varepsilon' + V\!B)$ etc., voici une maniere beaucoup plus ſimple & plus commode d'y parvenir.

On a par les formules ($\lambda$) de l'art. 31 $\varepsilon = \lambda'E' - \varepsilon'$, donc $\varepsilon + V\!B' = \lambda'E' + V\!B - \varepsilon'$; donc $(\varepsilon + V\!B)\,(\varepsilon' + V\!B) = \lambda'E'\,(\varepsilon' + V\!B) + B - \varepsilon'^2 =$ (à cauſe de $B - \varepsilon'^2 = E'E''$) $\lambda'E'\,(\varepsilon' + V\!B) + E'E''$, ſavoir en diviſant par $E'$

$$\frac{(\varepsilon + \nu B)\,(\varepsilon' + \nu B)}{E'} = E'' + \lambda'\,(\varepsilon' + \nu B).$$

De même, à cauſe de $\varepsilon' = \lambda''E'' - \varepsilon''$, on aura $E'' + \lambda'(\varepsilon' + \nu B) = (\lambda''\lambda' + 1)E'' + \lambda'(\nu B - \varepsilon'')$; donc, multipliant par $\varepsilon'' + \nu B$, mettant $E''E'''$ à la place de $B - \varepsilon''^2$, & diviſant enſuite par $E''$, on aura

$$\frac{(\varepsilon + \nu B)\,(\varepsilon' + \nu B)\,(\varepsilon'' + \nu B)}{E' \cdot E''} = \lambda'E''' + (\lambda''\lambda' + 1)\,(\varepsilon'' + \nu B).$$

Subſtituant de nouveau $\lambda'''E''' - \varepsilon'''$ à la place de $\varepsilon''$, multipliant enſuite par $\varepsilon''' + \nu B$, & diviſant par $E'''$, après avoir mis $E'''E^{IV}$ pour $B - \varepsilon'''^2$, on aura

$$\frac{(\varepsilon + \nu B)\,(\varepsilon' + \nu B)\,(\varepsilon'' + \nu B)\,(\varepsilon''' + \nu B)}{E' \cdot E'' \cdot E'''} =$$

$$(\lambda''\lambda' + 1)\,E^{IV} + (\lambda'''(\lambda''\lambda' + 1) + \lambda')\,(\varepsilon''' + \nu B)$$

& ainſi de ſuite.

D'où il eſt facile de conclure que, ſi on forme la ſérie ſuivante

$$\left.\begin{aligned} l &= 1 \\ l' &= \lambda'\,l \\ l'' &= \lambda''\,l' + l \\ l''' &= \lambda'''l'' + l' \\ l^{IV} &= \lambda^{IV}l''' + l'' \\ l^{V} &= \lambda^{V}l^{IV} + l''' \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (\pi)$$

on aura en général

$$\frac{(\varepsilon + \nu B)\,(\varepsilon' + \nu B)\,(\varepsilon'' + \nu B) \cdots\cdots (\varepsilon^{\xi} + \nu B)}{E' \cdot E'' \cdot E''' \cdot \cdots \cdot E^{\xi}}$$

$$= l^{\xi-1}E^{\xi+1} + l^{\xi}(\varepsilon^{\xi} + \nu B).$$

40. Donc, puiſqu'on a par les formules de l'art. 38

$$R + SVB = \frac{(\varepsilon + VB)\,(\varepsilon' + VB) \cdots (\varepsilon^{m-1} + VB)}{E' \cdot E'' \cdots E^{m-1}}$$

ſi on fait dans la derniere formule de l'art. préc. $\rho = m - 1$, on aura

$$R + SVB = l^{m-2}E^m + l^{m-1}(\varepsilon^{m-1} + VB);$$

mais on a par l'hypotheſe (art. 37) $E^m = 1$; de plus on a vu (art. 35) que les quantités $E'$, $E''$ etc. doivent être telles que l'on ait $E' > VB - \varepsilon$, $E'' > VB - \varepsilon'$ etc., de ſorte qu'il faudra auſſi que l'on ait $E^m = 1 > VB - \varepsilon^{m-1}$, & par conſéquent $\varepsilon^{m-1} > VB - 1$; donc, puiſque $\varepsilon^{m-1}$ doit être en même tems un nombre entier poſitif $< VB$ (art. 32), il eſt clair qu'on ne peut prendre pour $\varepsilon^{m-1}$ que le nombre entier qui eſt immédiatement moindre que $VB$.

Donc, ſi on dénote ce nombre par $\beta$, en ſorte que $\beta$ ſoit la racine carrée approchée de B, on aura $\varepsilon^{m-1} = \beta$, & par conſéquent

$$R + SVB = l^{m-2} + l^{m-1}(\beta + VB);$$

donc

$$R = \beta l^{m-1} + l^{m-2}, \qquad S = l^{m-1}.$$

Ainſi on connoîtra aiſément R & S par le moyen des formules ($\pi$). Il y a cependant deux cas qui paroiſſent devoir ſouffrir quelque exception; l'un eſt celui où $m = 0$, & l'autre celui où $m = 1$; en effet dans ces cas on auroit des expoſans de $l$ négatifs, ce qui n'a point lieu dans les formules ($\pi$) de l'art. préc.

Or 1°. ſi $m = 0$, ce qui arrive lorſque $E = 1$, on aura dans les formules de l'art. 38 $u = n\mu$, & l'on trouvera ſimplement l'équation

$$((\varepsilon + VB)\,(\varepsilon' + VB)\,(\varepsilon'' + VB) \cdots (\varepsilon^{\mu-1} + VB))^n = (EE'E'' \cdots E^{\mu-1})^n\,(r + sVB)$$

ſavoir

$$(X + YVB)^n = r + sVB$$

laquelle étant comparée à l'équation générale

$$(R + SV\!B)\,(X + YV\!B)^{\mu} = r + sV\!B$$

donne $R + SV\!B = 1$, & par conſéquent $R = 1$, $S = 0$.

Ainſi on aura d'abord dans ce cas $r = \xi$, & $s = \psi$ (art. 38).

2°. Si $m = 1$, ce qui arrivera lorſque $E' = 1$, il eſt clair que la formule générale

$$\frac{(\varepsilon + V\!B)\,(\varepsilon' + V\!B) \text{ - - - - } (\varepsilon^{m-1} + V\!B)}{E' \quad - \quad E'' \quad \text{- - - -} \quad E^{m-1}} = R + SV\!B$$

ſe reduira à celle-ci: $\varepsilon + V\!B = R + SV\!B$, d'où l'on aura $R = \varepsilon$, & $S = 1$; & comme $\varepsilon = \varepsilon^{m-1} = \beta$, on aura dans ce cas $R = \beta$ & $S = 1$.

41. Faiſons maintenant $\varrho = \mu - 1$, & l'on aura par les formules des art. 38, & 39

$$X + YV\!B = \frac{l^{\mu-2}E^{\mu} + l^{\mu-1}(\varepsilon^{\mu-1} + V\!B)}{E}.$$

Or l'on a, par les formules ($\lambda$), $\varepsilon^{\mu-1} = \lambda^{\mu}E^{\mu} - \varepsilon^{\mu}$, donc, à cauſe de $E^{\mu} = E$, $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon$ (art. 37), & $l^{\mu} = \lambda^{\mu}l^{\mu-1} + l^{\mu-2}$ par les formules ($\pi$), on aura

$$X + YV\!B = l^{\mu} + \frac{l^{\mu-1}(V\!B - \varepsilon)}{E}, \qquad \text{d'où}$$

$$X = l^{\mu} - \frac{\varepsilon l^{\mu-1}}{E}, \qquad Y = \frac{l^{\mu-1}}{E}.$$

Or, quoique ces expreſſions de X, & de Y ſoient ſous une forme fractionaire, on peut néanmoins être aſſuré qu'elles donneront toujours des nombres entiers; autrement les nombres $p$, & $q$ ne feroient pas toujours entiers, ce qui eſt contre la nature de nos formules.

Mais, pour ne laiſſer aucun doute là-deſſus, je vais donner d'autres expreſſions de X, & de Y, où il n'y aura point de fractions.

Pour

Pour cela j'obſerve, qu'à cauſe de $E^{\mu} = E$, $E^{\mu+1} = E'$ etc. $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon$, $\varepsilon^{\mu+1} = \varepsilon'$ etc. (art. 37), la quantité

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{\mu-1} + \sqrt{B})}{E \quad - E' \quad - E'' \quad - \cdots\cdots - E^{\mu-1}}$$

peut ſe mettre auſſi ſous cette forme

$$\frac{(\varepsilon^{m} + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+2} + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{m+\mu-1} + \sqrt{B})}{E^{m} \quad - E^{m+1} \quad - E^{m+2} \quad - \cdots\cdots - E^{m+\mu-1}}$$

& on prouvera d'une maniere ſemblable à celle de l'art. 39, que l'on aura

$$\frac{(\varepsilon'' + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})}{E^{m+1}} = E^{m+2} + \lambda^{m+1}\,(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})$$

$$\frac{(\varepsilon^{m} + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+2} + \sqrt{B})}{E^{m+1} \quad - E^{m+2}} = \lambda^{m+1} E^{m+3} + (\lambda^{m+2} \lambda^{m+1} + 1)(\varepsilon^{m+2} + \sqrt{B})$$

& ainſi de ſuite; de ſorte que ſi l'on conſidere la ſérie

$$\lambda^{m+1},\ \lambda^{m+2},\ \lambda^{m+3} \text{ etc.} \quad \lambda^{m+\mu}$$

laquelle, à cauſe de $\lambda^{\mu+1} = \lambda'$, $\lambda^{\mu+2} = \lambda''$ etc., revient à celle-ci $\lambda^{m+1}$, $\lambda^{m+2}$, $\lambda^{m+3}$ etc. $\lambda^{\mu}$, $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc., $\lambda^{m}$ & qu'on la repréſente, pour plus de ſimplicité, ainſi:

$$\Lambda',\ \Lambda'',\ \Lambda''',\ \&c.\quad \Lambda^{\mu}.$$

qu'enſuite on forme par ſon moyen la ſérie ſuivante

$$\left.\begin{aligned} L &= 1 \\ L' &= \Lambda' L \\ L'' &= \Lambda'' L' + L \\ L''' &= \Lambda''' L'' + L' \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (\varrho)$$

on aura

$$X + Y\sqrt{B} = \frac{L^{\mu-2}E^{m+\mu} + L^{\mu-1}(\varepsilon^{m+\mu-1} + \sqrt{B})}{E^m}.$$

Mais $E^m = 1$, $E^{m+\mu} = E^m = 1$, $\varepsilon^{m+\mu-1} = \varepsilon^{m-1} = \beta$, donc

$$X + Y\sqrt{B} = L^{\mu-2} + L^{\mu-1}(\beta + \sqrt{B})$$

d'où

$$X = \beta L^{\mu-1} + L^{\mu-2}, \qquad Y = L^{\mu-1}.$$

Il eſt bon de remarquer que les quantités X & Y ne dépendent que de la valeur de B, & nullement de celle de E; de ſorte que ces quantités étant une fois trouvées, elles ſerviront pour réſoudre toutes les équations de la forme $\pm E = s^2 - Bs^2$, où la valeur de B ſera la même.

En effet, ſi on conſidere l'équation $\pm E^{m-1}E^m = B - (\varepsilon^{m-1})^2$ qui eſt une des équations (*u*) de l'art. 31, on aura (à cauſe de $E^m = 1$, & $\varepsilon^{m-1} = \beta$) $\pm E^{m-1} = B - \beta^2$, de ſorte que $E^m$, & $E^{m-1}$ ſeront donnés indépendamment de la valeur de E; donc, ſi on forme par la méthode de l'art. 33 les ſuites $E^m$, $E^{m+1}$, $E^{m+2}$ etc. & $\varepsilon^m$, $\varepsilon^{m+1}$, $\varepsilon^{m+2}$ etc. ces ſuites ſeront auſſi toutes données (art. 35); donc la quantité

$$\frac{(\varepsilon^m + \sqrt{B})(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})(\varepsilon^{m+2} + \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{m+\mu-1} + \sqrt{B})}{E^m \cdot E^{m+1} \cdot E^{m+2} \cdots E^{m+\mu-1}}$$

ſera auſſi donnée; donc $X + Y\sqrt{B}$ ſera donné, par conſéquent X, & Y le ſeront auſſi.

Maintenant je dis que les quantités X, & Y ſont telles que $X^2 - BY^2 = \pm 1$. Car on a (art. 38)

$$X + Y\sqrt{B} = \frac{(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{\mu-1} + \sqrt{B})}{E \cdot E' \cdot E'' \cdots E^{\mu-1}},$$

donc prenant le radical $\sqrt{B}$ en $-$ on aura auſſi

X —

$$X - Y\sqrt{B} = \frac{(\varepsilon - \sqrt{B})(\varepsilon' - \sqrt{B})(\varepsilon'' - \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{\mu-1} - \sqrt{B})}{E \cdot E' \cdot E'' \cdots E^{\mu-1}}$$

donc, multipliant ces deux équations enſemble, il viendra

$$X^2 - BY^2 = \frac{(\varepsilon^2 - B)(\varepsilon'^2 - B)(\varepsilon''^2 - B) \cdots ((\varepsilon^{\mu-1})^2 - B)}{E^2 \cdot E'^2 \cdot E''^2 \cdots (E^{\mu-1})^2}.$$

Mais on a par les formules (κ) $\varepsilon^2 - B = -EE'$, $\varepsilon'^2 - B = -E'E''$ etc., donc

$$X^2 - BX^2 = \pm \frac{EE'E'E''E''E''' \cdots E^{\mu-1}E^{\mu}}{E^2 \cdot E'^2 \cdot E''^2 \cdots (E^{\mu-1})^2}$$

ſavoir

$$X^2 - BY^2 = \pm \frac{E^{\mu}}{E} = \pm 1,$$

le ſigne ſupérieur étant pour le cas où $\mu$ eſt pair, & l'inférieur pour celui où $\mu$ eſt impair.

42. A l'égard des valeurs de $R'$ & $S'$ qui entrent dans les expreſſions de $r'$ & $s'$, on peut les trouver de la même maniere que celles de R & S, par le développement de la quantité

$$\frac{(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{m-1} + \sqrt{B})}{E'' \cdot E''' \cdots E^{m-1}}$$

& il eſt facile de voir qu'on aura les mêmes expreſſions que pour R & S, en augmentant ſeulement dans les formules (π) les expoſans d'une unité, c'eſt à dire, en y mettant $''$, $'''$, $''''$ etc. à la place de $'$, $''$, $'''$ etc. & $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. à la place de $\lambda'$, $\lambda''$ etc.; ainſi on aura néceſſairement pour $R'$ & $S'$ des nombres entiers, ainſi que pour R & S; mais, pour ne pas avoir de nouvelles formules à calculer, il ſuffira de prendre l'équation de l'art. 38, ſavoir $r' + s'\sqrt{B} = \frac{E'(r + s\sqrt{B})}{\varepsilon + \sqrt{B}}$, laquelle, à cauſe de $B - \varepsilon^2 = EE'$, ſe change en celle-ci: $r' + s'\sqrt{B} = \frac{(\sqrt{B} - \varepsilon)(r + s\sqrt{B})}{E} = \frac{Bs - \varepsilon r + (r - \varepsilon s)\sqrt{B}}{E}$; d'où

$$r' = \frac{Bs - \varepsilon r}{E}, \qquad s' = \frac{r - \varepsilon s}{E}.$$

Ainſi, connoiſſant les valeurs de $r$ & $s$, on connoitra ſur le champ celles de $r'$ & $s'$, & quoique ces expreſſions ſoient ſous une forme fractionaire, on peut être aſſuré qu'elles donneront toujours des nombres entiers, parce que ces expreſſions doivent être équivalentes à celles de l'art. 38, leſquelles donnent évidemment des nombres entiers, puiſque $R'$, $S'$ & X, & Y ſont toujours des nombres entiers, comme nous venons de le voir.

43. Nous avons donc donné une méthode directe & générale pour réſoudre en nombres entiers (lorſque cela eſt poſſible) toute équation de la forme $\pm E = r^2 - Bs^2$, E étant $< \sqrt{B}$, & $r$, & $s$ premiers entr'eux, de ſorte qu'on eſt maintenant en état de réſoudre auſſi toute équation de la forme $A = p^2 - Bq^2$, A étant un nombre quelconque entier poſitif, ou négatif (art. 28).

Pour cela on remarquera que l'on a, par les formules ($\varepsilon$) & ($\eta$), $r\sigma - s\varrho = \pm 1$, & $rs' - sr' = \pm 1$, d'où l'on tire $r(\sigma - s') - s(\varrho - r') = 0$, & de là $\frac{r}{s} = \frac{\varrho - r'}{\sigma - s'}$, de ſorte que, comme $r$, & $s$ ſont premiers entr'eux, on aura néceſſairement

$$\varrho - r' = \lambda r, \qquad \& \quad \sigma - s' = \lambda s,$$

& de là

$$\varrho = \lambda r + r', \qquad \sigma = \lambda s + s'$$

$\lambda$ étant un nombre quelconque entier.

De plus on a, par les mêmes formules ($\varepsilon$), $r\varrho - Bs\sigma = \varepsilon$; donc, mettant à la place de $\varrho$, & $\sigma$ les valeurs précédentes, on aura $\varepsilon = \lambda(r^2 - Bs^2) + rr' - Bss'$, or $r^2 - Bs^2 = \pm E$, & $rr' - Bss' = \mp \varepsilon$ (art. 31), donc on aura $\pm \varepsilon = \lambda E - \varepsilon$, d'où

$$\varepsilon = \lambda E \mp \varepsilon.$$

Or

Or il faut de plus (art. 33) que l'on ait $\epsilon < \sqrt{B}$ & $> \sqrt{B} - E$, donc $\lambda E \mp e < \sqrt{B}$, & $\lambda E \mp e > \sqrt{B} - E$, ce qui donne ces deux conditions

$$\lambda < \frac{\sqrt{B} \pm e}{E}, \qquad \lambda > \frac{\sqrt{B} \pm e}{E} - 1$$

par leſquelles on pourra déterminer $\lambda$, parce que $\lambda$ devant être un nombre entier, il eſt viſible qu'il ne pourra être autre choſe que le nombre entier qui ſera immédiatement plus petit que $\frac{\sqrt{B} \pm e}{E}$.

Ainſi, puiſque E, & $e$ ſont connus (art. 28), on connoitra $\lambda$ & $\epsilon$ ſans avoir beſoin d'aucun tâtonnement.

Maintenant, puiſqu'on a (art. préc.) $r' = \frac{Bs - \epsilon r}{E}$, $s' = \frac{r - \epsilon s}{E}$, & que $\varrho = \lambda r + r'$, $\sigma = \lambda s + s'$, on aura

$$\varrho = \frac{(\lambda E - \epsilon) r + Bs}{E}, \quad \sigma = \frac{(\lambda E - \epsilon) s + r}{E}$$

ſavoir, à cauſe de $\lambda E - \epsilon = \pm e$

$$\varrho = \frac{Bs \pm er}{E}, \quad \sigma = \frac{r \pm es}{E}$$

expreſſions qui donneront toujours des nombres entiers, puiſque $r$, $s$, $r'$ & $s'$ étant entiers auſſi bien que $\lambda$, il eſt néceſſaire que $\varrho$, & $\sigma$ le ſoient auſſi. Or, connoiſſant $r$, $s$, $\varrho$ & $\sigma$, on pourra en retrogradant trouver $p$, & $q$ (art. 28).

Il faut remarquer que le ſigne ambigu de $e$ dans les formules précédentes ſe rapporte à celui de E dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$; mais nous avons vu (art. 28) que, pour avoir toutes les ſolutions poſſibles de l'équation $A = p^2 - Bq^2$, il faut prendre ſucceſſivement $e$ poſitif & négatif, en changeant dans ce dernier cas les ſignes de $\mu'$, $\mu''$, $\mu'''$ etc. dans les formules ($\gamma$), de ſorte que chaque valeur de $e$

donnera toujours deux valeurs de $\epsilon$ (à moins qu'elles ne reviennent au même) & par conſéquent deux valeurs de R, S, de $r$, $s$ & de $\varrho$ & $\sigma$, d'où l'on tirera deux expreſſions générales de $p$, & $q$.

44. Comme l'on a par l'art. 39

$$r = R\xi + BS\psi, \qquad s = R\psi + S\xi$$

& par l'art. préc., $\varrho = \frac{Bs \pm er}{E}$, $\sigma = \frac{r \pm es}{E}$, ſi on fait pour abréger

$$T = \frac{BS \pm eR}{E}, \qquad V = \frac{R \pm eS}{E}$$

on aura

$$\varrho = T\xi + BV\psi, \qquad \sigma = T\psi + V\xi$$

& il eſt facile de voir par la nature des formules ($\gamma$) que ces valeurs de $r$, $s$, $\varrho$, & $\sigma$, ſavoir de $p^n$, $q^n$, $p^{n+1}$, $q^{n+1}$ (art. 28) donneront pour $p$, & $q$ des expreſſions de cette forme

$$p = (fR + gT)\xi + B(fS + gV)\psi$$
$$q = (fR + gT)\psi + (fS + gV)\xi$$

$f$, & $g$ étant des nombres entiers dépendans des nombres $\mu'$, $\mu''$, $\mu'''$ etc. Donc, puiſqu'on a (art. 28)

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^n + (X - Y\sqrt{B})^n}{2}$$

$$\psi = \frac{(X + Y\sqrt{B^2})^n + (X - Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}$$

ou bien, en développant les puiſſances $n^{\text{emes}}$,

$$\xi = X^n + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2}Y^2B + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4}X^{n-4}Y^4B^2 + \text{etc.}$$

$$\psi = nX^{n-1}Y + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3}X^{n-3}Y^3B + \text{etc.}$$

&

& que $n$ peut être un nombre quelconque entier poſitif tel que $n\mu+m$, ſoit pair ou impair, ſuivant que le ſigne ſupérieur, ou l'inférieur aura lieu dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ (art. 37), il eſt clair que toute équation de la forme $A = p^2 - Bq^2$ (B étant poſitif), lorſqu'elle eſt réſoluble en nombres entiers, admet néceſſairement une infinité de ſolutions; de ſorte que le nombre des ſolutions de ces ſortes d'équations ſera toujours nul ou infini, au lieu que ce nombre eſt toujours néceſſairement limité lorſque B eſt négatif (art. 27).

45. M. Euler a donné, dans le Tome IX des nouveaux Commentaires de Petersbourg, une très belle méthode pour trouver une infinité de ſolutions en nombres entiers des équations de la forme $A + Cq + Bq^2 = p^2$ lorſqu'on en connoit une ſeule. Suivant cette méthode, ſi on fait pour plus de ſimplicité $C = 0$, & qu'on nomme P & Q les valeurs connues de $p$, & $q$, en ſorte que l'on ait $P^2 - BQ^2 = A$, & que X, & Y ſoient des nombres entiers tels que $X^2 - BY^2 = 1$, on aura en général, en conſervant les expreſſions de $\xi$ & $\psi$ de l'art. préc.,

$$p = \pm P\xi + BQ\psi, \qquad q = \pm P\psi + Q\xi$$

l'expoſant $n$ des quantités $\psi$ & $\xi$ pouvant être un nombre quelconque, poſitif ou négatif.

Il ne ſeroit pas difficile de faire voir *a priori* que toutes les ſolutions que peuvent fournir ces formules ſe trouveront néceſſairement parmi celles que donnera notre méthode; cela ſuit évidemment de ce que cette méthode doit donner abſolument toutes les ſolutions poſſibles. Mais on auroit tort de croire que les formules dont il s'agit puiſſent donner toujours toutes les ſolutions poſſibles lorſqu'on ne connoit qu'une ſeule valeur de P & Q.

Pour le faire voir d'une maniere générale, nous commencerons par remarquer qu'en faiſant $n$ négatif on n'a point de nouvelles valeurs de $\xi$ & de $\psi$, mais que la quantité $\xi$ demeure la même, & que celle de $\psi$ devient ſimplement négative. En effet, en mettant $-n$ au lieu de $n$, on aura (art. préc.)

$$\xi = \frac{1}{2(X + Y\sqrt{B})^n} + \frac{1}{2(X - Y\sqrt{B})^n}$$
$$= \frac{(X - Y\sqrt{B})^n + (X + Y\sqrt{B})^n}{2(X^2 - BY^2)^n}$$

& de même

$$\psi = \frac{(X - Y\sqrt{B})^n - (X + Y\sqrt{B})^n}{2(X^2 - BY^2)^n\sqrt{B}}$$

mais on a (hyp.) $X^2 - BY^2 = 1$; donc

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^n + (X - Y\sqrt{B})^n}{2}$$

$$\psi = -\frac{(X + Y\sqrt{B})^n - (X - Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}.$$

De ſorte qu'au lieu de ſuppoſer $n$ poſitif, & négatif, il ſuffira de faire $n$ poſitif, & de prendre $\psi$ en plus & en moins; cela poſé,

Suppoſons que $P'$, & $Q'$ ſoient de nouvelles valeurs de $p$, & $q$ dans l'équation $p^2 - Bq^2 = A$, en ſorte que l'on ait auſſi $P'^2 - BQ'^2 = A$, & voyons ſi ces valeurs ſeront néceſſairement renfermées dans les expreſſions précédentes de $p$, & $q$. Soit donc

$$P' = \pm P\xi + BQ\psi, \qquad Q' = \pm P\psi + Q\xi$$

& tirant les valeurs de $\xi$, & $\psi$, on aura, à cauſe de $P^2 - BQ^2 = A$,

$$\xi = \frac{\pm PP' - BQQ'}{A}, \qquad \psi = \frac{\pm PQ' - QP'}{A}.$$

Donc, puiſque les nombres $\xi$, & $\psi$ ſont toujours entiers, à cauſe que X & Y ſont des nombres entiers par l'hypotheſe; & que $n$ eſt auſſi un nombre entier poſitif, il faudra que les deux quantités $\pm PP' - BQQ'$ & $\pm PQ' - QP'$ ſoient toujours diviſibles par A, en prenant l'un ou l'autre des ſignes ambigus. Or j'obſerve d'abord que, ſi la ſeconde de ces quantités eſt diviſible par A, la premiere le ſera auſſi; car, puiſqu'on a $A = P^2 - BQ^2$, & $A = P'^2 - BQ'^2$, on aura

aura auſſi (art. 9) $A^2 = (PP' \pm BQQ')^2 - B(PQ' \pm QP')^2$; d'où l'on voit que, ſi $PQ' \pm QP'$ eſt diviſible par A, $PP' \pm BQQ'$ le ſera auſſi. Ainſi tout ſe réduit à ſavoir ſi la quantité $PQ' \pm QP'$ ſera toujours diviſible par A, ſuppoſé que l'on ait $P^2 - BQ^2 = A$, & $P'^2 - BQ'^2 = A$; or, comme ces deux équations de condition renferment le nombre B qui ne ſe trouve point dans la quantité $PQ' \pm QP'$, on aura, en chaſſant B, cette condition unique $A(Q'^2 - Q^2) = P^2Q'^2 - Q^2P'^2 = (PQ' + QP')(PQ' - QP')$; par laquelle on voit qu'il n'eſt pas abſolument néceſſaire que l'une ou l'autre des quantités $PQ' + QP'$, $PQ' - QP'$, ſoit diviſible par A, à moins que A ne ſoit un nombre premier. Ainſi, toutes les fois que A ne ſera pas un nombre premier, l'équation $A = p^2 - Bq^2$ pourra avoir des ſolutions qui ne ſauroient être contenues dans les formules de M. Euler.

Pour s'en convaincre par un exemple, ſoit $A = ab$, & ſuppoſons $a = f^2 - Bg^2$, $b = h^2 - Bl^2$, on aura $A = (fh \pm Blg)^2 - B(fl \pm hg)^2$; de ſorte qu'on pourra prendre

$$P = fh + Blg, \qquad Q = fl + hg$$
$$P' = fh - Blg, \qquad Q' = fl - hg$$

& alors on aura

$$PQ' + QP' = 2lh(f^2 - Bg^2), \text{ \& } PQ' - QP' = -2fg(h^2 - Bl^2)$$

ſavoir

$$PQ' + QP' = 2lha, \qquad PQ' - QP' = -2fgb;$$

donc, pour que l'une ou l'autre de ces deux quantités ſoit diviſible par $A = ab$, il faudra ou que $2lh$ ſoit diviſible par $b$, ou que $2fg$ le ſoit par $a$; or c'eſt ce qui n'aura point lieu dans une infinité de cas, & ſurtout ſi $a$, & $b$ ſont des nombres premiers différens de 2, parce qu'alors il ſera impoſſible, à cauſe des équations $a = f^2 - Bg^2$, & $b = h^2 - Bl^2$, que $f$, ou $g$ ſoient diviſibles par $a$, ou que $h$, ou $l$ le ſoient par $b$.

On

On voit par là que, pour que les formules de M. Euler pûſſent donner toutes les ſolutions poſſibles, il faudroit que les valeurs de $\xi$, & de $\psi$ pûſſent être rompues; en effet ce grand Géometre remarque lui-même, à l'art. 25 du premier Mémoire du Tome cité, qu'en prenant, lorſque cela eſt poſſible, pour X & Y des nombres rompus dont le dénominateur ſoit 2, on trouvera ſouvent beaucoup plus de ſolutions qu'en ne prenant pour X, & Y que des nombres entiers; & il paroit croire qu'on pourra avoir de cette maniere toutes les ſolutions poſſibles de l'équation dont il s'agit. Suppoſons donc en général que X, & Y ſoient des fractions dont le dénominateur ſoit 2, ou bien mettons $\frac{X}{2}$, & $\frac{Y}{2}$ à la place de X & Y dans les expreſſions de $\xi$, & $\psi$, & il eſt clair que ces quantités deviendront $\frac{\xi}{2^n}$, & $\frac{\psi}{2^n}$; de ſorte qu'on aura dans ce cas

$$\frac{\xi}{2^n} = \frac{\mp PP' - BQQ'}{A}, \quad \frac{\psi}{2^n} = \frac{\mp PQ' - QP'}{A}$$

ou bien

$$\xi = \frac{2^n(\mp PP' - PQQ')}{A}, \quad \psi = \frac{2^n(\mp PQ' - QP')}{A};$$

d'où, à moins que A ne ſoit une puiſſance de 2, on pourra tirer les mêmes concluſions que ci-deſſus. Ainſi cette généraliſation ne ſuffit pas encore pour avoir toutes les ſolutions poſſibles dans tous les cas.

### Exemples.

46. Donnons à préſent quelques exemples pour montrer l'uſage des méthodes précédentes; nous conſidérerons d'abord le cas où B eſt un nombre négatif, enſuite celui où B eſt poſitif.

*Exemple* 1. Soit propoſé de réſoudre l'équation

$$109 = u^2 + 7t^2$$

en ſuppoſant que $u$, & $t$ ſoient des nombres entiers.

Je remarque d'abord que, comme le nombre 109 ne contient aucun facteur carré, les nombres $u$, & $t$ ſeront néceſſairement premiers entr'eux (art. 22); ainſi on fera $u = p$, $t = q$, $A = 109$, & $B = -7$ pour avoir l'équation de l'art. 23; de ſorte qu'on n'aura à réſoudre que cette ſeule équation

$$109 = p^2 + 7q^2.$$

On commencera donc par chercher un nombre $\alpha < \frac{109}{2}$, & tel que $\alpha^2 + 7$ ſoit diviſible par 109; ou bien on cherchera un multiple de 109 qui ſoit de la forme $\alpha^2 + 7$ (art. 20, ex. 1), & l'on trouvera $109.23 = 50^2 + 7$; de ſorte que $\alpha = 50$. La valeur de $\alpha$ étant connue, on formera une ſuite d'équations analogues à celles de l'art. 26, juſqu'à ce que l'on parvienne à un terme $A^n = \text{ou} < 7$; & l'on aura

$$109.23 = 50^2 + 7, \quad \alpha = 50 \qquad A' = 23$$
$$23.1 = 4^2 + 7, \quad \alpha' = -2A' + \alpha = 4, \quad A'' = 1 = A^n$$

enſuite

$$p = p'' + 2p', \qquad q = q'' + 2q'$$

& comme l'on a trouvé $A^n = 1 = A''$, on aura (art. 27)

$$p'' = 1, \qquad q'' = 0$$
$$p' = \alpha' = 4, \qquad q' = 1.$$

Donc $p = 9$, $q = 2$.

Or 109 étant un nombre premier, il n'exiſte point d'autre nombre $\alpha$ qui ait les conditions requiſes (art. 24); donc l'équation propoſée n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule ſolution en nombres entiers, laquelle eſt $u = 9$, & $t = 2$.

*Exemple* 2. Soit propoſée l'équation

$$909 = u^2 + 17t^2$$

$u$, & $t$ devant être des nombres entiers.

Comme le nombre 909 n'eſt pas premier, on verra d'abord s'il renferme quelque facteur carré; or $909 = 101.9$, 101 étant premier; ainſi on pourra faire (art. 22) deux ſuppoſitions, ſavoir $u = p$, $t = q$, $A = 109$, ce qui donnera l'équation

$$909 = p^2 + 17q^2 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad (A)$$

enſuite $\rho = 3$, & par conſéquent $u = 3p$, $t = 3q$, $A = 101$; ce qui donnera cette autre équation

$$101 = p^2 + 17q^2 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad (B).$$

Commençons par l'équation (A) & il faudra chercher un nombre $\alpha < \frac{909}{2}$, tel que $\alpha^2 + 17$, qui ſoit diviſible par 909, ou, ce qui revient au même, un nombre $A' < \frac{A}{4} + 1 < 229$, qui multipliant 909 donne un carré plus 17 (art. 20).

Après quelques eſſais je trouve $A' = 149$, & $\alpha = 368$; & à l'aide de ces valeurs je forme les équations ſuivantes analogues à celles de l'art. 26,

$$909.149 = 368^2 + 17, \quad \alpha = 368, \qquad A' = 149$$
$$149.\ 33 = 70^2 + 17, \quad \alpha' = -2A' + \alpha = 70, \quad A'' = 33$$
$$33.\ 1 = 4^2 + 17, \quad \alpha'' = -2A'' + \alpha' = 4, \quad A''' = 1 = A^*$$

& par conſéquent

$$p = p'' + 2p', \qquad q = q'' + 2q'$$
$$p' = p''' + 2p'', \qquad q' = q''' + 2q''$$

& comme $A''' = 1$, on aura (art. 27)

$$p''' = 1 \qquad q''' = 0$$
$$p'' = \alpha'' = 4, \qquad q'' = 1.$$

Donc

$$p' = 9, \qquad q' = 2$$
$$p = 22, \qquad q = 5,$$

ce qui donne cette premiere ſolution de l'équation propoſée, $u = 22$, $t = 5$.

Maintenant, comme 909 n'eſt pas premier, on pourra (art. 24) trouver encore d'autres valeurs de $\alpha$; or, réſolvant 909 en ſes facteurs premiers, on aura $101.3.3$, de ſorte qu'on ne pourra faire que $a = 101$ & $b = 9$; ce qui ne donnera qu'une ſeule valeur de $\alpha$ (art. cité). On cherchera donc la derniere des fractions convergentes vers $\frac{a}{b} = \frac{101}{9}$ (art. 29) & l'on trouvera $\frac{45}{4}$, de ſorte qu'on aura $a' = 45$, $b' = 4$, & comme $\frac{45}{4} > \frac{101}{9}$, on aura $\omega = (1 + 2.101.4)\alpha$; c'eſt à dire, à cauſe de $\alpha = 368$, $\omega = 297712$; ainſi l'on aura, à cauſe de $A = 909$, $\beta = 909m \pm 297712 =$ (en prenant le ſigne inférieur & faiſant $m = 328$, afin que la valeur de $\beta$ devienne $< \frac{A}{2}$) $440$; c'eſt la nouvelle valeur de $\alpha$, & la ſeule qu'on puiſſe trouver de cette maniere; de ſorte qu'il ſeroit inutile d'en chercher encore d'autres.

Mettant donc en œuvre cette valeur, on trouvera les équations

$$909.213 = 440^2 + 17, \quad \alpha = 440 \qquad A' = 213$$
$$213.\ 1 = 14^2 + 17, \quad \alpha' = -2A' + \alpha = 14, \quad A'' = 1,$$

& de là

$$p = p'' + 2p', \qquad q = q'' + 2q',$$

& comme $A'' = 1$, on aura (art. 27)

$$p'' = 1 \qquad q'' = 0$$
$$p' = \alpha' = 14, \quad q' = 1.$$

Donc

$$p = 29, \qquad q = 2.$$

Ainſi l'on aura cette ſeconde ſolution $u = 29$, $t = 2$.

Or, comme on ne ſauroit trouver d'autres valeurs de $\alpha$, l'équation

(A) ne fournira pas non plus d'autres ſolutions; c'eſt pourquoi nous paſſerons à l'équation (B).

Ayant ici $A = 101$, on cherchera une valeur de $\alpha$ telle que $\alpha^2 + 17$ ſoit diviſible par 101, & qui ſoit en même tems $< \frac{A}{2} < 51$; or, ayant déjà trouvé ci-deſſus que $368^2 + 17$ eſt diviſible par 909, & par conſequent auſſi par 101, il n'y aura qu'à faire $\alpha = 101m \pm 368$, & déterminer enſuite $m$ & le ſigne ambigu en ſorte que $\alpha < \frac{101}{2}$; on fera donc $m = 4$, & on prendra le ſigne inférieur, ce qui donnera $\alpha = 36$.

Au moyen de cette valeur, on formera les équations

$$101.13 = 36^2 + 17, \quad \alpha = 36, \quad A' = 13 < 17,$$

d'où l'on voit d'abord, à cauſe que $A'$ eſt moindre que 17 & en même tems différent de l'unité, que l'équation (B) n'eſt point réſoluble, au moins d'après la valeur de $\alpha$ que nous venons de trouver (art. 27), & comme le nombre 101 eſt premier, il s'enſuit que l'équation (B) n'admet abſolument aucune ſolution en nombres entiers. De ſorte que l'équation propoſée $909 = u^2 + 17t^2$ n'eſt ſuſceptible que des deux ſolutions que nous avons trouvées ci-deſſus.

Suppoſons maintenant que B ſoit un nombre poſitif, &

*Exemple* 3. Soit propoſé de réſoudre l'équation de l'exemple 1 de l'art. 20, ſavoir $109 = u^2 - 7t^2$

avec cette condition que $u$, & $t$ ſoient des nombres entiers.

Puiſque 109 eſt un nombre premier, on ne pourra faire que $u = p$, $t = q$; donc $A = 109$, $B = 7$, de ſorte qu'on n'aura à réſoudre que cette ſeule équation

$$109 = p^2 - 7q^2.$$

Or, ayant déjà trouvé dans l'exemple cité $\alpha = 15$, $A' = 2$, on aura

$109 . 2 = 15^2 - 7$, $a = 15$ $A' = 2$

$2 \times -3 = 1 - 7$, $a' = -7A' + a = 1$, $A'' = -3$

& de là

$$p = p'' + 7p', \qquad q = q'' + 7q'$$

Donc, puiſque $a' < \sqrt{B}$, & $A'$ auſſi $< \sqrt{B}$, on fera (art. 28) $a' = e = 1$, $A' = \pm E = 2$, $A'' = \mp D = -3$, donc $E = 2$, $D = -3$, avec les ſignes ſupérieurs; & par conſéquent $p' = r$, $q' = s$, $p'' = \rho$, $q'' = \sigma$, de ſorte qu'on aura à réſoudre l'équation

$$2 = r^2 - 7s^2.$$

Or, ayant $E = 2$, $B = 7$, & $e = 1$, on aura (art. 43) $\lambda < \frac{\sqrt{7}+1}{2}$, & $> \frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1$, donc (à cauſe que la racine approchée de 7 eſt 2) $\lambda = 1$, & de là $\varepsilon = E - e = 1$. Ayant trouvé $\varepsilon$ on formera, à l'aide des formules $(\varkappa)$, $(\lambda)$ & $(\mu)$ des art. 31 & 32, les ſéries ſuivantes, où le ſigne $<$ indique qu'il faut prendre le nombre entier qui eſt immédiatement moindre,

$E = 2$ $\varepsilon = 1$

$E' = \frac{7-1}{2} = 3$, $\lambda' < \frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1$, $\varepsilon' = 1.3 - 1 = 2$

$E'' = \frac{7-4}{3} = 1$, $\lambda'' < \frac{\sqrt{7}+2}{1} = 4$, $\varepsilon'' = 4.1 - 2 = 2$

$E''' = \frac{7-4}{1} = 3$, $\lambda''' < \frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1$, $\varepsilon''' = 1.3 - 2 = 1$

$E^{IV} = \frac{7-1}{3} = 2$, $\lambda^{IV} < \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1$, $\varepsilon^{IV} = 1.2 - 1 = 1$

$E^{V} = \frac{7-1}{2} = 3$, $\lambda^{V} < \frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1$, $\varepsilon^{V} = 1.3 - 1 = 2$.

Donc, puiſque $E^{IV} = E$, & $E^{V} = E'$, on fera (art. 37) $E^{IV} = E^{\varkappa}$

ſavoir $\mu = 4$, & comme $E'' = 1$, on fera $E'' = E^m$, ſavoir $m = 2$; donc, à cauſe que l'on a pris les ſignes ſupérieurs, & que $m$ eſt pair, on en conclura que l'équation eſt réſoluble (art. 37).

On cherchera donc les valeurs de $l$, $l''$, $l'''$ etc. $l^\mu$ comme dans les formules ($\pi$) de l'art. 39, & l'on aura

$$\begin{aligned} l &= 1 \\ l'' &= 1l = 1 \\ l''' &= 4l'' + l = 5 \\ l'''' &= 1l''' + l'' = 6 \\ l''''' &= 1l'''' + l''' = 11 \end{aligned}$$

d'où par les formules des art. 40, & 41, on trouvera d'abord, à cauſe de $\beta = 2$ qui eſt le nombre entier immédiatement moindre que $\sqrt{7}$,

$$R = 2l'' + l = 3, \qquad S = l'' = 1$$

$$X = l''' - \frac{l''''}{2} = 8, \qquad Y = \frac{l''''}{2} = 3$$

donc (art. 38)

$$\xi = \frac{(8 + 3\sqrt{7})^n + (8 - 3\sqrt{7})^n}{2}$$

$$\psi = \frac{(8 + 3\sqrt{7})^n - (8 - 3\sqrt{7})^n}{2\sqrt{7}}$$

où $n$ pourra être un nombre quelconque poſitif entier, tel que $n\mu + m$ ſoit pair, c'eſt à dire que $4n + 2$ ſoit pair, d'où l'on voit que $n$ pourra être un nombre quelconque entier poſitif. Donc (même art.)

$$r = 3\xi + 7\psi, \qquad s = 3\psi + \xi$$

& enſuite par l'art. 44 en prenant toujours les ſignes ſupérieurs

$$T = \frac{7 + 3}{2} = 5, \qquad V = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

de ſorte qu'on aura

$$\rho =$$

$$\varrho = 5\xi + 14\psi, \qquad \sigma = 5\psi + 2\xi.$$

Donc, puiſque $r = p'$, $s = q'$, $\varrho = p''$, $\sigma = q''$, on aura

$$p = \varrho + 7r = 26\xi + 63\psi$$
$$q = \sigma + 7s = 26\psi + 9\xi.$$

Nous avons pris $e = 1$, c'eſt à dire poſitif; prenons maintenant $e = -1$, & l'on aura dans ce cas (art. 43)

$$p = p'' - 7p', \qquad q = q'' - 7q'.$$

Or, faiſant $e = -1$, on aura $\lambda < \frac{\sqrt{7}-1}{2}$, & $> \frac{\sqrt{7}-1}{2} - 1$; donc $\lambda = 0$, & de là $\varepsilon = -e = 1$, comme plus haut; ainſi on aura les mêmes valeurs de R, S, & de X, Y, & par conſéquent de $\xi$, $\psi$ & de $r$, $s$.

Maintenant on aura

$$T = \frac{7-3}{2} = 2, \qquad V = \frac{3-1}{2} = 1$$

donc $\varrho = 2\xi + 7\psi$, $\sigma = 2\psi + \xi$

d'où l'on trouvera encore

$$p = \varrho - 7r = -19\xi, \quad -42\psi,$$
$$q = \sigma - 7s = -19\psi \quad -6\psi$$

ou bien en changeant les ſignes

$$p = 19\xi + 42\psi, \qquad q = 19\psi + 6\psi.$$

Or, comme 109 eſt un nombre premier, on ne pourra trouver aucune autre valeur de $\alpha$ (art. 24), de ſorte que les expreſſions précédentes renfermeront néceſſairement toutes les ſolutions poſſibles de l'équation propoſée.

*Exemple* 4. Soit propoſée l'équation

$$1459 = u^2 - 30t^2.$$

Com-

Comme 1459 eſt un nombre premier, on ne pourra faire que $p = u$, $q = t$ & $A = 1459$, $B = 30$, de ſorte qu'on n'aura que l'équation

$$1459 = p^2 - 30q^2.$$

On cherchera donc un nombre $\alpha < \frac{1459}{2}$, & tel que $\alpha^2 - 30$ ſoit diviſible par 1459; ou bien on cherchera, comme dans l'exemple 4 de l'art. 20, un nombre $A' < \frac{A}{4} < \frac{1459}{4}$ dont le produit par 1459 étant augmenté de 30 ſoit un carré, & l'on trouvera $A' = 241$ & $\alpha = 593$, moyennant quoi on formera les équations

$$\begin{aligned}
1459.241 &= 593^2 - 30, & \alpha &= 593 & A' &= 241\\
241.\ 51 &= 111^2 - 30, & \alpha' &= -2A' + \alpha = 111, & A'' &= 51\\
51.\ 1 &= 9^2 - 30, & \alpha'' &= -2A'' + \alpha' = 9, & A''' &= 1\\
1 \times -5 &= 5^2 - 30, & \alpha''' &= -4A''' + \alpha'' = 5, & A^{IV} &= -5.
\end{aligned}$$

& de là

$$\begin{aligned}
p &= p'' + 2p', & q &= q'' + 2q'\\
p' &= p''' + 2p'', & q' &= q''' + 2q''\\
p'' &= p^{IV} + 4p''', & q'' &= q^{IV} + 4q'''.
\end{aligned}$$

Or, puiſque $\alpha''' < \sqrt{B}$, & que $A'''$, & $A^{IV}$ ſont auſſi chacun $< \sqrt{B}$, on fera $\alpha''' = 5 = e$, & $A''' = \pm E = 1$, $A^{IV} = \mp D = -5$, donc $E = 1$ & $D = 5$ avec les ſignes ſupérieurs. Enſuite on fera $p''' = r$, $q''' = s$, $p^{IV} = \varrho$, $q^{IV} = \sigma$, & l'on aura à réſoudre l'équation

$$1 = r^2 - 30s^2.$$

Maintenant, à cauſe de $E = 1$, $B = 30$, & $e = 5$, on aura (art. 43)

$$\lambda < \frac{\sqrt{30} + 5}{1} \quad \& > \frac{\sqrt{30} + 5}{1} - 1, \quad \text{donc}$$

$$\lambda = 10, \quad \& \ \varepsilon = \lambda E - e = 5.$$

Ayant

Ayant ainſi $\epsilon$, on formera les ſéries ſuivantes (art. 31 & 33)

$$E = 1 \qquad \epsilon = 5$$

$$E' = \frac{30-25}{1} = 5, \quad \lambda' < \frac{\sqrt{30}+5}{5} = 2, \quad \epsilon' = 2.5-5 = 5$$

$$E'' = \frac{30-25}{5} = 1, \quad \lambda'' < \frac{\sqrt{30}+5}{1} = 10, \quad \epsilon'' = 10.1-5 = 5$$

$$E''' = \frac{30-25}{1} = 5, \quad \lambda''' < \frac{\sqrt{30}+5}{10} = 1, \quad \epsilon''' = 1.5-5 = 0.$$

Donc, comme $E'' = E$, & $E''' = E'$, on fera (art. 37) $E'' = E^{\mu}$, c'eſt à dire $\mu = 2$, & comme l'on a en même tems $E = 1$, on fera $E^{m} = E$, ſavoir $m = 0$, ce qui donnera ſur le champ $R = 1$, $S = 0$, & par conſéquent $r = \xi$, $s = \psi$ (art. 40).

On formera donc la ſérie $l, l', l''$, (art. 39)

$$l = 1$$
$$l' = 2l = 2$$
$$l'' = 10l' + l = 21$$

& l'on aura (art. 41), à cauſe de $\mu = 2$, les valeurs ſuivantes

$$X = l'' - 5l' = 11, \qquad Y = l' = 2$$

donc (art. 38)

$$\xi = \frac{(11 + 2\sqrt{30})^{n} + (11 - 2\sqrt{30})^{n}}{2}$$

$$\psi = \frac{(11 + 2\sqrt{30})^{n} - (11 - 2\sqrt{30})^{n}}{2\sqrt{30}}$$

$n$ étant tel que $n\mu + m$ ſavoir $2n$ ſoit pair, de ſorte que $n$ pourra être un nombre entier poſitif quelconque (art. 37). Maintenant, puiſque $R = 1$, $S = 0$, $E = 1$, & $\epsilon = 5$, on aura (art. 44) $T = 5$, $V = 1$; d'où $\varrho = 5\xi + 30\psi$, $\sigma = 5\psi + \xi$.

Donc, ayant $p''' = r$, $q''' = s$, $p^{IV} = \varrho$, $q^{IV} = \sigma$, on trouvera en remontant

$$p'' = \varrho + 4r = 9\xi + 30\psi, \quad q'' = \sigma + 4s = 9\psi + \xi$$
$$p' = r + 2p'' = 19\xi + 60\psi, \quad q' = s + 2q'' = 19\psi + 2\xi$$
$$p = p'' + 2p' = 47\xi + 150\psi, \quad q = q'' + 2q' = 47\psi + 5\xi.$$

Faiſons maintenant $e$ négatif (art. 43), c'eſt à dire $e = -5$, & l'on aura dans ce cas

$$p = p'' - 2p', \qquad q = q'' - 2q'$$
$$p' = p''' - 2p'', \qquad q' = q''' - 2q''$$
$$p'' = p^{IV} - 4p''', \qquad q'' = q^{IV} - 4q'''.$$

Enſuite on aura $\lambda < \frac{\sqrt{30} - 5}{1} > \frac{\sqrt{30} - 5}{1} - 1$, donc $\lambda = 0$, & par conſéquent $\epsilon = \lambda E - e = 5$, comme ci-deſſus; de ſorte que les valeurs de $\xi$, & $\psi$ ſeront les mêmes que nous avons déjà trouvées. A l'egard de T, & V, on aura (à cauſe de $R = 1$, $S = 0$, $e = -5$, $E = 1$) $T = -5$, $V = 1$; donc $\varrho = -5\xi + 30\psi$, & $\sigma = -5\psi + \xi$; donc

$$p'' = \varrho - 4r = -9\xi + 30\psi, \quad q'' = \sigma - 4s = -9\psi + \xi$$
$$p' = r - 2p'' = +19\xi - 60\psi, \quad q' = s - 2q'' = 19\psi - 2\xi$$
$$p = p'' - 2p' = -47\xi + 150\psi, \quad q = q'' - 2q' = -47\psi + 5\xi.$$

Ainſi, en combinant les deux formules, on aura en général

$$p = \pm 47\xi + 150\psi, \quad q = \pm 47\psi + 5\xi.$$

Et comme 1459 eſt un nombre premier, il n'y auroit pas d'autres ſolutions que celles que nous venons de trouver.

*Exemple* 5. Etant propoſée l'équation

$$210 = u^2 - 46t^2$$

dont on connoit déjà cette ſolution $u = 29$, & $t = 43$; on demande toutes les autres ſolutions poſſibles en nombres entiers.

Comme 210 ne contient aucun facteur carré, $u$, & $t$ devront être toujours premiers entr'eux (art 22); ainſi on ſera $u = p$, $t =$

$t = q$, $A = 210$, & $B = 46$, de ſorte que l'équation à réſoudre ſera

$$210 = p^2 - 46q^2.$$

Maintenant, puiſqu'on connoit déjà une valeur de $p$, & $q$, ſavoir $p = 292$ & $q = 43$, on pourra s'en ſervir pour trouver la valeur de $\alpha$ dans l'équation $AA' = \alpha^2 - B$, ſavoir $210A' = \alpha^2 - 46$. Pour cela il n'y aura qu'à chercher la fraction $\frac{m}{n}$ qui précédera immédiatement la fraction $\frac{p}{q}$ dans la ſuite des fractions convergentes vers $\frac{p}{q}$ (art. 29), & faiſant $a = mp - Bnq$, on aura en général $\alpha = \mu A \pm a$ (art. 23).

Diviſant 292 par 43, enſuite 43 par le reſte 34, & ainſi ſucceſſivement, on aura les quotiens 6, 1, 3, 1, 3, 2, à l'aide deſquels on formera les fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{34}{5}$, $\frac{129}{19}$, $\frac{292}{43}$; ainſi on aura $m = 129$, $n = 19$; donc $a = 86$; de ſorte que comme 86 eſt $< \frac{A}{2}$, on fera $\mu = 0$, & l'on aura $\alpha = a = 86$; & de là on trouvera $A' = 35$. On formera donc les équations ſuivantes

$$\begin{aligned} 210 \times 35 &= (86)^2 - 46, & \alpha &= 86, & A' &= 35 \\ 35 \times 6 &= (16)^2 - 46, & \alpha' &= -2A' + \alpha = 16, & A'' &= 6 \\ 6 \times -7 &= (2)^2 - 46, & \alpha'' &= 3A'' - \alpha' = 2, & A''' &= -7, \end{aligned}$$

& par conſéquent

$$\begin{aligned} p &= p'' + 2p', & q &= q'' + 2q' \\ -p' &= p''' - 3p'', & -q' &= q''' - 3q''. \end{aligned}$$

Donc, puiſque $\alpha'' < \sqrt{B}$, & que $A''$ eſt auſſi $< \sqrt{B}$, on fera $\alpha'' = e = 2$, $A'' = \pm E = 6$, $A''' = \mp D = -7$; donc $E = 6$, $D = 7$, avec les ſignes ſupérieurs. Enſuite on fera $p'' = r$, $q'' = s$, $p''' = \rho$, $q''' = \sigma$, & l'on aura à réſoudre l'équation

$$6 = r^2 - 46s^2.$$

Or, puiſque $B = 46$, $E = 6$, $e = 2$, on aura (art. 43) $\lambda < \frac{\sqrt{46+2}}{6}$ & $> \frac{\sqrt{46+2}}{6} - 1$, donc $\lambda = 1$; donc $\varepsilon = \lambda E - e = 4$.

Ayant $\varepsilon$, on formera (art. 31, & 33) les ſéries ſuivantes, où le ſigne $<$ indique qu'il faut prendre les nombres entiers qui ſont immédiatement plus petits.

$E = 6$ $\qquad$ $\varepsilon = 4$

$E' = \frac{46-16}{6} = 5$, $\quad \lambda' < \frac{\sqrt{46+4}}{5} = 2$, $\quad \varepsilon' = 2.5-4 = 6$

$E'' = \frac{46-36}{5} = 2$, $\quad \lambda'' < \frac{\sqrt{46+6}}{2} = 6$, $\quad \varepsilon'' = 6.2-6 = 6$

$E''' = \frac{46-36}{2} = 5$, $\quad \lambda''' < \frac{\sqrt{46+6}}{5} = 2$, $\quad \varepsilon''' = 2.5-6 = 4$

$E^{IV} = \frac{46-16}{5} = 6$, $\quad \lambda^{IV} < \frac{\sqrt{46+4}}{6} = 1$, $\quad \varepsilon^{IV} = 1.6-4 = 2$

$E^{V} = \frac{46-4}{6} = 7$, $\quad \lambda^{V} < \frac{\sqrt{46+2}}{7} = 1$, $\quad \varepsilon^{V} = 1.7-2 = 5$

$E^{VI} = \frac{46-25}{7} = 3$, $\quad \lambda^{VI} < \frac{\sqrt{46+5}}{3} = 3$, $\quad \varepsilon^{VI} = 3.3-5 = 4$

$E^{VII} = \frac{46-16}{3} = 10$, $\quad \lambda^{VII} < \frac{\sqrt{46+4}}{10} = 1$, $\quad \varepsilon^{VII} = 1.10-4 = 6$

$E^{VIII} = \frac{46-36}{10} = 1$, $\quad \lambda^{VIII} < \frac{\sqrt{46+6}}{1} = 12$, $\quad \varepsilon^{VIII} = 12.1-6 = 6$

$E^{IX} = \frac{46-36}{1} = 10$, $\quad \lambda^{IX} = \frac{\sqrt{46+6}}{10} = 1$, $\quad \varepsilon^{IX} = 1.10-6 = 4$

$E^{X} = \frac{46-16}{10} = 3$, $\quad \lambda^{X} = \frac{\sqrt{46+4}}{3} = 3$, $\quad \varepsilon^{X} = 3.3-4 = 5$

$E^{XI}$

$$E^{XI} = \frac{46-25}{3} = 7, \quad \lambda^{XI} = \frac{V46+5}{7} = 1, \quad \varepsilon^{XI} = 1.7-5 = 2$$

$$E^{XII} = \frac{46-4}{7} = 6, \quad \lambda^{XII} = \frac{V46+2}{6} = 1, \quad \varepsilon^{XII} = 1.6-2 = 4$$

$$E^{XIII} = \frac{46-16}{6} = 5, \quad \lambda^{XIII} = \frac{V46+4}{5} = 2, \quad \varepsilon^{XIII} = 2.5-4 = 6$$

etc. etc. etc.

Donc, puiſque $E^{XII} = E$, & $E^{XIII} = E'$, on fera $E^{XII} = E^{\mu}$, ſavoir $\mu = 12$, & comme $E^{VIII} = 1$, on fera $E^{VIII} = E^{m}$, ſavoir $m = 8$.

On formera donc, par les formules ($\pi$) de l'art. 39, la ſérie $l$, $l'$, $l''$ etc. juſqu'à $l^{XII}$, en cette ſorte :

$$\begin{aligned}
l &= 1\\
l' &= 2l = 2\\
l'' &= 6l' + l = 13\\
l''' &= 2l'' + l' = 28\\
l^{IV} &= 1\,l''' + l'' = 41\\
l^{V} &= 1\,l^{IV} + l''' = 69\\
l^{VI} &= 3\,l^{V} + l^{IV} = 248\\
l^{VII} &= 1\,l^{VI} + l^{V} = 317\\
l^{VIII} &= 12\,l^{VII} + l^{VI} = 4052\\
l^{IX} &= 1\,l^{VIII} + l^{VII} = 4369\\
l^{X} &= 3l^{IX} + l^{VIII} = 17159\\
l^{XI} &= 1\,l^{X} + l^{IX} = 21528\\
l^{XII} &= 1\,l^{XI} + l^{X} = 38687.
\end{aligned}$$

Et l'on aura (art. 40, 41) $R = \beta l^{VII} + l^{VI}$, $S = l^{VII}$, $X = l^{XII} - \frac{\varepsilon' l^{XI}}{E}$, $Y = \frac{l^{XI}}{E}$, ſavoir à cauſe de $\beta = 6$,

$$R = 2150, \qquad S = 317$$
$$X = 24335, \qquad Y = 3588.$$

Donc, ſuppoſant en général

$$\xi = \frac{(X+Y\sqrt{B})^n+(X-Y\sqrt{B})^n}{2}, \quad \psi = \frac{(X+Y\sqrt{B})^n-(X-Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}$$

on aura (art. 38)

$$r = 2150\xi + 317\times 46\psi, \qquad s = 2150\psi + 317\xi,$$

& l'expoſant $n$ pourra être quelconque, pourvu que $n\mu + m = 16n + 8$ ſoit poſitif & pair; de ſorte que $n$ pourra être un nombre quelconque entier poſitif (art. 37).

Maintenant on aura (art. 44) en prenant les ſignes ſupérieurs,

$$T = \frac{BS + eR}{E} = 3147, \qquad V = \frac{R + eS}{E} = 464$$

& par conſéquent

$$\varrho = 3147\xi + 464\times 46\psi, \qquad \sigma = 3147\psi + 464\xi.$$

Donc, puiſque $p'' = r$, $q'' = s$, $p''' = \varrho$, $q''' = \sigma$, on aura

$$p' = -\varrho + 3r = 3303\xi + 487\times 46\psi, \quad q' = -\sigma' + 3s = 3303\psi + 487\xi$$
$$p = r + 2p' = 8756\xi + 1291\times 46\psi, \quad q = s + 2q' = 8756\psi + 1291\xi.$$

Faiſons à préſent $e$ négatif (art. 43), & l'on aura dans ce cas $\lambda < \frac{\sqrt{46}-2}{6}$ & $> \frac{\sqrt{46}-2}{6} - 1$, donc $\lambda = 0$, donc $\varepsilon = -e = 2$. Ainſi, en prenant $E = 6$, & $\varepsilon = 2$, on formera de nouvelles ſéries ſemblables aux précédentes.

Mais, ſans ſe donner cette peine, il ſuffira de remarquer que les valeurs de E, & de $\varepsilon$, répondent à celles de $E^{IV}$ & de $\varepsilon^{IV}$ des ſéries précédentes; d'où il s'enſuit que celles de E, $E'$, $E''$ etc. $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ etc. & $\lambda'$, $\lambda''$ etc. dont il s'agit ici, répondront à celles de $E^{IV}$, $E^{V}$, $E^{VI}$ etc. $\varepsilon^{IV}$, $\varepsilon^{V}$, $\varepsilon^{VI}$ etc. & $\lambda^{V}$, $\lambda^{VI}$ etc. des ſéries déjà trouvées; & qu'ainſi il n'y

n'y aura qu'à diminuer dans ces mêmes ſéries tous les expoſans de 4 pour les accommoder au cas préſent; & comme les termes qui ont 12 & 13 pour expoſans ſont les mêmes que ceux qui ont 0, & 1, il eſt évident que pour continuer les ſéries il n'y aura qu'à les recommencer après les termes dont l'expoſant ſera 11 (voycz l'exemple ſuivant & la Remarque de l'art. 47); de cette maniere on trouvera dans le cas préſent $E = 6$, $E' = 7$, $E'' = 3$ etc. $E^{IV} = 1$ etc. $E^{XII} = 6$, $E^{XIII} = 7$, & $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 3$, $\lambda^{III} = 1$, $\lambda^{IV} = 12$ etc., donc $m = 4$, & $\mu = 12$ comme plus haut. Or, puiſque les quantités X & Y ſont toujours les mêmes pour la même valeur de B (art. 41), il ſuffira de chercher R & S en faiſant la ſérie

$$\begin{aligned} l &= 1 \\ l' &= 1\,l = 1 \\ l^{IV} &= 3\,l' + l = 4 \\ l^{V} &= 1\,l^{IV} + l' = 5 \end{aligned}$$

d'où l'on aura

$$R = \beta\, l^{III} + l^{II} = 34, \qquad S = l^{III} = 5$$

& par conſéquent

$$r = 34\xi + 5 \times 46\psi, \qquad s = 34\psi + 5\xi$$

l'expoſant $n$ pouvant être de même un nombre quelconque entier poſitif, à cauſe que $12n + 4$ eſt toujours pair.

Or, à cauſe de $e = -2$, on aura $T = 27$, & $S = 4$, donc

$$\varrho = 27\xi + 4 \times 46\psi, \qquad \sigma = 27\psi + 4\xi.$$

Donc (art. 28)

$$p' = -\varrho - 3r = -129\xi - 19 \times 46\psi, \quad q' = -\sigma - 3s = -129\psi - 19\xi$$
$$p = r - 2p' = 292\xi + 43 \times 46\psi, \quad q = s - 2q' = 292\psi + 43\xi.$$

Les expreſſions de $p$, & $q$ que nous venons de trouver réſultent de la ſuppoſition de $a = 86$; or comme le nombre $A = 210$ n'eſt pas pre-

premier, il eſt clair qu'on pourra encore trouver d'autres valeurs de $\alpha$ (art. 24). Pour cela on décompoſera le nombre 210 en deux facteurs, $a$, & $b$ premiers entr'eux; & comme $210 = 2.3.5.7$, on aura

$$a = 15,\quad 21,\quad 30,\quad 35,\quad 42,\quad 70,\quad 105$$
$$b = 14,\quad 10,\quad 7,\quad 6,\quad 5,\quad 3,\quad 2$$

de ſorte qu'on pourra trouver encore 7 autres valeurs de $\alpha$.

Soit 1°. $a = 15$, $b = 14$; on cherchera, ſuivant la méthode que nous avons déjà pratiquée ci-deſſus, la fraction $\frac{a'}{b'}$ qui précédera immédiatement la fraction donnée $\frac{a}{b}$; & l'on trouvera $a' = 1$, $b' = 1$; & comme $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$, on aura $\omega = (1 - 2ab')\alpha = -29 \times 86$; donc $\beta = mA \pm \omega = 210m \pm 2494$; donc, faiſant $m = 12$ & prenant le ſigne $-$, pour que la valeur de $\beta$ ſoit $< \frac{210}{2}$, on aura $\beta = 26$.

Soit 2°. $a = 21$, $b = 10$, on trouvera $a' = 2$, $b' = 1$, & comme $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$, on aura $\omega = (1 - 2ab')\alpha = -41 \times 86 = -3526$; donc $\beta = 210m \pm 3526$, & faiſant $m = 17$ & prenant le ſigne inférieur, $\beta = 44$.

Soit 3°. $a = 30$, $b = 7$, on trouvera $a' = 13$, $b' = 3$, donc, comme $\frac{13}{3} > \frac{30}{7}$, on aura $\omega = (1 + 2ab')\alpha = 181 \times 86 = 15566$; donc $\beta = 210m \pm 15566$; donc, faiſant $m = -74$ & prenant le ſigne $+$, on aura $\beta = 26$; comme dans le 1$^{r}$ cas.

Soit 4°. $a = 35$, $b = 6$, on trouvera $a' = 6$, $b' = 1$; donc, parce que $\frac{6}{1} > \frac{35}{6}$, on aura $\omega = (1 + 2ab')\alpha = 71 \times 86 = 6106$, donc $\beta = 210m = 6106$; donc, prenant $m = -29$ avec le ſigne ſupérieur, on aura $\beta = 16$.

Soit

Soit 5°. $a = 42$, $b = 5$, on trouvera $a' = 17$, $b' = 2$; donc, comme $\frac{17}{2} > \frac{42}{5}$, on aura $\omega = (1 + 2ab')\alpha = 169 \times 86 = 14534$; donc $\beta = 210m \pm 14534$, & prenant $m = -69$ avec le ſigne ſupérieur, on aura $\beta = 44$, comme dans le 2$^{d}$ cas.

Soit 6°. $a = 70$, $b = 3$, on trouvera $a' = 21$, $b' = 1$; donc, à cauſe que $\frac{21}{1} < \frac{70}{3}$, $\omega = (1 - 2ab')\alpha = -139 \times 86 = -11954$, donc $\beta = 210m \pm 11954$, donc, prenant $m = 57$ avec le ſigne inférieur, on aura $\beta = 16$ comme dans le 4$^{eme}$ cas.

Soit 7°. $a = 105$, $b = 2$, on trouvera $a' = 52$, $b' = 1$; & comme $\frac{52}{1} < \frac{105}{2}$, on aura $\omega = (1 - 2ab')\alpha = -209 \times 86 = -17974$; donc $\beta = 210m \pm 17974$, donc, faiſant $m = 86$ & prenant le ſigne inférieur, on aura $\beta = 86$.

Ainſi les valeurs de $\beta$, c'eſt à dire, les nouvelles valeurs de $\alpha$ ſeront (en excluant 86, qui eſt la valeur de $\alpha$ dont nous avons déjà fait uſage) 26, 44, & 16; & mettant ces valeurs dans l'équation $AA' = \alpha^2 - B$, ſavoir $210\,A' = \alpha^2 - 46$, on trouvera que les valeurs correſpondantes de $A'$ ſeront 3, 9 & 1.

Faiſons en premier lieu $\alpha = 26$ & $A' = 3$, on aura les équations

$$210 \times 3 = (26)^2 - 46, \quad \alpha = 26 \qquad A' = 3$$

$$3 \times -14 = (2)^2 - 46, \quad \alpha' = -8A' + \alpha = 2, \quad A'' = -14,$$

$$\& \qquad p = p'' + 8p', \qquad q = q'' + 8q'.$$

Donc, comme $\alpha' < \sqrt{B}$, & $A' < B$, on fera $\alpha' = e = 2$, $A' = \pm E = 3$, $A'' = \mp D = -14$, & par conſéquent en prenant les ſignes ſupérieurs $E = 3$, $D = 14$; enſuite on fera $p' = r$, $q' = s$, $p'' = \varrho$, $q'' = \sigma$, & l'on aura à réſoudre l'équation

$$3 = r^2 - 46s^2.$$

Or l'on a (art. 43) $\lambda < \frac{\sqrt{B} + e}{E}$ & $> \frac{\sqrt{B} + e}{E} - 1$, donc $\lambda = 2$, & par conſéquent $\varepsilon = \lambda E - e = 4$.

Ayant donc $E = 3$, & $\varepsilon = 4$, on verra ſi dans les ſéries précédentes il ſe trouve deux termes comme $E'$, $\varepsilon'$, tels que $E' = 3$, $\varepsilon' = 4$ (voyez plus bas la Remarque de l'art. 47); or on trouve préciſément $E^{VI} = 3$, & $\varepsilon^{VI} = 4$, de ſorte que $\nu = 6$; ainſi il n'y aura qu'à diminuer dans ces ſéries tous les expoſans de 6 à l'imitation de ce que nous avons déjà fait ci-deſſus; de cette maniere on aura pour le cas préſent $E = 3$, $E' = 10$, $E'' = 1$ etc. donc $m = 2$, & enſuite $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 12$ etc. donc

$$l = 1$$
$$l' = 1\,l = 1,$$

donc $R = \beta l' + l = 7$, & $S = l' = 1$;

& par conſéquent

$$r = 7\xi + 46\psi, \qquad s = 7\psi + \xi.$$

Or $T = \dfrac{BS + \varepsilon R}{E} = 20$, $V = \dfrac{R + \varepsilon S}{E} = 3$;

donc

$$\varrho = 20\xi + 3 \times 46\psi, \qquad \sigma = 20\psi + 3\xi.$$

Donc, puiſque $p' = r$, $q' = s$, $p'' = \varrho$, $q'' = \sigma$, on aura

$$p = \varrho + 8r = 76\xi + 11 \times 46\psi, \quad q = \sigma + 8s = 76\psi + 11\xi.$$

A l'égard de l'expoſant $n$ de $\xi$, & $\psi$, il pourra être un nombre quelconque entier poſitif, à cauſe que $m$ eſt $= 2$, & que $\mu$ eſt toujours $= 16$, comme nous le démontrerons en général dans l'art. 47; de ſorte que $\mu n + m$ ſera toujours pair.

Soit maintenant $\varepsilon$ négatif & $= -2$, on aura $\lambda = 1$, & $\varepsilon = 5$; or on trouve dans les ſéries précédentes $E^X = 3$, $\varepsilon^X = 5$; donc, diminuant tous les expoſans de 10, & recommençant les ſéries après les termes $E^{XI}$, $\varepsilon^{VI}$ comme nous l'avons déjà dit plus haut, on aura dans le cas préſent $E = 3$, $E' = 7$, $E'' = 6$ etc. $E^X = 1$, par conſéquent $m = 10$; & $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 2$, $\lambda^{IV} = 6$, $\lambda^V = 2$, $\lambda^{VI} = 1$, $\lambda^{VII} = 1$, $\lambda^{VIII} = 3$, $\lambda^{IX} = 1$, $\lambda^X = 12$ etc. donc

$l =$

$$l = 1$$
$$l' = 1l = 1$$
$$l'' = 1l' + l = 2$$
$$l''' = 2l'' + l' = 5$$
$$l^{IV} = 6l''' + l'' = 32$$
$$l^{V} = 2l^{IV} + l''' = 69$$
$$l^{VI} = 1l^{V} + l^{IV} = 101$$
$$l^{VII} = 1l^{VI} + l^{V} = 170$$
$$l^{VIII} = 3l^{VII} + l^{VI} = 611$$
$$l^{IX} = 1l^{VIII} + l^{VII} = 781$$

donc $R = \beta l^{IX} + l^{VIII} = 5297$, $S = l^{IX} = 781$, & de là

$$r = 5297\xi + 781 \times 46\psi, \quad s = 5297\psi + 781\xi.$$

Or, à cauſe de $e = -2$, on aura

$$T = \frac{BS + eR}{E} = 8444, \quad V = \frac{R + eS}{E} = 1245;$$

donc

$$\varrho = 8444\xi + 1245 \times 46\psi, \quad \sigma = 8444\psi + 1245\xi,$$

donc

$$p = \varrho - 8r = -33932\xi - 5003 \times 46\psi, \quad q = \sigma - 8s = -33932\psi - 5003\xi.$$

Quant à l'expoſant $n$, il pourra être de même un nombre quelconque entier poſitif, à cauſe que $m$ & $\mu$ ſont pairs.

Faiſons en ſecond lieu $a = 44$, $A' = 9$, on trouvera les équations

$$210 \times 9 = (44)^2 - 46, \quad a = 44, \quad A' = 9$$
$$9 \times -5 = 1 - 46, \quad a' = 5A' - a = 1, \quad A'' = -5$$

& par conſéquent

$$-p = p'' - 5p', \quad -q = q'' - 5q'.$$



Donc

Donc, ayant $\alpha' < \sqrt{B}$, & $A'' < \sqrt{B}$, on fera $\alpha' = e = 1$, $A'' = \pm E = -5$, $A' = \mp D = 9$; & par conſéquent $E = 5$, & $D = 9$ avec les ſignes inférieurs; enſuite de quoi on fera $p'' = r$, $q'' = s$, $p' = \varrho$, $q' = \sigma$, & la nouvelle équation à réſoudre ſera

$$-5 = r^2 - 46 s^2.$$

Or, puiſqu'on a ici les ſignes inférieurs, on aura $\lambda < \frac{\sqrt{B} - e}{E}$ & $> \frac{\sqrt{B} - e}{E} - 1$; donc $\lambda = 1$; & par conſéquent $\epsilon = \lambda E + e = 6$.

En examinant les ſéries précédentes, on trouvera juſtement $E' = 5$, & $\epsilon' = 6$; ainſi il n'y aura qu'à diminuer tous les expoſans de 1, & l'on aura dans le cas préſent $E = 5$, $E' = 2$, $E'' = 5$ etc. $E^{VII} = 1$; donc $m = 7$; & enſuite $\lambda' = 6$, $\lambda'' = 2$, $\lambda''' = 1$, $\lambda^{IV} = 1$, $\lambda^{V} = 3$, $\lambda^{VI} = 1$ etc., donc

$$\begin{aligned}
l &= 1 \\
l' &= 6l = 6 \\
l'' &= 2l' + l = 13 \\
l''' &= 1l'' + l' = 19 \\
l^{IV} &= 1l''' + l'' = 32 \\
l^{V} &= 3l^{IV} + l''' = 115 \\
l^{VI} &= 1l^{V} + l^{IV} = 147
\end{aligned}$$

donc $R = \beta l^{VI} + l^{V} = 997$, $S = l^{VI} = 147$; & de là

$$r = 997\xi + 147 \times 46\psi, \qquad S = 997\psi + 147\xi.$$

Or, ayant pris les ſignes inférieurs, on aura

$$T = \frac{BS - eR}{E} = 953, \qquad V = \frac{R - eS}{E} = 170;$$

donc

$$\varrho = 953\xi + 170 \times 46\psi, \quad \sigma = 953\psi + 170\xi.$$

Donc

Donc, comme $p'' = r$, $q'' = s$, $p' = \varrho$, $q' = \sigma$, on aura

$$p = -r + 5\varrho = 4768\xi + 703 \times 46\psi,\quad q = -s + 5\sigma = 4768\psi + 703\xi.$$

Quant à l'expoſant $n$ des quantités $\xi$, & $\psi$, il faudra que $\mu n + m$ ſoit impair, à cauſe que l'on a pris les ſignes inférieurs (art. 37); or $\mu$ eſt toujours $= 16$, comme on peut s'en aſſurer en continuant la ſérie E, E' etc. juſqu'à ce que l'on retrouve les deux premiers termes (voyez auſſi plus bas l'art. 47), & $m$ eſt $= 7$; d'où l'on voit que, quelque valeur entiere qu'on donne à $n$, $\mu n + m$ ſera toujours impair; ainſi $n$ pourra être un nombre quelconque entier poſitif.

Prenons à préſent $e$ négatif, ſavoir $e = -1$, on aura $\lambda = 1$, & $\epsilon = 4$. Or dans les ſéries précédentes on trouve $E''' = 5$, & $\epsilon''' = 4$, donc diminuant tous les expoſans de 3, on aura pour le cas préſent $E = 5$, $E' = 6$, $E'' = 7$ etc. $E^{v} = 1$; donc $m = 5$, & enſuite $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 3$, $\lambda^{iv} = 1$, $\lambda^{v} = 12$ etc. d'où

$$\begin{aligned} l &= 1 \\ l' &= 1l = 1 \\ l'' &= 1l' + l = 2 \\ l''' &= 3l'' + l' = 7 \\ l^{iv} &= 1l''' + l'' = 9. \end{aligned}$$

Donc $R = \beta l^{iv} + l''' = 61$, $S = l^{iv} = 9$, & de là

$$r = 61\xi + 9 \times 46\psi,\qquad s = 61\psi + 9\xi.$$

Or $T = \dfrac{BS - \epsilon R}{E} = 95$, & $V = \dfrac{R - \epsilon S}{E} = 14$,

donc $\varrho = 95\xi + 14 \times 46\psi$, $\sigma = 95\psi + 14\xi$, donc

$$p = -r - 5\varrho = -536\xi - 79 \times 46\psi,\quad q = -s - 5\sigma = -536\psi - 79\xi.$$

Ici l'expoſant $n$ pourra être auſſi un nombre quelconque entier poſitif, à cauſe que $m = 5$, & que $\mu = 16$, ce qui rendra toujours $n\mu + m$ impair.

Soit enfin $\alpha = 16$, & $A' = 1$, on aura

$$210 \times 1 = (16)^2 - 46, \quad \alpha = 16, \qquad A' = 1$$

$$1 \times -45 = 1 - 46, \quad \alpha' = -15A' + \alpha = 1, \quad A'' = -45.$$

& $\quad p = p'' + 15p', \qquad q = q'' + 15q'.$

Donc, comme $\alpha'$ & $A' < \sqrt{B}$, on fera $\alpha' = e = 1$, $A' = \pm E = 1$, $A'' = \mp D = -45$, donc $E = 1$, $D = 45$, avec les ſignes ſupérieurs; enſuite on fera $p' = r$, $q' = s$, $p'' = \varrho$, $q'' = \sigma$, & l'on aura à réſoudre l'équation

$$1 = r^2 - 46s^2.$$

Or, ayant $E = 1$, on aura d'abord $m = 0$, donc (art. 40) $R = 1$, $S = 0$; & de là $r = \xi$, $s = \psi$.

De plus on aura $T = \dfrac{BS + eR}{E} = 1$, & $V = \dfrac{R + eS}{E} = 1$;

donc $\qquad \varrho = \xi + 46\psi, \quad \sigma = \psi + \xi.$

Donc

$$p = \varrho + 15r = 16\xi + 46\psi, \quad q = \sigma + 15s = 16\psi + \xi.$$

Faiſant enſuite $e$ négatif & $= -1$, on aura toujours $m = 0$, & par conſéquent $R = 1$, $S = 0$, & $r = \xi$, $s = \psi$; mais on trouvera $T = -1$ & $V = 1$; de ſorte qu'on aura $\varrho = -\xi + 46\psi$, $\sigma = -\psi + \xi$, & enſuite

$$p = \varrho - 15r = -16\xi + 46\psi, \quad q = \sigma - 15s = -16\psi + \xi.$$

Quant à l'expoſant $n$, il pourra être de même un nombre quelconque entier poſitif à cauſe de $m = 0$, & de $\mu = 16$, ce qui rendra toujours $n\mu$ pair.

Raſſemblant toutes les formules que nous venons de trouver, on aura pour la ſolution de l'équation propoſée

$$210 = p^2 - 46q^2$$

les expreſſions ſuivantes

$p =$

$$p = 16\xi - 46\psi, \qquad q = 16\psi - \xi$$
$$p = 16\xi + 46\psi, \qquad q = 16\psi + \xi$$
$$p = 76\xi + 11\times 46\psi, \qquad q = 76\psi + 11\xi$$
$$p = 292\xi + 43\times 46\psi, \qquad q = 292\psi + 43\xi$$
$$p = 536\xi + 79\times 46\psi, \qquad q = 536\psi + 79\xi$$
$$p = 4768\xi + 703\times 46\psi, \qquad q = 4768\psi + 703\xi$$
$$p = 8756\xi + 1291\times 46\psi, \qquad q = 8756\psi + 1291\xi$$
$$p = 33932\xi + 5003\times 46\psi, \qquad q = 33932\psi + 5003\xi.$$

où

$$\xi = \frac{(24335 + 3588\sqrt{46})^n + (24335 - 3588\sqrt{46})^n}{2}$$

$$\psi = \frac{(24335 + 3588\sqrt{46})^n - (24335 - 3588\sqrt{46})^n}{2\sqrt{46}}$$

$n$ étant un nombre quelconque entier positif.

Et ces formules renfermeront néceſſairement toutes les ſolutions poſſibles de l'équation dont il s'agit.

Si on fait $n = 0$, on aura $\xi = 1$ & $\psi = 0$; & les valeurs de $p$, & $q$ deviendront

$$p = 16, \qquad q = 1$$
$$p = 76, \qquad q = 11$$
$$p = 292, \qquad q = 43$$
$$p = 536, \qquad q = 79$$
$$p = 4768, \qquad q = 703$$
$$p = 8756, \qquad q = 1291$$
$$p = 33932, \qquad q = 5003$$

qui ſont les plus petites qui puiſſent avoir lieu; enſuite, faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$ etc. on trouvera des valeurs de $p$ & $q$ toujours plus grandes.

*Exem-*

*Exemple* 6. Soit encore propoſée l'équation

$$10 = u^2 - 431t^2.$$

Puiſque 10 ne contient aucun facteur carré, & qu'il eſt en même tems $< \sqrt{431}$, on fera d'abord $u = r$, $t = s$, $E = 10$ & $B = 31$, & l'on aura une équation de l'eſpece de celle de l'art. 34.

Suivant la méthode de cet article, on cherchera premierement un ou pluſieurs nombres $\epsilon < \sqrt{B}$, & $> \sqrt{B} - E$, tels que $B - \epsilon^2$ ſoit diviſible par E; donc, puiſque $\sqrt{431}$ eſt à peu près $= 20$, il eſt clair par les deux premieres conditions que $\epsilon$ devra être $< 21$, & $> 10$; ainſi, en eſſayant pour $\epsilon$ tous les nombres naturels depuis 10 juſqu'à 20 inclusivement, on n'en trouvera que deux qui ſatisfaſſent à la troiſieme condition, leſquels ſont 11 & 19; de ſorte qu'il faudra faire ſucceſſivement $\epsilon = 11$, & $\epsilon = 19$.

Soit 1°. $\epsilon = 11$, on formera les ſéries ſuivantes

| | | | |
|---|---|---|---|
| $E = 10$ | | | $\epsilon = 11$ |
| $E' = \frac{431-11^2}{10} = 31$, | $\lambda' < \frac{\sqrt{431}+11}{31} = 1$, | $\epsilon' = 1.31-11 = 20$ | |
| $E'' = \frac{431-20^2}{31} = 1$, | $\lambda'' < \frac{\sqrt{431}+20}{1} = 40$, | $\epsilon'' = 40.1-20 = 20$ | |
| $E''' = \frac{431-20^2}{1} = 31$, | $\lambda''' < \frac{\sqrt{431}+20}{40} = 1$, | $\epsilon''' = 1.31-20 = 11$ | |
| $E^{IV} = \frac{431-11^2}{31} = 10$, | $\lambda^{IV} < \frac{\sqrt{431}+11}{10} = 3$, | $\epsilon^{IV} = 3.10-11 = 19$ | |
| $E^{V} = \frac{431-19^2}{10} = 7$, | $\lambda^{V} < \frac{\sqrt{431}+19}{7} = 5$, | $\epsilon^{V} = 5.7-19 = 16$ | |
| $E^{VI} = \frac{431-16^2}{7} = 25$, | $\lambda^{VI} < \frac{\sqrt{431}+16}{25} = 1$, | $\epsilon^{VI} = 1.25-16 = 9$ | |

$E^{VII}$

$$E^{VII} = \frac{431 - 9^2}{25} = 14,\ \lambda^{VII} < \frac{\sqrt{431 + 9}}{14} = 2,\ \varepsilon^{VII} = 2.14 - 9 = 19$$

$$E^{VIII} = \frac{431 - 19^2}{14} = 5,\ \lambda^{VIII} < \frac{\sqrt{431 + 19}}{5} = 7,\ \varepsilon^{VIII} = 7.5 - 19 = 16$$

$$E^{IX} = \frac{431 - 16^2}{5} = 35,\ \lambda^{IX} < \frac{\sqrt{431 + 16}}{35} = 1,\ \varepsilon^{IX} = 1.35 - 16 = 19$$

$$E^{X} = \frac{431 - 19^2}{35} = 2,\ \lambda^{X} < \frac{\sqrt{431 + 19}}{2} = 19,\ \varepsilon^{X} = 19.2 - 19 = 19$$

$$E^{XI} = \frac{431 - 19^2}{2} = 35,\ \lambda^{XI} < \frac{\sqrt{431 + 19}}{35} = 1,\ \varepsilon^{XI} = 1.35 - 19 = 16$$

$$E^{XII} = \frac{431 - 16^2}{35} = 5,\ \lambda^{XII} < \frac{\sqrt{431 + 16}}{5} = 7,\ \varepsilon^{XII} = 7.5 - 16 = 19$$

$$E^{XIII} = \frac{431 - 19^2}{5} = 14,\ \lambda^{XIII} < \frac{\sqrt{431 + 19}}{14} = 1,\ \varepsilon^{XIII} = 2.14 - 19 = 9$$

$$E^{XIV} = \frac{431 - 9^2}{14} = 25,\ \lambda^{XIV} < \frac{\sqrt{431 + 9}}{25} = 1,\ \varepsilon^{XIV} = 1.25 - 9 = 16$$

$$E^{XV} = \frac{431 - 16^2}{25} = 7,\ \lambda^{XV} < \frac{\sqrt{431 + 16}}{7} = 5,\ \varepsilon^{XV} = 5.7 - 16 = 19$$

$$E^{XVI} = \frac{431 - 19^2}{7} = 10,\ \lambda^{XVI} < \frac{\sqrt{431 + 19}}{10} = 3,\ \varepsilon^{XVI} = 3.10 - 19 = 11$$

$$E^{XVII} = \frac{431 - 11^2}{10} = 31,\ \lambda^{XVII} < \frac{\sqrt{431 + 11}}{31} = 1,\ \varepsilon^{XVII} = 1.31 - 11 = 20$$

etc. etc. etc.

Donc, puiſque $E^{XVI} = E$, $E^{XVII} = E'$, on aura $E^{XVI} = E^{\mu}$, c'eſt à dire $\mu = 16$; & comme $E'' = 1$, on aura $E'' = E^{m}$, & par conſéquent $m = 2$; de ſorte que l'équation eſt réſoluble (art. 37).

Ainſi on formera, ſuivant les formules ($\pi$), la ſérie $l$, $l'$, $l''$, $l'''$ etc. juſqu'au terme $l^{XVI}$, & l'on trouvera

$$\begin{aligned}
l &= 1\\
l' &= 1l = 1\\
l'' &= 40l' + l = 41\\
l''' &= 1l'' + l' = 42\\
l^{IV} &= 3l''' + l'' = 167\\
l^{V} &= 5l^{IV} + l''' = 877\\
l^{VI} &= 1l^{V} + l^{IV} = 1044\\
l^{VII} &= 2l^{VI} + l^{V} = 2965\\
l^{VIII} &= 7l^{VII} + l^{VI} = 21799\\
l^{IX} &= 1l^{VIII} + l^{VII} = 24764\\
l^{X} &= 19l^{IX} + l^{VIII} = 492315\\
l^{XI} &= 1l^{X} + l^{IX} = 517079\\
l^{XII} &= 7l^{XI} + l^{X} = 4111868\\
l^{XIII} &= 2l^{XII} + l^{XI} = 8740815\\
l^{XIV} &= 1l^{XIII} + l^{XII} = 12852683\\
l^{XV} &= 5l^{XIV} + l^{XIII} = 73004230\\
l^{XVI} &= 3l^{XV} + l^{XIV} = 231865373.
\end{aligned}$$

Donc 1°. on aura, par l'art. 40, $R = \beta l' + l$, & $S = l'$, c'eſt à dire, à cauſe de $\beta = 20$ racine approchée de 431, $R = 21$, $S = 1$.

2°. on aura par l'art. 41, $X = l^{XVI} - \frac{\epsilon l^{XV}}{E}$, & $Y = \frac{l^{XV}}{E}$, ſavoir, à cauſe de $E = 10$, & $\epsilon = 11$,

$$X = 151560720, \qquad Y = 7300423.$$

Donc

Donc, faiſant

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{431})^n + (X - Y\sqrt{431})^n}{2}$$

$$\psi = \frac{(X + Y\sqrt{431})^n - (X - Y\sqrt{431})^n}{2\sqrt{431}}$$

on aura en général (art. 38)

$$r = 21\xi + 431\psi, \qquad s = 21\psi + \xi,$$

$n$ étant un nombre quelconque poſitif entier, tel que $n\mu + m$, ſavoir $16n + 2$, ſoit pair, de ſorte que $n$ pourra être un nombre poſitif entier quelconque.

Soit 2°. $\epsilon = 19$, on formera de même les ſéries

$$E = 10 \qquad \epsilon = 19$$

$$E' = \frac{431-19^2}{10} = 7,\ \lambda' < \frac{\sqrt{431}+19}{7} = 5, \qquad \epsilon' = 5.7-19 = 16$$

$$E'' = \frac{431-16^2}{7} = 25,\ \lambda'' < \frac{\sqrt{431}+16}{25} = 1, \qquad \epsilon'' = 1.25-16 = 19$$

etc. etc. etc.

Or, comme les termes E, & E′ ſont les mêmes que les termes $E^{IV}$, & $E^{V}$ des ſéries précédentes, il eſt clair que tous les termes ſuivans ſeront les mêmes auſſi (art. 35), de ſorte que, pour avoir les valeurs de E, E′, E″ etc. $\epsilon$, $\epsilon'$, $\epsilon''$ etc. & $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. dans le cas de $\epsilon = 19$, il n'y aura qu'à prendre celles que nous avons trouvées ci-deſſus en diminuant tous les expoſans de 4, afin que le terme $E^{IV}$ devienne E; mais, comme les deux premiers termes E, & E′ ſont ici 10, & 7, il faudra continuer les ſéries précédentes juſqu'à ce que l'on retrouve les mêmes termes. Or pour cela il ſuffit de remarquer que, puiſque les deux derniers termes $E^{XVI}$, & $E^{XVII}$ ſont les mêmes que les deux premiers E, E′, le terme $E^{XVIII}$ ſera le même que le terme E″, & ainſi des autres; de là il eſt aiſé de voir qu'en prenant $E^{IV}$ pour E, $E^{V}$ pour E′ etc. on au-

ra $E^{XIV} = 1$, $E^{XVI} = 10$, $E^{XVII} = 7$, par conſéquent $m = 14$, & $\mu = 16$; & que les valeurs de $\lambda^{I}$, $\lambda^{II}$ etc. juſqu'à $\lambda^{XIII}$ ſeront $\lambda^{I} = 5$, $\lambda^{II} = 1$, $\lambda^{III} = 2$, $\lambda^{IV} = 7$, $\lambda^{V} = 1$, $\lambda^{VI} = 19$, $\lambda^{VII} = 1$, $\lambda^{VIII} = 7$, $\lambda^{IX} = 2$, $\lambda^{X} = 1$, $\lambda^{XI} = 5$, $\lambda^{XII} = 3$, $\lambda^{XIII} = 1$, à l'aide deſquelles ſi on forme la nouvelle ſérie $l$, $l^{I}$, $l^{II}$ etc. $l^{XIII}$,

$$
\begin{aligned}
l &= 1\\
l^{I} &= 5l = 5\\
l^{II} &= 1l^{I} + l = 6\\
l^{III} &= 2l^{II} + l^{I} = 17\\
l^{IV} &= 7l^{III} + l^{II} = 125\\
l^{V} &= 1l^{IV} + l^{III} = 142\\
l^{VI} &= 19l^{V} + l^{IV} = 2823\\
l^{VII} &= 1l^{VI} + l^{V} = 2965\\
l^{VIII} &= 7l^{VII} + l^{VI} = 23578\\
l^{IX} &= 2l^{VIII} + l^{VII} = 50121\\
l^{X} &= 1l^{IX} + l^{VIII} = 73699\\
l^{XI} &= 5l^{X} + l^{IX} = 418616\\
l^{XII} &= 3l^{XI} + l^{X} = 1329547\\
l^{XIII} &= 1l^{XII} + l^{XI} = 1748163;
\end{aligned}
$$

on aura $R = \beta l^{XIII} + l^{XII}$, & $S = l^{XIII}$, & par conſéquent, $\beta$ étant $= 20$,

$$R = 36292807, \qquad S = 1748163, \qquad \text{d'où}$$

$$r = 36292807\,\xi + 7534582 53\psi,$$

$$s = 36292807\,\psi + 1748163\xi.$$

A l'égard des valeurs de $\xi$, & $\psi$, elles ſeront les mêmes que ci-deſſus; car X & Y ſont toujours les mêmes pour une même valeur de B (art. 41), & quant au nombre $n$, il pourra être de même un nombre quelconque entier poſitif, parce qu'à cauſe de $\mu = 16$, & $m = 14$, $\mu n + m$ ſera toujours pair comme il le faut (art. 37).

On

On voit par là que les plus petits nombres qui réſolvent l'équation propoſée ſont $r = 21$, & $s = 1$, qui réſultent de la premiere formule en y faiſant $n = 0$, ce qui donne $\xi = 1$, & $\psi = 0$; enſuite, en faiſant de même $n = 0$ dans la ſeconde formule, on aura les nombres immédiatement plus grands qui peuvent réſoudre la même équation, & qui ſont $r = 36292807$, $s = 1748163$; & on peut être aſſuré qu'entre ces nombres-ci & ceux-là, il n'y en a pas d'autres qui puiſſent ſatisfaire à l'équation dont il s'agit.

Au reſte, puiſqu'on a trouvé $\mu$, & $m$, pairs à la fois, il s'enſuit que cette équation

$$-10 = r^2 - 431 s^2$$

n'eſt point réſoluble en nombres entiers (art. 37).

### Remarque.

47. Quand on a une fois trouvé, pour une équation quelconque $\pm E = r^2 - Bs^2$, les valeurs de $E'$, $E''$, $E'''$ etc. juſqu'à $E^{\mu}$ ($E^{\mu}$ étant $= E$, & $E^{\mu+1} = E'$), ainſi que celles de $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. $\lambda^{\mu}$, & que dans la période $E$, $E'$, $E''$ etc. $E^{\mu-1}$ il ſe trouve un terme égal à l'unité, ce qui eſt néceſſaire pour que l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ ſoit réſoluble, alors les mêmes valeurs peuvent ſervir pour réſoudre auſſi toute autre équation comme $\pm F = r^2 - Bs^2$, F étant $< \sqrt{B}$. Car nous avons déjà démontré (art. 41) que les valeurs de X & de Y ſont toujours les mêmes pour une même valeur de B, & nous y avons vu que la ſérie $E^m$, $E^{m+1}$, $E^{m+2}$ etc. $E^{m+\mu-1}$, ($E^m$ étant $= 1$) eſt toujours auſſi néceſſairement la même, pour le même valeur de B; d'où il s'enſuit, à cauſe de $E^{\mu} = E$, $E^{\mu+1} = E'$ etc. que la ſérie $E^m$, $E^{m+1}$ etc. $E^{\mu-1}$, E, $E'$ etc. $E^{m-1}$ ſera auſſi toujours la même, & que par conſéquent la ſérie E, $E'$, $E''$ etc. $E^{\mu-1}$ contiendra toujours néceſſairement les mêmes termes, quel que ſoit le premier terme E; pourvu qu'il s'y trouve un terme comme $E^m$ égal à l'unité.

Ainſi, étant propoſée l'équation $\pm F = r^2 - Bs^2$, on verra ſi le nombre F ſe trouve parmi les valeurs de E, $E'$, $E''$ etc. $E^{\mu-1}$; ſi

l'on trouve, par exemple, $F = E^{\epsilon}$, alors il n'y aura qu'à prendre ce terme $E^{\epsilon}$ le premier, & continuer la ſuite $E^{\epsilon}$, $E^{\epsilon+1}$ etc. juſqu'à ce que l'on retrouve deux termes conſécutifs identiques avec $E^{\epsilon}$, & $E^{\epsilon+1}$, en recommençant toujours la ſérie E, E′, E″ etc. quand on ſera parvenu au dernier terme $E^{\mu-1}$; ou bien, pour que le premier terme ſoit toujours déſigné par E, il n'y aura qu'à diminuer, dans la ſérie déjà trouvée E, E′, E″ etc. $E^{\mu-1}$, tous les expoſans du nombre $\varrho$, en les augmentant de $\mu$ lorſqu'ils deviendront négatifs.

On en fera de même à l'égard de la ſérie correſpondante $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. $\lambda^{\mu}$, & l'on aura par ce moyen les nouvelles ſéries E, E′, E″ etc. $E^{\mu-1}$, & $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. $\lambda^{\mu}$ relatives à l'équation $\pm F = r^2 - Bs^2$, & à l'aide deſquelles on cherchera ſeulement les nombres R & S puiſqu'on connoit déjà les nombres X, & Y; il faudra cependant, pour que le probleme ſoit ſoluble, que les nouveaux expoſans $m$ & $\mu$ aient les conditions requiſes (art. 37); c'eſt ce qu'il faudra d'abord examiner pour ne pas faire des calculs inutiles: quant à $\mu$, il aura toujours la même valeur, parce que chaque période de la ſérie contenant toujours néceſſairement les mêmes termes, il faudra auſſi que le nombre $\mu$ de ces termes ſoit toujours le même; ainſi il ne s'agira que d'avoir $m$; or, ſi on appelle $m'$ l'expoſant du terme qui étoit égal à l'unité dans la premiere ſérie, il eſt clair qu'on aura $m = m' - \varrho$ ſi $m' > \varrho$, ou $m = \mu + m' - \varrho$ ſi $m' < \varrho$; de cette maniere on connoitra ſur le champ ſi la nouvelle équation eſt réſoluble ou non.

Si au contraire le nombre F ne ſe trouve point dans la ſérie E, E′, E″ etc. $E^{\mu-1}$, alors ce ſera une marque ſûre que l'équation $\pm F = r^2 - Bs^2$ n'eſt point réſoluble; car, ſi on formoit d'après le nombre F la ſérie F, F′, F″ etc. analogue à la ſérie E, E′, E″ etc. on n'y trouveroit point de terme égal à l'unité.

Il s'enſuit auſſi de ce que nous venons de dire que, lorſqu'on a calculé la ſérie E, E′, E″ etc. $E^{\mu-1}$ d'après une valeur de $\epsilon$, alors on peut ſe diſpenſer de chercher d'autres valeurs de $\epsilon$ (art. 34), & il n'y aura qu'à voir ſi dans cette ſérie il y a d'autres termes égaux à E, & former enſuite de nouvelles ſéries dont ces termes ſoient les premiers; comme

nous

nous venons de l'expliquer; par exemple si $E^{\varepsilon} = E$, $\varrho$ étant $< \mu - 1$, on diminuera tous les expoſans de $\varrho$, en ajoutant $\mu$ lorſque les reſtes deviendront négatifs; & l'on aura les nouvelles ſéries $E'$, $E''$, $E'''$ etc. $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. à l'aide deſquelles on trouvera de nouvelles valeurs de R & S; c'eſt ainſi que nous en avoos déjà uſé dans l'exemple 5.

Ayant réſolu plus haut l'équation $10 = r^2 - 431 s^2$, ſuppoſons maintenant qu'il s'agiſſe de réſoudre encore l'équation

$$2 = r^2 - 431 s^2.$$

Je trouve, en examinant les valeurs des termes E, E', E'' etc. $E^{XVI}$ trouvées ci-deſſus, que $E^X = 2$; or, comme on avoit $m = 2$, & $\mu = 16$, la nouvelle valeur de $m$ ſera (à cauſe de $\varrho = 2$ & $m' = 2$) $16 + 2 - 10 = 8$, d'où je conclus que l'équation dont il s'agit eſt réſoluble (art. 37).

Je diminuerai donc tous les expoſans de 10, en y ajoutant 16 lorſqu'il viendra des reſtes négatifs, & j'aurai les valeurs ſuivantes de $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. juſqu'à $\lambda^{VII}$ c'eſt à dire $\lambda^{m-1}$, qui ſont les ſeules dont nous ayons beſoin pour trouver R & S,

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lambda' = 1$, | d'où | $l' = 1$ |
| $\lambda'' = 7$, | | $l'' = 8$ |
| $\lambda''' = 2$, | | $l''' = 17$ |
| $\lambda^{IV} = 1$, | | $l^{IV} = 25$ |
| $\lambda^{V} = 5$, | | $l^{V} = 142$ |
| $\lambda^{VI} = 3$, | | $l^{VI} = 451$ |
| $\lambda^{VII} = 1$, | | $l^{VII} = 593$. |

Ainſi, à cauſe de $\beta = 20$, on trouvera

$$R = \beta l^{VII} + l^{VI} = 1231, \quad S = l^{VII} = 593.$$

De ſorte qu'on aora ici

$$r = 1231\xi + 255583\psi, \quad s = 1231\psi + 593\xi$$

les valeurs de $\xi$, & $\psi$ étant exprimées comme dans l'exemple 6.

De

De même, ſi j'avois à réſoudre l'équation $2 = t^2 - 30s^2$, je verrois ſi le nombre 2 ſe trouve dans la ſérie E, E′ etc. de l'exemple 4; & comme il ne s'y trouve point, j'en conclus ſur le champ qu'une telle équation n'eſt point réſoluble en nombres entiers.

En effet, ſi on fait $E = 2$, & qu'on cherche les termes ſuivans E′, E″ etc. par la méthode générale, il faudra d'abord trouver un nombre $\varepsilon < \sqrt{30}$, & $> \sqrt{30} - 2$, & qui ſoit tel que $30 - \varepsilon^2$ ſoit diviſible par 2; d'où l'on voit qu'on ne peut prendre que $\varepsilon = 4$. Soit donc

$$E = 2 \qquad \varepsilon = 4$$

$$E' = \frac{30-16}{2} = 7, \quad \lambda' < \frac{\sqrt{30}+2}{7} = 1, \quad \varepsilon' = 7-4 = 3$$

$$E'' = \frac{30-9}{7} = 3, \quad \lambda'' < \frac{\sqrt{30}+3}{3} = 2, \quad \varepsilon'' = 6-3 = 3$$

$$E''' = \frac{30-9}{3} = 7, \quad \lambda''' < \frac{\sqrt{30}+3}{7} = 1, \quad \varepsilon''' = 7-3 = 4$$

$$E^{IV} = \frac{30-16}{7} = 2, \quad \lambda^{IV} < \frac{\sqrt{30}+4}{2} = 4, \quad \varepsilon^{IV} = 8-4 = 4$$

$$E^{V} = \frac{30-16}{2} = 7$$

où l'on voit que dans la ſérie E, E′ etc. il n'y a aucun terme égal à l'unité.

*Application à l'équation*

$$\pm 1 = t^2 - Bs^2,$$

B *étant un nombre poſitif non carré.*

48. Comme 1 eſt $< \sqrt{B}$, cette équation ſera toujours dans le cas de celle de l'art. 34, en faiſant $E = 1$.

On commencera donc par chercher un nombre entier poſitif $\varepsilon < \sqrt{B}$, & $> \sqrt{B} - 1$, tel que $B - \varepsilon^2$ ſoit diviſible par 1; d'où l'on

l'on voit que $\epsilon$ ne pourra être que le nombre entier qui eſt immédiatement moindre que $\sqrt{B}$, & que nous avons déjà déſigné en général par $\beta$ (art. 40); de ſorte qu'on aura néceſſairement $\epsilon = \beta$.

Connoiſſant ainſi $\epsilon$ & E, on formera les ſéries E, E′, E″ etc. $\epsilon'$, $\epsilon''$ etc. & $\lambda'$, $\lambda''$ etc. à l'aide des formules $(\varkappa)$, $(\lambda)$, & $(\mu)$; & on pouſſera ces ſéries juſqu'à ce que l'on trouve deux termes conſécutifs comme $E^{\mu}$, $E^{\mu+1}$, identiques avec les deux premiers E, E′, ce qui arrivera toujours néceſſairement, comme nous l'avons démontré en général dans l'art. 35; alors il n'y aura plus qu'à chercher les valeurs de X & Y par les formules de l'art. 41, & comme l'on a $E = 1$, & par conſéquent $E^{m} = E$ (art. 37), ſavoir $m = 0$, on remarquera que la ſérie $\Lambda'$, $\Lambda''$, $\Lambda'''$ etc. ſera la même que la ſérie $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. & que par conſéquent la ſérie L, L′, L″ etc. ſera auſſi la même que la ſérie $l$, $l'$, $l''$ etc. de l'art. 39; de ſorte qu'ayant formé cette derniere ſérie par les formules $(\pi)$, on aura ſur le champ

$$Y = \beta l^{\mu-1} + l^{\mu-2}, \qquad Y' = l^{\mu-1}.$$

Or, puiſque $m = 0$, on aura (art. 40) $R = 1$, & $S = 0$, & de là $r = \xi$, & $s = \psi$; donc on aura en général (art. 38)

$$r = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{n} + (X - Y\sqrt{B})^{n}}{2}$$

$$s = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{n} - (X - Y\sqrt{B})^{n}}{2\sqrt{B}}$$

$n$ étant un nombre entier poſitif tel que $n\mu$ ſoit pair, ou impair, ſuivant que l'équation ſera $1 = r^2 - Bs^2$, ou $-1 = r^2 - Bs^2$ (art. 37).

Done 1°. ſi l'équation eſt $1 = r^2 - Bs^2$, $n\mu$ devra être pair; donc, ſi $\mu$ eſt pair, on pourra prendre pour $n$ un nombre quelconque entier poſitif; ſi $\mu$ eſt impair, il ne faudra prendre pour $n$ que des nombres pairs; ainſi toute équation de la forme $1 = r^2 - Bs^2$ eſt toujours réſoluble en nombres entiers.

2°. Si l'équation eſt $-1 = r^2 - Bs^2$, il faudra que $n\mu$ ſoit impair, ce qui ne ſauroit être à moins que $\mu$ ne ſoit auſſi impair, d'où

il s'enſuit que, ſi l'expoſant, ou le quantieme $\mu$ eſt un nombre pair, alors l'équation $-1 = p^2 - Bq^2$ n'eſt jamais réſoluble en nombres entiers; au contraire, ſi l'expoſant $\mu$ eſt impair, alors l'équation peut ſe réſoudre par les formules précédentes, en ne prenant pour $n$ que des nombres impairs.

49. J'avois déjà donné ailleurs, (voyez le 4 Tome des Mémoires de la Société de Turin,) une démonſtration de cette propoſition, que toute équation de la forme $1 = p^2 - Bq^2$, B étant poſitif non carré, eſt toujours réſoluble en nombres entiers d'une infinité de manieres; & j'y avois auſſi joint une méthode générale pour trouver en même tems toutes les ſolutions dont une telle équation peut être ſuſceptible: celle que je viens de donner eſt non ſeulement plus directe & plus ſimple, mais elle a encore l'avantage de faire voir que l'équation dont il s'agit eſt toujours réſoluble quel que ſoit B, ce que je n'avois pu démontrer alors que par un aſſés long circuit.

Au reſte, il eſt clair que les ſéries E, E′, E″ etc. $E^{\mu-1}$, & $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ etc. $\lambda^{\mu}$, qui réſultent de la ſuppoſition de $E = 1$, ſerviront pour réſoudre abſolument toutes les équations de la forme $\pm E = r^2 - Bs^2$, quelle que ſoit la valeur de E, pourvu qu'elle ſoit $< \sqrt{B}$, par la Remarque de l'art. 47, parce que dans ce cas l'unité ſe trouve néceſſairement parmi les termes de la période E, E′, E″ etc.

## §. IV.

*Méthode générale pour reconnoître quand un nombre quelconque donné* A *peut être un diviſeur d'un nombre de la forme* $\alpha^2 - B$, B *étant auſſi donné, & pour trouver la valeur de* $\alpha$ *dans un très grand nombre de cas.*

50. Les méthodes que nous venons de donner dans les §. II & III, demandent toujours qu'on trouve un nombre $\alpha$ moindre que $\frac{A}{2}$ & tel que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par A; pour y parvenir nous avons pro-

propoſé d'eſſayer ſucceſſivement pour $\alpha$ tous les nombres naturels moindres que $\frac{A}{2}$, ce qui eſt très facile; mais, comme cette opération ſeroit ſouvent très longue, ſurtout lorſqu'il n'exiſte point de pareil nombre $\alpha$, auquel cas il faudroit eſſayer ſucceſſivement tous les nombres moindres que $\frac{A}{2}$, pour pouvoir s'aſſurer qu'aucun d'eux ne puiſſe être pris pour $\alpha$; j'ai cru qu'il ne ſeroit pas inutile de donner ici quelques regles générales pour reconnoitre *a priori*, ſi un nombre quelconque donné A peut être un diviſeur de $\alpha^2 - B$; nous y joindrons d'ailleurs une méthode pour trouver la valeur de $\alpha$ dans un très grand nombre de cas.

51. Il eſt d'abord évident que, ſi A n'eſt pas un nombre premier, il faut que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par chacun des facteurs premiers de A en particulier. Voyons donc à quel caractere on peut connoitre ſi un nombre premier donné $a$ peut être un diviſeur d'un nombre de cette forme $\alpha^2 - B$, B étant un nombre donné poſitif ou négatif.

Si $a$ eſt un diviſeur de B, il eſt viſible qu'il peut l'être auſſi de $\alpha^2 - B$, puiſqu'il ne s'agit que de prendre pour $\alpha$ un multiple de $a$. De plus, ſi $a$ eſt $= 2$, & que B ſoit impair, il eſt clair auſſi que $\alpha^2 - B$ peut toujours être diviſible par $a$; car il n'y aura qu'à prendre pour $\alpha$ un nombre quelconque impair.

Ainſi la difficulté ſe réduit au cas où $a$ eſt un nombre premier qui ne ſoit pas un diviſeur de B, & qui ſoit en même tems différent de 2.

Or je dis que, dans ce cas, $\alpha^2 - B$ ne peut être diviſible par $a$ à moins que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ ne le ſoit auſſi.

Pour démontrer ce théoreme, je fais $\frac{a-1}{2} = m$, & je multiplie $\alpha^2 - B$ par la quantité ſuivante

$$\alpha^{2(m-1)} + \alpha^{2(m-2)}B + \alpha^{2(m-3)}B^2 + \text{etc.} + B^{m-1}$$

que je nommerai P; j'aurai

$$(\alpha^2 - B)P = \alpha^{2m} - B^m = \alpha^{a-1} - B^m = \alpha^{a-1} - 1 - (B^m - 1).$$

Or, puiſque B n'eſt pas diviſible par $a$ (hyp.), il eſt clair que, pour que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par $a$, $\alpha$ ne doit pas l'être; de plus, $a$ eſt un nombre premier (hyp.), donc par le théoreme connu de Fermat (voyez la page 163 de ſes Oeuvres Mathématiques), que M. Euler a démontré dans les Commentaires de Petersbourg, le nombre $\alpha^{a-1} - 1$ ſera toujours diviſible par $a$; donc, ſi $\alpha^2 - B$ eſt diviſible par $a$, il faudra néceſſairement que $B^m - 1$, ou bien $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ le ſoit auſſi.

Il en ſera de même ſi $u^2 - Bt^2$ doit être diviſible par $a$, en ſuppoſant $u$, & $t$ premiers à $a$; car, mettant $Bt^2$ à la place de B, on aura d'abord $B^{\frac{a-1}{2}} . t^{a-1} - 1$ diviſible par $a$; mais $t^{a-1} - 1$ eſt toujours diviſible par $a$; donc il faudra que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ le ſoit auſſi.

52. Je dis maintenant que, ſi $a$ eſt tel que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ ſoit diviſible par $a$, on pourra toujours trouver un nombre $\alpha$ tel que $\alpha^2 - B$ ſoit auſſi diviſible par $a$.

En effet, l'équation

$(\alpha^2 - B)P = \alpha^{a-1} - 1 - (B^m - 1)$ de l'art. préc. fait voir que, ſi $B^m - 1$ eſt diviſible par $a$, $(\alpha^2 - B)P$ le ſera auſſi, à cauſe que $\alpha^{a-1} - 1$ eſt toujours diviſible par $a$; donc, puiſque $a$ eſt un nombre premier, il faut que l'un ou l'autre des deux facteurs $\alpha^2 - B$, & P ſoit diviſible par $a$; par conſéquent, ſi on peut trouver une valeur de $\alpha$ telle que P ne ſoit pas diviſible par $a$, cette valeur rendra néceſſairement $\alpha^2 - B$ diviſible par ce même nombre $a$.

Or, en mettant $\frac{a-1}{2}$ à la place de $m$, on a

$$P = \alpha^{a-3} + B\alpha^{a-5} + B^2\alpha^{a-7} + \text{etc.} + B^{\frac{a-3}{2}};$$

qu'on

qu'on ſubſtitue ſucceſſivement dans cette quantité les nombres 1, 2, 3 etc. juſqu'à $a - 2$ à la place de $\alpha$, & qu'on déſigne les valeurs correſpondantes de P par $P'$, $P''$, $P'''$ etc., il eſt facile de voir par la théorie des différences que l'on aura

$$P' - (a-3)P'' + \frac{(a-3)(a-4)}{2}P''' - \text{etc.} + P^{a-2} = 1.2.3.4\cdots(a-3).$$

Donc, ſi tous les nombres $P'$, $P''$, $P'''$ etc. juſqu'à $P^{a-2}$ incluſivement étoient diviſibles par $a$, il faudroit que le nombre $1.2.3\cdots(a-3)$ le fût auſſi; ce qui ne pouvant être, à cauſe que $a$ eſt un nombre premier, il s'enſuit qu'il y aura néceſſairement quelqu'un des nombres $P'$, $P''$, $P'''$ etc. qui ne ſera pas diviſible par $a$; par conſéquent, il y aura toujours néceſſairement au moins un nombre moindre que $a - 1$, lequel étant pris pour $\alpha$ rendra P non diviſible par $a$; donc ce nombre ſera tel que $\alpha^2 - B$ ſera diviſible par $a$.

Ces deux théoremes ſont dus à M. Euler (voyez les Tomes I & VI des nouveaux Commentaires de Petersbourg), mais il ne paroit pas que ce grand Géometre ait jamais penſé à l'uſage dont ils peuvent être dans la réſolution des équations de la forme $A = u^2 - Bt^2$ (voyez le Tome IX des mêmes Commentaires).

53. Nommons $\xi$ cette valeur de $\alpha$; il eſt clair que, ſi $\xi > \frac{a}{2}$, $a - \xi$ ſera $< \frac{a}{2}$, à cauſe de $\xi < a$; ainſi on trouvera toujours une autre valeur de $\alpha$ moindre que $\frac{a}{2}$. En général, quel que ſoit $\xi$, il n'y aura qu'à prendre $\alpha = \mu a \pm \xi$ (art. 10), & on pourra toujours déterminer le nombre indéterminé $\mu$ & le ſigne de $\xi$ en ſorte que $\alpha$ ſoit moindre que $\frac{a}{2}$.

Ainſi, dès qu'on aura reconnu que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ eſt diviſible par $a$, on ſera ſûr qu'il exiſte toujours un nombre $\alpha < \frac{a}{2}$ tel que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par $a$; de ſorte que, pour trouver ce nombre, il n'y aura qu'à eſſayer ſucceſſivement tous les nombres naturels moindres que $\frac{a}{2}$.

54. Si $a$ eſt de la forme $4n + 3$, alors comme $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ eſt diviſible par $a$, $B^{2n+1} - 1$ le ſera; donc $B^{2(n+1)} - B$ le ſera auſſi; donc, ſi on fait $\xi = B^{n+1} = B^{\frac{a+1}{4}}$, on trouvera par la formule $\alpha = \mu a \pm \xi$ une valeur de $\alpha < \frac{a}{2}$ telle que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par $a$; ainſi on peut toujours dans ce cas trouver la valeur de $\alpha$; il n'en eſt pas de même lorſque $a$ eſt de la forme de $4n + 1$, à moins que l'on ne trouve par hazard une puiſſance impaire de B comme $B^{2r+1}$ telle que $B^{2r+1} - 1$ ſoit diviſible par $a$, auquel cas on pourra faire $\xi = B^{r+1}$.

55. Suppoſons maintenant que l'on ait trouvé un nombre $\xi$ tel que $\xi^2 - B$ ſoit diviſible par $a$, (nous ſuppoſons toujours que $a$ eſt différent de 2, & qu'il n'eſt pas un diviſeur de B,) je dis qu'on pourra toujours trouver un nombre $\xi'$ tel que $\xi'^2 - B$ ſoit diviſible par $a^2$.

Car, ſoit $\xi' = \xi + \lambda a$, on aura $\xi'^2 - B = \lambda^2 a^2 + 2\lambda a\xi + \xi^2 - B$; or $\xi^2 - B$ étant diviſible par $a$, on a $\xi^2 - B = \pi a$; donc $\xi'^2 - B = \lambda^2 a^2 + (2\lambda\xi + \pi)a$; d'où l'on voit que cette quantité ſera diviſible par $a^2$, ſi $2\lambda\xi + \pi$ eſt un multiple de $a$, c'eſt à dire, ſi $2\lambda\xi + \pi = \mu a$; ainſi il ne s'agira que de déterminer $\lambda$, & $\mu$, en ſorte qu'ils ſatisfaſſent à cette équation $\mu a - 2\lambda\xi = \pi$; ce qui, à cauſe de $a$ & $2\xi$ premiers entr'eux, eſt toujours poſſible par la méthode de l'art. 8.

On

On pourra trouver de même, à l'aide du nombre $\xi'$, un autre nombre $\xi''$ tel que $\xi''^2 - B$ ſoit diviſible par $a^3$; car, ſoit $\xi'^2 - B = \pi' a^2$, & qu'on faſſe $\xi'' = \xi' + \lambda' a^2$, on aura $\xi''^2 - B = \lambda'^2 a^4 + 2\lambda'\xi' a^2 + \xi'^2 - B = \lambda'^2 a^4 + (2\lambda'\xi' + \pi')a^2$, de ſorte qu'il n'y aura qu'à déterminer $\lambda'$ en ſorte que l'on ait $2\lambda'\xi' + \pi' = \mu' a$; c'eſt à dire, qu'on n'aura qu'à réſoudre l'équation $\mu' a - 2\lambda'\xi' = \pi'$, laquelle, à cauſe de $a$ & $2\xi'$ premiers entr'eux, eſt ſuſceptible de la même méthode de l'art. 8.

Donc, en général, on pourra toujours trouver un nombre $\xi$ tel que $\xi^2 - B$ ſoit diviſible par $a^n$; & faiſant enſuite $x = \mu a^n \pm \xi$, on aura auſſi $x^2 - B$ diviſible par $a^n$; de ſorte qu'on pourra toujours prendre $x$ moindre que $\frac{a^n}{2}$.

56. Si $a$ n'eſt pas premier à B, c'eſt à dire, ſi B eſt diviſible par $a$, ou en général par une puiſſance quelconque de $a$, que je dénoterai par $a'$, il eſt clair que, tant que $n$ ne ſera pas plus grand que $r$, $\xi^2 - B$ ſera diviſible par $a^n$ en prenant $\xi$ tel que $\xi^2$ ſoit diviſible par $a^n$.

Mais, lorſque $r$ ſera $< n$, il faudra diſtinguer deux cas, l'un où $r$ eſt un nombre pair, & l'autre où $r$ eſt impair. Soit 1°. $r = 2s$, & puiſque B eſt diviſible par $a^{2s}$, il faudra que $\xi^2$ le ſoit auſſi, & par conſéquent que $\xi$ ſoit diviſible par $a^s$; faiſant donc $\xi = a^s\xi'$ & $B = a^{2s}B'$, on aura $\xi^2 - B = a^{2s}(\xi'^2 - B')$; expreſſion qui devant être diviſible par $a^n$, il faudra que $\xi'^2 - B'$ ſoit diviſible par $a^{n-2s}$; de ſorte que, comme $B'$ n'eſt pas diviſible par $a$, la queſtion ſera réduite au cas de l'art. préc.

Soit 2°. $r = 2s - 1$, & il faudra de même que $\xi^2$ ſoit diviſible par $a^{2s-1}$, ce qui ne peut être à moins que $\xi$ ne ſoit diviſible par $a^s$; donc, faiſant $\xi = a^s\xi'$ & $B = a^{2s-1}B'$, on aura $\xi^2 - B = a^{2s-1}(a\xi'^2 - B')$; de ſorte que, pour que cette quantité ſoit diviſible par $a^n$, il faudra que $a\xi'^2 - B'$ le ſoit par $a^{n-r}$; par conſéquent $a\xi'^2 - B'$ devra être d'abord diviſible par $a$, ce qui eſt impoſ-

poſſible à cauſe que le terme $a\xi'^2$ eſt diviſible par $a$, & que l'autre terme $B'$ ne l'eſt pas. Donc il ſera impoſſible dans ce cas de trouver un nombre $\xi$ tel que $\xi^2 - B$ ſoit diviſible par $a^n$.

57. Il reſte encore à examiner le cas où $a$ ſeroit $= 2$. Or, ſoit d'abord B impair, il eſt clair que $\xi$ devra être impair auſſi; ainſi l'on fera $\xi = 2z + 1$, ce qui donnera $\xi^2 - B = 4z(z+1) + 1 - B$, quantité qui doit être diviſible par $2^n$.

Pour cela on remarquera que, comme $z(z+1)$ eſt toujours néceſſairement un nombre pair, ſoit que $z$ ſoit pair ou impair, le terme $4z(z+1)$ ſera toujours diviſible par 8, c'eſt à dire, par $2^3$; d'où il s'enſuit que, tant que $n$ ne ſurpaſſera pas 3, il faudra que $1 - B$ ſoit auſſi diviſible par $a^n$; & que lorſque $n$ ſurpaſſera 3, il faudra que $1 - B$ ſoit d'abord diviſible par $2^3$; ſans cela il ſera impoſſible de trouver un nombre $\xi$ qui ſatisfaſſe à la queſtion.

Soit maintenant $n > 3$, & $1 - B$ diviſible par $2^r$, $r$ étant auſſi $> 3$; il eſt clair que, ſi $r$ n'eſt n'eſt pas $< n$, il ſuffira de prendre, pour $z$, un nombre de cette forme $2^{n-2}\zeta$, $\zeta$ étant un nombre quelconque.

Si $r < n$, il faudra d'abord que $4z(z+1)$ ſoit diviſible par $2^r$, c'eſt à dire, que $z(z+1)$ le ſoit par $2^{r-2}$; donc $z = 2^{r-2}\zeta$, ou $= 2^{r-2}\zeta - 1$; donc, faiſant $1 - B = 2^r\beta$, il faudra que $2^r(\zeta(2^{r-2}\zeta \pm 1) + \beta)$ ſoit diviſible par $2^n$, c'eſt à dire, que $\zeta(2^{r-2}\zeta \pm 1) + \beta$ ſoit diviſible par $2^{n-r}$.

Donc, ſi $n - r$ n'eſt pas $> r - 2$, c'eſt à dire, ſi $n$ n'eſt pas $> 2(r-1)$, il ſuffira que $\zeta \pm \beta$ ſoit diviſible par $2^{n-r}$; par conſéquent $\zeta = 2^{n-r}\varrho \mp \beta$, $\varrho$ étant un nombre entier quelconque.

Si $n - r > r - 2$, c'eſt à dire, ſi $n > 2(r-1)$, il faudra d'abord que $\zeta \pm \beta$ ſoit diviſible par $2^{r-2}$, & par conſéquent que $\zeta = 2^{r-2}\varrho \mp \beta$; ce qui étant ſubſtitué dans l'expreſſion $2^{r-2}\zeta^2 \pm \zeta + \beta$, donnera $2^{r-2}((2^{r-2}\varrho \mp \beta)^2 \pm \varrho)$,

ce

ce qui devant être divisible par $2^{n-r}$, il faudra que $(2^{r-2}\varrho \mp \beta)^2 \pm \varrho$, c'est à dire $2^{2(r-2)}\varrho^2 \mp 2^{r-1}\varrho\beta + \beta^2 \pm \varrho$, soit divisible par $2^{n-2(r-1)}$.

Donc, si $n - 2(r-1)$ n'est pas $> r-1$, c'est à dire, si $n$ n'est pas $> 3(r-1)$, il suffira que $\varrho \pm \beta^2$ soit divisible par $2^{n-2(r-1)}$, c'est à dire, que l'on ait $\varrho = 2^{n-2(r-1)}\pi \mp \beta^2$.

Si $n - 2(r-1) > r-1$, savoir si $n > 3(r-1)$, alors il faudra d'abord que $\varrho \pm \beta^2$ soit divisible par $2^{r-1}$, ce qui donnera $\varrho = 2^{r-1}\pi \mp \beta^2$; ensuite il faudra que $2^{r-3}\varrho^2 \mp \varrho\beta \pm \pi$, c'est à dire $2^{3r-5}\pi^2 \mp 2^{2r-3}\beta^2\pi \mp 2^{r-1}\beta\pi + 2^{r-3}\beta^4 + \beta^3 \pm \pi$, soit divisible par $2^{n-3(r-1)}$; donc etc.

Enfin, si B étoit un nombre pair, comme $a = 2$, on auroit le cas de l'art. 51; ainsi, faisant $B = 2'B'$ si $r$ n'est pas $< n$, il suffira de prendre $\xi$ tel que $\xi^2$ soit divisible par $2^n$; si $r < n$ & impair, il n'y aura aucun nombre qui puisse être pris pour $\xi$; & si $r < n$ & pair, on fera $\xi = 2^{\frac{r}{2}}\xi'$ & la question se réduira à déterminer $\xi'$ en sorte que $\xi'^2 - B'$ soit divisible par $2^{n-r}$, $B'$ étant maintenant un nombre impair; de sorte que ce cas rentre dans celui que nous venons d'examiner plus haut.

58. Maintenant, soient $f$, & $g$ deux nombres quelconques premiers entr'eux, & supposons que $\xi^2 - B$ soit divisible par $f$, & que $\psi^2 - B$ le soit par $g$. Qu'on prenne $x = \mu f \pm \xi = \nu g \pm \psi$, & il est clair que $x^2 - B$ sera divisible à la fois par $f$, & par $g$, & par conséquent par $fg$, à cause que $f$ & $g$ sont premiers entr'eux. Ainsi il ne s'agira que de déterminer $\mu$ & $\nu$ en sorte que l'on ait $\mu f \pm \xi = \nu g \pm \psi$, c'est à dire $\mu f - \nu g = \pm\psi \pm \xi$, les signes de $\psi$, & de $\xi$ étant à volonté; ce qui, à cause de $f$, & $g$ premiers entr'eux, se fera aisément par la méthode de l'art. 8.

Donc, lorsqu'on aura trouvé des nombres $\xi$, $\xi'$, $\xi''$ etc. tels que $\xi^2 - B$, $\xi'^2 - B$, $\xi''^2 - B$ soient divisibles respectivement par $a^\alpha$, $l^\lambda$, $c^\gamma$ etc.

$c^q$ etc. $a$, $b$, $c$ etc. étant premiers entr'eux, on pourra trouver un nombre $x$ tel que $x^2 - B$ ſoit diviſible par $a^n b^p c^q$ - - - -. Ainſi, faiſant $A = a^n b^p c^q$ - - -, & $\alpha = \mu A \pm x$, on aura $\alpha^2 - B$ diviſible par A, & l'on pourra déterminer $\alpha$ enſorte qu'il ſoit $< \frac{A}{2}$.

59. De là, & de ce que nous avons démontré plus haut, je tire les concluſions ſuivantes.

Pour ſavoir s'il eſt poſſible de trouver un nombre $\alpha$ tel que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par A (A, & B étant donnés), on réſoudra le nombre A en ſes facteurs premiers, & ſuppoſant que $a$ ſoit un quelconque de ces facteurs, lequel ſoit élevé à la puiſſance $n$, on diſtinguera trois cas ſuivant que $a$ ſera égal à 2, ou différent de 2 & premier à B ou non.

1°. Lorſque $a$ eſt différent de 2, & premier à B, il ſaudra que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ ſoit diviſible par $a$, c'eſt à dire, que le reſte de la diviſion de B, élevé à la puiſſance $\frac{a-1}{2}$, ſoit l'unité. Si cette condition n'a point lieu par rapport à chacun des facteurs $a$ dont nous parlons, il ſera impoſſible que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par A, quel que ſoit $\alpha$; par conſéquent on ſera d'abord aſſuré que l'équation $A = u^2 - Bt^2$ n'admet abſolument aucune ſolution rationelle.

2°. Lorſque $a$ ſera égal à 2, ou qu'il ſera un diviſeur de B, on verra par les regles données dans les art. 56, & 57, ſi l'on peut trouver un nombre $\xi$ tel que $\xi^2 - B$ ſoit diviſible par $a^n$; ſi cela ne ſe peut pas, on en conclura pareillement qu'il n'y aura aucun nombre $\alpha$ tel que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par A, & qu'ainſi l'équation $A = u^2 - Bt^2$ ne ſera ſuſceptible d'aucune ſolution rationelle.

Suppoſons maintenant que l'on ait reconnu que chacun des diviſeurs premiers $a$ du nombre A a les conditions preſcrites, alors on ſera aſſuré de pouvoir trouver un nombre $\alpha$ moindre que $\frac{A}{2}$, & qui ſoit tel que $\alpha^2 - B$ ſoit diviſible par A.

De

De plus, lorſque parmi les facteurs premiers de A, qui ne ſont pas communs à B, il ne s'en trouve aucun de la forme de $4m + 1$, on pourra toujours trouver le nombre $\alpha$ dont il s'agit, ſans tâtonnement, par les méthodes que nous avons données plus haut (art. 54 & ſuiv.). Et quand parmi les facteurs dont nous parlons, il s'en trouvera un ou pluſieurs de la forme de $4m + 1$, alors il ſuffira de chercher, en tâtonnant, par rapport à chacun d'eux, un nombre $\xi$ moindre que la moitié du facteur donné, & tel que $\xi^2 - B$ ſoit diviſible par ce même facteur. Après quoi on pourra trouver le nombre $\alpha$ par les méthodes données (art. 55 & ſuiv.). On pourra même ſouvent s'exempter du tâtonnement lorſqu'on aura trouvé une puiſſance impaire de B, qui étant diviſée par le facteurs dont il s'agit, donnera l'unité de reſte (art. 54).

60. Soit, par exemple, $A = 51$, & $B = 7$ comme dans l'art. 20; puiſque $51 = 3.17$, il faudra voir ſi $7^{\frac{3-1}{2}} - 1$ eſt diviſible par 3, & ſi $7^{\frac{17-1}{2}} - 1$ eſt diviſible par 17, c'eſt à dire, ſi $7 - 1$ eſt diviſible par 3, & $7^8 - 1$ eſt diviſible par 17; or $7 - 1 = 6$, & par conſéquent diviſible par 3, & $7^8 - 1 = 5764800$, qui n'eſt pas diviſible par 17, parce qu'il donne 15 de reſte; donc il n'exiſte point de nombre $\alpha$ tel que $\alpha^2 - 7$ ſoit diviſible par 51.

Si A étant toujours $= 51$, B étoit $= -7$, il faudroit voir ſi $(-7)^{\frac{3-1}{2}} - 1$ eſt diviſible par 3, & ſi $(-7)^{\frac{17-1}{2}} - 1$ l'eſt par 17, c'eſt à dire, ſi $-7 - 1$ eſt diviſible par 3, & ſi $7^8 - 1$ eſt diviſible par 17; & comme ni l'une ni l'autre de ces diviſions n'eſt poſſible, c'eſt une marque qu'il n'exiſte pas non plus de nombre $\alpha$ tel que $\alpha^2 + 7$ ſoit diviſible par 51.

61. Il eſt bon de remarquer que, pour ſavoir ſi $7^8 - 1$ eſt diviſible par 17, on auroit pû ſe diſpenſer de chercher la puiſſance huitieme de 7, d'en retrancher l'unité, & de diviſer le reſte par 17, com-

me nous avons fait, ce qui exige des opérations assés longues & pénibles; car, comme tout se réduit à voir si la puissance huitieme de 7 étant divisée par 17 donne 1 de reste, il n'y aura qu'à considérer d'abord le carré de 7 qui est 49, & qui étant divisé par 17 donne le reste 15, ou bien — 2 complément de 15 à 17, pour avoir un reste plus petit; donc le carré de 49, c'est à dire, la 4$^{eme}$ puissance de 7, étant divisée par le même nombre 17, donnera pour reste le carré de — 2, c'est à dire 4; & enfin le carré de cette derniere puissance, c'est à dire la puissance 8$^{eme}$ de 7, donnera pour reste le carré de 4, c'est à dire 16; d'où l'on voit que $7^8 - 1$ n'est pas divisible par 17, le reste de cette division étant 15, comme on l'a trouvé plus haut.

Cette opération est fondée comme l'on voit sur ce principe, que si $a^m$ étant divisé par $b$ donne le reste $r$, $a^{mn}$ étant divisé aussi par $b$ donnera le reste $r^n$: (j'entends par reste en général tout nombre qui étant retranché du dividende rend la division possible, d'où l'on voit que le reste peut être augmenté ou diminué à volonté d'un multiple quelconque du diviseur.) En effet, puisque $a^m = \mu b + r$, ($\mu$ étant le quotient de la division de $a^m$ par $b$), on aura $a^{mn} = (\mu b + r)^n = \nu b + r^n$, à cause que tous les termes de $(\mu b + r)^n$ sont divisibles par $b$ à l'exception du dernier $r^n$.

En général, soit $r$ le reste de la division de $f$ par $b$, & $s$ le reste de la division de $g$ par $b$, $rs$ sera celui de la division de $fg$ par $b$; car $f = \mu b + r$, $g = \nu b + s$; donc $fg = \mu\nu b^2 + \mu s b + \nu r b + rs = \lambda b + rs$.

62. Soit encore A = 109, & B = 7; comme 109 est un nombre premier, il faudra voir si $7^{54}$ étant divisé par 109 donne le reste 1.

Pour cela je décompose l'exposant 54 en ses facteurs premiers qui sont 3, 3, 3, 2, & je commence par prendre le cube de 7 qui est 343, & qui étant divisé par 109 donne le reste 16; je prends ensuite le cube de ce reste qui est 4096, & qui donnera 63, ou bien

— 46

$-46$ de reſte; je prends derechef le cube de $-46$ qui eſt $-97336$ & j'aurai pour reſte $-108$ ou bien $1$; enfin je prends le carré de ce dernier reſte, & j'ai encore $1$, qui ſera par conſéquent le reſte de la diviſion de $7^{54}$ par $109$; de ſorte $7^{54}-1$ ſera néceſſairement diviſible par $109$.

Au reſte, quoique $109$ ſoit un nombre premier de la forme $4n+1$, & que par conſéquent on ne puiſſe pas faire uſage directement de la méthode de l'art. $51$, pour trouver un nombre $\xi$ tel que $\xi^2-17$ ſoit diviſible par $109$; cependant comme l'on a trouvé que le reſte de la diviſion de $7^{27}$ par $109$ eſt $1$, on pourra faire $\xi = 7^{14}$, ou bien $\xi$ égal au reſte de la diviſion de $7^{14}$ par $109$.

Pour trouver ce reſte, je me rappelle que $7^3$ donne $16$ de reſte, & que $7^9$ donne $-46$ de reſte; d'où il s'enſuit que $7^{12}$ donnera un reſte égal à $-16\times 46 = -736$; or le reſte de la diviſion de $-736$ par $109$ eſt $-82$, ou bien $27$; de ſorte que $27$ ſera auſſi le reſte de la diviſion de $7^{12}$ par $109$; or $7^2$ étant $= 49$, on multipliera encore $27$ par $49$, & le produit $1323$, ou plûtot le reſte $15$ de la diviſion de $1323$ par $109$, ſera auſſi le reſte de la diviſion de $7^{14}$ par le même nombre $109$; ainſi on aura $\xi = 15$; ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans l'art. $20$.

On voit par là que, lorſqu'il s'agira de chercher le reſte de la diviſion de $B^{\frac{a-1}{2}}$ par le nombre premier $a$, il ſera toujours plus utile de commencer par chercher les reſtes des puiſſances impaires de B, dont les expoſans ſont des diviſeurs de $\frac{a-1}{2}$, parce que ſi l'on en trouve une qui donne $1$ de reſte, on pourra enſuite par ſon moyen trouver le nombre $\xi$.

## §. V.

### *Maniere de trouver toutes les ſolutions poſſibles en nombres entiers des équations du ſecond degré à deux inconnues.*

63. Nous avons donné dans le §. III la méthode de trouver toutes les ſolutions poſſibles en nombres entiers, dont une équation quelcon-

que de la forme $A = u^2 - Bt^2$ peut être ſuſceptible; mais, lorſqu'il s'agit de réſoudre en nombres entiers une équation quelconque du ſecond degré à deux inconnues telle que celle de l'art. 1, il ne ſuffit pas que dans la réduite $A = u^2 - Bt^2$, $u$, & $t$ ſoient des nombres entiers; il faut de plus que ces deux nombres ſoient tels que $\pm u - f$ ſoit diviſible par B, & que $\pm t - \delta - \frac{\beta(\pm u - f)}{B}$ le ſoit par $2\alpha$, les ſignes ambigus de $u$, & $t$ étant à volonté (art. 2).

Or, lorſque B eſt un nombre négatif, nous avons vu (art. 27), que le nombre des ſolutions de l'équation $A = u^2 - Bt^2$ eſt toujours limité; de ſorte qu'il n'y aura qu'à eſſayer ſucceſſivement toutes les valeurs de $u$ & de $t$ qu'on aura trouvées, & on verra s'il y en a quelques unes qui ſatisfaſſent aux conditions dont il s'agit; ſi aucune n'y ſatisfait, on en pourra conclure que l'équation propoſée n'eſt point réſoluble en nombres entiers.

Il n'en eſt pas de même lorſque B eſt un nombre poſitif; car dans ce cas nous avons vu (art. 44) que le nombre des ſolutions poſſibles eſt toujours ou nul ou infini. Il eſt vrai que, quand l'équation $u^2 - Bt^2 = A$ eſt réſoluble, on peut trouver par nos méthodes des formules générales qui renferment abſolument toutes les ſolutions poſſibles; ainſi la queſtion ſe réduit à trouver parmi cette infinité de valeurs de $u$ & $t$, toutes celles qui peuvent ſatisfaire aux conditions preſcrites; c'eſt l'objet des recherches ſuivantes.

64. Je remarque d'abord, que l'on a en général $u = \varrho p$, $t = \varrho q$, $\varrho^2$ étant un facteur quelconque de A (art. 22), & les nombres $p$ & $q$ étant de ces formes (art. 44)

$$p = a\xi + Bb\psi, \qquad q = a\psi + b\xi$$

ou, $a$, & $b$ ſont des nombres entiers donnés & $\xi$, & $\psi$ ſont exprimés par

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^n + (X - Y\sqrt{B})^n}{2}$$

$$\psi =$$

$$\psi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^n - (X - Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}$$

X, & Y étant auſſi donnés, & $n$ pouvant être un nombre quelconque entier poſitif, pair ou impair, ou ſeulement pair, ou ſeulement impair; de ſorte que toute la difficulté conſiſte à trouver la valeur qu'il faut donner à l'expoſant $n$ pour que les deux nombres $\frac{f \pm g p}{B}$, $\frac{\beta(f \pm g p) - B(\delta \pm g q)}{2\alpha B}$ ſoient entiers.

Je remarque, en ſecond lieu, que lorſque le quantieme $\mu$ ſe trouve pair, l'expoſant $n$ peut toujours être un nombre quelconque entier poſitif (art. 37); & que dans ce cas on a (art. 41) $X^2 - BY^2 = 1$.

Mais, ſi le quantieme $\mu$ eſt impair, alors l'expoſant $n$ ne pourra être que pair, ou impair, & l'on aura $X^2 - BY^2 = -1$ (art. cités).

Suppoſons que l'expoſant $n$ doive être toujours impair, on aura donc $n = 2n' + 1$; donc en ſuppoſant

$$\xi' = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{2n'} + (X - Y\sqrt{B})^{2n'}}{2}$$

$$\psi' = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{2n'} - (X - Y\sqrt{B})^{2n'}}{2}$$

on aura

$$\xi = X\xi' + BY\psi', \qquad \psi = X\psi' - Y\xi'$$

& par conſéquent

$$p = (aX - Bb Y)\,\xi' + B(aY - bX)\,\psi'$$
$$q = (aX - Bb Y)\,\psi' + (aY - bX)\,\xi'$$

expreſſions qui ſont de la même forme que les précédentes, mais dans leſquelles l'expoſant de $X \pm Y\sqrt{B}$ ſera toujours pair.

Or

Or, le cas où cet expoſant eſt toujours un nombre pair ſe ramene aiſément au cas où il peut être un nombre quelconque pair ou impair; en effet, puiſqu'on a $(X \pm Y\sqrt{B})^2 = X^2 + BY^2 \pm 2XY\sqrt{B}$, il eſt clair que ſi on fait

$$X' = X^2 + BY^2, \qquad Y' = 2XY$$

on aura en général

$$(X \pm Y\sqrt{B})^{2\mu'} = (X' \pm Y'\sqrt{B})^{\mu'}$$

de ſorte qu'il n'y aura dans ce cas qu'à mettre $X'$, & $Y'$ à la place de X & Y, & alors l'expoſant pourra être un nombre quelconque pair ou impair.

De plus, on aura $X'^2 - BY'^2 = (X^2 + BY^2)^2 - B(2XY)^2 = (X^2 - BY^2)^2 = 1$, comme dans le cas où l'expoſant $\mu$ eſt pair.

De là il s'enſuit que, ſoit que $\mu$ ſoit pair ou impair, les quantités $p$, & $q$ peuvent toujours ſe réduire à la forme

$$p = a\xi + Bb\psi, \qquad q = a\psi + b\psi$$

les quantités $\xi$, & $\psi$ étant exprimées comme ci-deſſus, l'expoſant $n$ pouvant être un nombre quelconque entier poſitif, & les quantités X, & Y étant telles que $X^2 - BY^2 = 1$.

65. Cela poſé, nous allons examiner en général quel doit être l'expoſant $n$ pour qu'un nombre quelconque de la forme $F + Gp + Hq$, ſoit diviſible par un nombre quelconque entier R, (F, G, H étant des nombres quelconques entiers donnés, & non diviſibles par R.)

Pour cela il faut démontrer le théoreme ſuivant.

Soit $r$ un nombre premier quelconque, & X, & Y des nombres entiers tels que $X^2 - BY^2 = 1$; je dis 1°. que ſi B eſt diviſible par $r$, $(X \pm Y\sqrt{B})^{2r} - 1$ le ſera auſſi. 2°. Si B n'eſt pas diviſible par $r$ (auquel cas $B^{r-1} - 1$ le ſera néceſſairement par le théoreme de Fermat), je diſtingue deux cas, l'un lorſque $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ ſera divi-

diviſible par $r$, & l'autre lorſque $B^{\frac{r-1}{2}} - 1$ le ſera; (car, puiſque $r$ eſt premier, il eſt clair que $B^{r-1}-1$ ne peut être diviſible par $r$ à moins que l'un ou l'autre de ſes deux facteurs $B^{\frac{r-1}{2}} - 1$, $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ ne le ſoit.) Dans le premier cas, je dis que $(X \pm Y\sqrt{B})^{r+1} - 1$ ſera diviſible par $r$, & dans le ſecond, je dis que $(X \pm Y\sqrt{B})^{r-1} - 1$ le ſera.

Qu'on conſidere la quantité $(X \pm Y\sqrt{B})^r$ & qu'on la développe en ſérie ſuivant le théoreme de Newton, on aura à cauſe que $r$ eſt impair

$$X^r \pm rX^{r-1}Y\sqrt{B} + \frac{r(r-1)}{2} X^{r-2}Y^2B$$
$$\pm \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} X^{r-3}Y^3B\sqrt{B} + \text{etc.}$$
$$\pm Y^rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}.$$

Or, $r$ étant un nombre premier, il eſt facile de prouver que les coëfficiens du binome $r$, $\frac{r(r-1)}{2}$, $\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3.}$ etc. ſont tous diviſibles par $r$ (voyez le Tome I des nouveaux Commentaires de Petersbourg page 22); donc $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X^r \mp Y^rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$ ſera néceſſairement diviſible par $r$, quels que ſoient les nombres X, Y & B. Mais, par le théoreme de Fermat déjà cité (art. 51), $X^{r-1}-1$ eſt toujours diviſible par $r$ lorſque X ne l'eſt pas; de ſorte que $X^r - X$ ſera toujours diviſible par $r$, quel que ſoit X; de même $Y^r - Y$ ſera auſſi toujours diviſible par $r$, & par conſéquent $(Y^r - Y)B^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$ le ſera auſſi; donc, ajoutant ou ôtant ces quantités de la précédente, il s'enſuit que

$$(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \mp YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$$

ſera toujours diviſible par $r$.

Donc 1°. ſi B eſt diviſible par $r$, il faudra que $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X$ le ſoit auſſi; donc le produit de cette quantité par celle-ci $(X \pm Y\sqrt{B})^r + X$, ſavoir $(X \pm Y\sqrt{B})^{2r} - X^2$ le ſera auſſi; mais on a $X^2 - BY^2 = 1$ (hyp.), donc $X^2 - 1$ ſera auſſi diviſible par $r$; donc ajoutant $X^2 - 1$ à la quantité précédente, on aura la quantité

$$(X \pm Y\sqrt{B})^{2r} - 1$$

qui ſera néceſſairement diviſible par $r$.

2°. Si B n'eſt pas diviſible par $r$, & que $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ le ſoit, $YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B} + Y\sqrt{B}$ le ſera auſſi; donc, ajoutant ou retranchant cette quantité de $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \mp YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$, on aura la quantité $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \pm Y\sqrt{B}$, qui ſera auſſi diviſible par $r$; donc, multipliant par $X \pm Y\sqrt{B}$, on aura le produit $(X \pm Y\sqrt{B})^{r+1} - (X^2 - BY^2)$, qui ſera encore diviſible par $r$; mais $X^2 - BY^2 = 1$; donc la quantité

$$(X \pm X\sqrt{B})^{r+1} - 1$$

ſera diviſible par $r$.

3°. Si $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ n'eſt pas diviſible par $r$, $B^{\frac{r-1}{2}} - 1$ le ſera, (B ne l'étant pas), donc $YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B} - Y\sqrt{B}$ le ſera auſſi; donc ajoutant ou retranchant cette quantité de la quantité $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \mp YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$, on aura celle-ci $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \mp Y\sqrt{B}$, qui ſera auſſi diviſible par $r$; donc, multipliant par $X \mp Y\sqrt{B}$, le produit le ſera auſſi; mais ce produit eſt $(X^2 - BY^2)((X \pm Y\sqrt{B})^{r-1} - 1)$; donc à cauſe de $X^2 - BY^2 = 1$, la quantité

$$(X \pm Y\sqrt{B})^{r-1} - 1$$

ſera néceſſairement diviſible par $r$.

66. Si

66. Si $r$ étoit $= 2$, alors $(X \pm Y\sqrt{B})^r - 1$ ſeroit toujours diviſible par $r$; car $(X \pm Y\sqrt{B})^2 - 1 = X^2 + BY^2 \pm 2XY\sqrt{B} - 1 =$ (à cauſe de $X^2 - BY^2 = 1$) $2BY^2 \pm 2XY\sqrt{B}$.

67. Nous déſignerons dorénavant par $\varrho$ l'expoſant de $X \pm Y\sqrt{B}$, tel que $(X \pm Y\sqrt{B})^\varrho - 1$ ſoit diviſible par un nombre premier quelconque $r$.

Ainſi, ſi B eſt diviſible par $r$, $\varrho$ ſera $= 2r$; ſi B n'eſt pas diviſible par $r$, & que $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ le ſoit, on aura $\varrho = r + 1$; ſi $B^{\frac{r-1}{2}} - 1$ eſt diviſible par $r$, on aura $\varrho = r - 1$; enfin, ſi $r = 2$, on aura $\varrho = r$.

68. Soit en général $a^\varrho - 1$ diviſible par $r$, je dis que $a^{r\varrho} - 1$ le ſera par $r^2$, $a^{r^2\varrho} - 1$ le ſera par $r^3$ etc.

En effet, puiſque $a^\varrho - 1$ eſt diviſible par $r$ (hyp.), il eſt clair que $a^{m\varrho} - 1$ le ſera auſſi, $m$ étant un nombre quelconque entier poſitif; donc les quantités ſuivantes ſeront toutes diviſibles par $r$

$$a^\varrho - 1$$
$$a^{2\varrho} + a^\varrho - 2$$
$$a^{3\varrho} + a^{2\varrho} + a^\varrho - 3$$
etc.

Donc

$$a^{r\varrho} + a^{(r-1)\varrho} + a^{(r-2)\varrho} + \text{etc.} + a^\varrho - r$$

le ſera auſſi. Donc

$$a^\varrho \left(a^{(r-1)\varrho} + a^{(r-2)\varrho} + \text{etc.} + 1\right)$$

le ſera; & comme $a^\varrho$ ne peut pas l'être, à cauſe que $a^\varrho - 1$ l'eſt, il s'enſuit que

$$a^{(r-1)\varrho} + a^{(r-2)\varrho} + a^{(r-3)\varrho} + \text{etc.} + 1$$

le ſera néceſſairement; donc, multipliant cette quantité par $a^{\varepsilon} - 1$ qui eſt auſſi diviſible par $r$, le produit $a^{r\varepsilon} - 1$ ſera néceſſairement diviſible par $r^2$.

On prouvera de même que

$$a^{(r-1)r\varepsilon} + a^{(r-2)r\varepsilon} + a^{(r-3)r\varepsilon} + \text{etc.} + 1$$

ſera diviſible par $r$; de ſorte qu'en multipliant cette quantité par $a^{r\varepsilon} - 1$, on aura le produit $a^{r^2\varepsilon} - 1$ qui ſera diviſible par $r^3$; & ainſi de ſuite.

69. Donc $(X \pm Y\sqrt{B})^{\varepsilon} - 1$ étant diviſible par $r$, $(X \pm Y\sqrt{B})^{r\varepsilon} - 1$ le ſera par $r^2$, $(X \pm Y\sqrt{B})^{r^2\varepsilon} - 1$ le ſera par $r^3$, & en général $(X \pm Y\sqrt{B})^{r^{m-1}\varepsilon} - 1$ ſera diviſible par $r^m$.

70. Conſidérons maintenant la quantité $F + Gp + Hq$ qui doit être diviſible par R (art. 65); il eſt clair que, quel que ſoit le nombre R, on peut toujours le mettre ſous cette forme $r^m.r'^{m'}.r''^{m''}$ - - - - . ($r$, $r'$ etc. étant des nombres premiers); de plus, il eſt évident que pour que la quantité dont il s'agit ſoit diviſible par R, il faut qu'elle le ſoit en particulier par chacun des facteurs $r^m$, $r'^{m'}$ etc. & *vice verſa* il eſt facile de voir que, dès que la même quantité ſera diviſible par chacun de ces facteurs, elle le ſera auſſi néceſſairement par leur produit R; d'où il s'enſuit que la queſtion ſe réduit à rechercher les conditions néceſſaires pour que la quantité $F + Gp + Hq$ ſoit diviſible par autant de nombres qu'on voudra de la forme $r^m$, $r$ étant un nombre premier quelconque.

Or, ſi on ſubſtitue les valeurs de $p$, & $q$, & enſuite celles de $\xi$, & $\psi$ (art. 64), la quantité dont il s'agit deviendra de cette forme

$$F + P(X + Y\sqrt{B})^n + Q(X - Y\sqrt{B})^n$$

$n$ pouvant être un nombre quelconque entier poſitif.

Suppoſons qu'il y ait un nombre $n$ tel que cette quantité ſoit diviſible par $r^m$, je dis que, ſi $n$ eſt plus grand que $r^{m-1}\varrho$, ($\varrho$ ayant la valeur

valeur que nous lui avons assignée (art. 67), & qu'on prenne le reste de la division de $n$ par $r^{m-1}\varrho$, lequel soit dénoté par N, la même quantité sera aussi nécessairement divisible par $r^m$, en prenant le nombre N à la place du nombre $n$.

Car, soit $n = \mu r^{m-1}\varrho + N$, $\mu$ étant le quotient de la division de $n$ par $r^{m-1}\varrho$, puisque $(X \pm Y\sqrt{B})^{r^{m-1}\varepsilon} - 1$ est divisible par $r^m$ (art. 69), $(X \pm Y\sqrt{B})^{\mu r^{m-1}\varepsilon} - 1$ le sera aussi; donc, multipliant par $(X \pm Y\sqrt{B})^N$, le produit $(X \pm Y\sqrt{B})^n - (X \pm Y\sqrt{B})^N$ sera aussi divisible par $r^m$; donc $P(X + Y\sqrt{B})^n - P(X + Y\sqrt{B})^N$, & $Q(X - Y\sqrt{B})^n - Q(X - Y\sqrt{B})^N$ seront tous les deux divisibles par $r^m$; donc, retranchant ces quantités de la quantité $F + P(X + Y\sqrt{B})^n + Q(X - Y\sqrt{B})^n$, on aura la quantité

$$F + P(X + Y\sqrt{B})^N + Q(X - X\sqrt{B})^N$$

qui sera pareillement divisible par $r^m$.

71. De là il s'ensuit que, si la quantité $F + Gp + Hq$ est divisible par $r^m$, en donnant à l'exposant $n$ de $\xi$, & $\psi$ une certaine valeur quelconque, il faudra aussi nécessairement que la même quantité soit divisible par $r^m$, en prenant $n$ moindre $r^{m-1}\varrho$.

Ainsi, pour reconnoître si la quantité dont il s'agit peut être divisible par $r^m$, il n'y aura qu'à faire successivement $n = 0, 1, 2$, etc. $r^{m-1}\varrho$; & si aucune de ces suppositions ne rend la proposée divisible par $r^m$, ce sera une marque sure qu'elle ne le deviendra jamais quelque valeur qu'on puisse donner à $n$; de sorte qu'on en pourra conclure que la quantité dont il s'agit ne peut jamais être divisible par $r^m$.

Mais, si on trouve une ou plusieurs valeurs de $n$ moindres que $r^{m-1}\varrho$, qui rendent la quantité proposée divisible par $r^m$, alors nommant N une quelconque de ces valeurs, toutes les autres valeurs possibles de $n$ qui auront la même propriété seront comprises, dans cette formule

$$n = \mu r^{m-1}\varrho + N$$

$\mu$ étant un nombre quelconque entier positif.

72. Donc, pour que la quantité $F + Gp + Hq$ puiſſe être diviſible par R, il faudra (art. 70, & 71) qu'elle le ſoit par $r^m$ en prenant $n < r^{m-1}\varrho$, par $r'^{m'}$ en prenant $n < r'^{m'-1}\varrho'$ etc.

Si une ſeule de ces conditions manquoit, il en faudroit conclure qu'il ſeroit impoſſible que la quantité dont il s'agit pût jamais être diviſible par R, quelque valeur qu'on donnât à $n$.

Suppoſons donc que toutes ces conditions ſe trouvent remplies; & ſoit N la valeur, ou les valeurs (s'il y en a plus d'une) de $n$ moindres que $r^{m-1}\varrho$ qui rendent la quantité $F + Gp + H$ diviſible par $r^m$, N' celles qui rendent la même quantité diviſible par $r'^{m'}$, (N' étant $< r'^{m'-1}\varrho'$) & ainſi des autres, on aura en général, en prenant des nombres quelconques entiers $\mu, \mu', \mu''$

$$n = \mu r^{m-1}\varrho + N$$
$$n' = \mu' r'^{m'-1}\varrho' + N'$$
$$n'' = \mu'' r''^{m''-1}\varrho'' + N''$$
etc.

De ſorte que, pour trouver les valeurs de l'expoſant $n$ qui rendront la quantité propoſée diviſible par R, il ne s'agira que de déterminer les nombres $\mu, \mu', \mu''$ etc. en ſorte que l'on ait

$$\mu r^{m-1}\varrho + N = \mu' r'^{m'-1}\varrho' + N'$$
$$\mu r^{m-1}\varrho + N = \mu'' r''^{m''-1}\varrho'' + N''$$
etc.

ce que l'on peut exécuter par la methode de l'art. 8.

En général, on voit que la queſtion ſe réduit à trouver un nombre $n$ qui étant diviſé par $r^{m-1}\varrho$ donne le reſte N, étant diviſé par $r'^{m'-1}\varrho'$ donne le reſte N', étant diviſé par $r''^{m''-1}\varrho''$ donne le reſte N'', & ainſi de ſuite. Or on a pluſieurs méthodes abrégées pour réſoudre ces ſortes de problemes.

La

La plus ſimple eſt celle-ci : Soient les diviſeurs M, M′, M″ etc. en ſorte que l'on ait dans notre cas $M = r^{m-1}\varrho$, $M = s^{m'-1}\varrho'$ etc. & les reſtes N, N′, N″ etc. On cherchera d'abord le plus petit multiple commun de tous les diviſeurs M, M′, M″ etc. & on l'appellera P. On cherchera enſuite le plus petit multiple commun de M, M″, M‴ etc. ſavoir de tous les diviſeurs à l'exception de M′, & on appellera ce multiple Q ; on cherchera de même le plus petit multiple commun de M, M′, M‴ etc. c'eſt à dire de tous les diviſeurs moins M″, & on l'appellera Q′, & ainſi de ſuite. Enfin on cherchera par la méthode de l'art. 8 des nombres entiers $\mu, \nu, \mu', \nu', \mu'', \nu''$ etc. tels que

$$\begin{aligned} \mu Q - \nu M' &= N' - N \\ \mu' Q' - \nu' M'' &= N'' - N \\ \mu'' Q'' - \nu'' M''' &= N''' - N \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

(le nombre de ces équations doit être égal à celui des diviſeurs M, M′ etc. moins un) & faiſant pour abréger

$$N + \mu Q + \mu' Q' + \mu'' Q'' + \text{etc.} = L$$

on aura en général

$$n = \lambda P + L$$

$\lambda$ étant un nombre entier quelconque.

La démonſtration eſt facile à déduire de l'art. 8 ; ainſi nous ne nous y arrêterons pas.

Si les nombres Q & M′ ſont premiers entr'eux, il eſt toujours poſſible de réſoudre l'équation $\mu Q - \nu M' = N' - N$, & même d'une infinité de manieres (art. 8) ; mais il ſuffira pour notre objet d'avoir une ſeule valeur de $\mu$, pour la ſubſtituer dans la quantité L.

Mais, ſi les nombres Q, & M′ ne ſont pas premiers entr'eux, alors pour que l'équation $\mu Q - \nu M' = N' - N$ ſoit réſoluble en nombres entiers, il faudra que $N' - N$ ſoit diviſible par la plus grande commune meſure de Q, & M′ (art. cité), de ſorte que ſi cette con-

condition n'a point lieu, il en faudra conclure qu'il eſt poſſible de trouver un nombre $n$ qui ait les propriétés requiſes; & que par conſéquent la quantité $F + Gp + Hq$ ne pourra jamais être diviſible par R. On dira la même choſe par rapport aux autres équations $\mu'Q' - \nu'M'' \equiv N'' - N$ etc. auxquelles il faut ſatisfaire.

Ainſi, pour pouvoir s'aſſurer ſi la quantité $F + Gp + Hq$ peut être diviſible par R, & pour trouver en même tems les valeurs de l'expoſant $n$ qui peuvent la rendre telle, il ſuffira d'examiner ſucceſſivement toutes les valeurs de cette quantité qui répondent à $n \equiv 0$, 1, 2 etc. juſqu'au plus grand des nombres $r^m - {}^1\varrho$, ${}^{1m'} - {}^1\varrho'$, ${}^{11m''} - {}^1\varrho''$ etc.; d'où l'on voit que ce tâtonnement ſera toujours limité.

73. Suppoſons maintenant qu'on ait une autre quantité telle que $F' + H'p + G'q$, qui doive être diviſible par R'; on trouvera de la même maniere que ci-deſſus que l'expoſant $n$ qui peut la rendre telle (s'il y en a un) ſera exprimé en général par

$$n \equiv \lambda' P' + L'$$

P', & L' étant des nombres connus, & $\lambda'$ un nombre quelconque entier.

Donc, ſi on veut que les quantités $F + Gp + Hq$, & $F' + G'p + H'q$ ſoient en même tems diviſibles, la premiere par R, & la ſeconde par R', il faudra que $n$ ſoit en même tems de ces deux formes $\lambda P + L$, & $\lambda' P' + L'$, de ſorte qu'il ne s'agira que de trouver des nombres entiers $\lambda$, & $\lambda'$ tels que l'on ait

$$\lambda P + L \equiv \lambda' P' + L'$$

probleme que l'on réſoudra par la méthode de l'art. 8; & l'on trouvera que la valeur de $n$ ſera de cette forme

$$n \equiv \pi \Pi + \Lambda$$

$\Pi$ étant le plus petit multiple commun de P & P', $\Lambda$ étant un nombre donné, & $\pi$ un nombre quelconque entier; de ſorte qu'il y aura toujours une infinité de valeurs de $n$ qui ſatisferont à ces deux conditions.

74.

74. Donc, puiſque les valeurs des inconnues $x$, & $y$ d'une équation quelconque du ſecond degré (art. 2, & 64) ſe réduiſent toujours, lorſque $u$ & $t$ ſont des nombres entiers, & que B eſt un nombre poſitif, à ces formes

$$x = \frac{F + Gp + Hq}{R}, \qquad y = \frac{F' + G'p + H'q}{R'}$$

l'expoſant $n$ des quantités $X \pm Y\sqrt{B}$ qui entrent dans les expreſſions de $p$, & $q$, pouvant être un nombre quelconque entier poſitif, on reconnoîtra aiſément par les méthodes précédentes ſi les inconnues $x$, & $y$ peuvent être des nombres entiers; & dans ce cas on trouvera auſſi toutes les valeurs poſſibles de l'expoſant $n$, qui peuvent rendre $x$, & $y$ des nombres entiers; valeurs dont le nombre ſera toujours infini.

De ſorte que le nombre des ſolutions en nombres entiers, dont une équation quelconque du ſecond degré à deux inconnues eſt ſuſceptible, ſera toujours néceſſairement ou nul, ou infini.

Il reſteroit à donner quelques exemples pour montrer l'application des méthodes précédentes, mais comme elle ne peut avoir aucune difficulté, nous croyons pouvoir nous diſpenſer d'entrer dans ce détail, pour ne pas rendre ce Mémoire trop long.

## §. VI.

### *Remarques particulières.*

### I.

La quantité $p^2 - Bq^2$ peut être regardée comme le produit de ces deux-ci $p + q\sqrt{B}$ & $p - q\sqrt{B}$; d'où il s'enſuit que, ſi on multiplie cette quantité par une autre quantité de la même forme telle que $p'^2 - Bq'^2$, on aura le produit de ces quatre quantités $p + q\sqrt{B}$, $p - q\sqrt{B}$, $p' + q'\sqrt{B}$, $p' - q'\sqrt{B}$; or le produit de $p + q\sqrt{B}$ par $p' + q'\sqrt{B}$ eſt $pp' + Bqq' + (pq' + qp'\sqrt{B})$, & celui de $p - q\sqrt{B}$ par $p' - q'\sqrt{B}$ eſt de même $pp' + Bqq' - (pq' + qp')\sqrt{B}$, c'eſt à dire qu'en faiſant $pp' + Bqq' = P$, & $pq' + qp'$

$qp' = Q$, ces produits ſont l'un $P + QV B$, & l'autre $P - QV B$; donc le produit de $p^2 - Bq^2$ par $p'^2 - Bq'^2$ ſera égal à celui de $P + QV B$ par $P - QV B$, c'eſt à dire égal à $P^2 - BQ^2$.

Si, au lieu de multiplier d'abord $p + qV B$ par $p' + q'V B$, & $p - qV B$ par $p' - q'V B$, on multiplioit $p + qV B$ par $p' - q'V B$, & $p - qV B$ par $p' + q'V B$, on auroit les produits $P + QV B$, & $P - QV B$, dans leſquels $P = pp' - Bqq'$, $Q = pq' - qp'$; de ſorte qu'on aura en général

$$(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2) = P^2 - BQ^2, \quad \&$$
$$P = pp' \pm Bqq', \qquad Q = pq' \pm qp'$$

comme nous l'avons vu (art. 9).

Cette analiſe a l'avantage de faire voir clairement pourquoi le produit de deux quantités de la forme $p^2 - Bq^2$ ne peut être que deux fois de la même forme; en effet, en réduiſant l'équation

$$(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2) = P^2 - PQ^2$$

à la forme

$$(p+qV B)(p-qV B)(p'+q'V B)(p'-q'V B) = (P+QV B)(P-QV B)$$

il eſt viſible qu'on n'y peut ſatisfaire que par ces deux ſuppoſitions

$$P \pm QV B = (p \pm qV B)(p' \pm q'V B) \quad \text{ou}$$
$$P \pm QV B = (p \pm qV B)(p' \mp q'V B),$$

ce qui donne les deux valeurs de P, & Q que nous avons trouvées.

Donc, puiſque le produit de deux quantités de la forme $p^2 - Bq^2$ eſt deux fois de la même forme, le produit de trois de ces quantités ſera quatre fois de la même forme, le produit de quatre quantités ſera huit fois de la même forme, & ainſi de ſuite; à moins que quelques unes de ces formes ne ſoient détruites par l'évanouiſſement des quantités Q, ce qui doit arriver néceſſairement lorſqu'on multiplie enſemble des quantités égales.

En

En effet, si on fait $p' = p$, & $q' = q$, en sorte que $P^2 - BQ^2 = (p^2 - Bq^2)^2$, les doubles valeurs de P, & Q se réduiront à celles-ci $P = p^2 + Bq^2$, $Q = 2pq$, & $P = p^2 - Bq^2$, $Q = 0$, dont les dernieres ne nous apprennent rien; de sorte que dans ce cas on n'aura à proprement parler qu'une seule valeur de P, & une de Q.

Mais voyons en général quelles sont les expressions de P & Q qui peuvent satisfaire à l'équation

$$(p^2 - Bq^2)^m = P^2 - BQ^2.$$

Suivant notre méthode, on réduira cette équation à la forme

$$(p + q\sqrt{B})^m (p - q\sqrt{B})^m = (P + Q\sqrt{B})(P - Q\sqrt{B})$$

& on fera $P + Q\sqrt{B} = (p + q\sqrt{B})^m$, $P - Q\sqrt{B} = (p - q\sqrt{B})^m$, d'où l'on aura

$$P = \frac{(p + q\sqrt{B})^m + (p - q\sqrt{B})^m}{2}$$

$$Q = \frac{(p + q\sqrt{B})^m - (p - q\sqrt{B})^m}{2\sqrt{B}}$$

expressions qui seront toujours rationelles, comme il est facile de s'en assurer par le développement des puissances de $p + q\sqrt{B}$, & de $p - q\sqrt{B}$.

Si on faisoit $P + Q\sqrt{B} = (p - q\sqrt{B})^m$ & $P - Q\sqrt{B} = (p + q\sqrt{B})^m$, on auroit les mêmes valeurs de P & de Q que nous venons de trouver, à l'exception que celle de Q seroit négative, ce qui est indifférent ici.

II.

Si on avoit à multiplier ensemble deux quantités de cette forme $p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2$, on pourroit démontrer par la méthode précédente que le produit seroit aussi de la même forme.

Car ſoient

$$p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2, \quad \&$$
$$p'^2 - Bq'^2 - Cr'^2 + BCs'^2$$

les deux quantités qu'il s'agit de multiplier l'une par l'autre, en faiſant pour abréger

$$p + q\sqrt{B} = \alpha, \quad p - q\sqrt{B} = \beta$$
$$r + s\sqrt{B} = \gamma, \quad r - s\sqrt{B} = \delta$$

& de même

$$p' + q'\sqrt{B} = \alpha', \quad p' - q'\sqrt{B} = \beta'$$
$$r' + s'\sqrt{B} = \gamma', \quad r' - s'\sqrt{B} = \delta'$$

elles deviendront

$$\alpha\beta - C\gamma\delta, \quad \& \quad \alpha'\beta' - C\gamma'\delta'$$

dont le produit peut ſe réduire à cette forme

$$(\alpha\alpha' \pm C\gamma\gamma')(\beta\beta' \pm C\delta\delta') - C(\alpha\delta' \pm \gamma\beta')(\beta\gamma' \pm \delta\alpha').$$

Or il eſt facile de voir qu'on aura

$$\alpha\alpha' \pm C\gamma\gamma' = P + Q\sqrt{B}$$
$$\beta\beta' \pm C\delta\delta' = P - Q\sqrt{B}$$
$$\alpha\delta' \pm \gamma\beta' = R + S\sqrt{B}$$
$$\beta\gamma' \pm \delta\alpha' = R - S\sqrt{B}$$

en faiſant

$$P = pp' + Bqq' \pm C(rr' + Bss')$$
$$Q = pq' + qp' \pm C(rs' + sr')$$
$$R = pr' - Bqs' \pm (rp' - Bsq')$$
$$S = qr' - ps' \pm (sp' - rq')$$

d'où il s'enſuit que le produit des deux quantités données ſera

$$P^2 - BQ^2 - CR^2 + BCS^2;$$

& par conſéquent de la même forme que ces mêmes quantités.

Si

Si on vouloit avoir le carré de $p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2$, il n'y auroit qu'à ſuppoſer dans les formules précédentes $p' = p$, $q' = q$, $r' = r$, $s' = s$, & l'on auroit, en prenant le ſigne ſupérieur

$$P = p^2 + Bq^2 + C(r^2 + Bs^2)$$
$$Q = 2pq + 2Crs$$
$$R = 2pr - 2Bqs$$
$$S = 0;$$

& en prenant l'inférieur

$$P = p^2 + Bq^2 - C(r^2 + Bs^2)$$
$$Q = 2pq - 2Crs$$
$$R = 0$$
$$S = 2rq - 2ps.$$

On pourra trouver de même le cube & les puiſſances plus hautes de $p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2$, leſquelles ſeront toujours auſſi de la même forme, de ſorte qu'on pourra réſoudre en général l'équation

$$(p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2)^m = P^2 - BQ^2 - CR^2 + BCS^2.$$

Au reſte, il faut remarquer que, pour avoir toutes les valeurs poſſibles de P, Q, R & S, il faudra faire ſucceſſivement chacune des quantités $p, q, r, s$ poſitive & négative; à cauſe qu'il n'y a que les carrés de ces quantités qui entrent dans la quantité donnée $p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2$.

## III.

Si on vouloit trouver des fonctions de plus de deux dimenſions qui euſſent la même propriété, que le produit de deux fonctions ſemblables fût auſſi une fonction ſemblable, on y parviendroit aiſément par la conſidération ſuivante.

Qu'on conſidere la quantité irrationelle

$$t + u\sqrt[n]{A} + x\sqrt[n]{A^2} + y\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} = p,$$



$n$ étant

$a$ étant une des racines $n^{\text{emes}}$ de l'unité, il eſt facile de voir que, ſi on multiplie enſemble deux expreſſions ſemblables, le produit ſera auſſi de la même forme.

Or, ſi on déſigne par $a'$, $a''$, $a'''$ etc. les différentes valeurs de $a$, c'eſt à dire, les différentes racines de l'équation $a^n - 1 = 0$, & par $p'$, $p''$, $p'''$ etc. les valeurs correſpondantes de $p$, on ſait que le produit $p'p''p'''$ - - - - etc. ſera toujours une quantité rationelle; donc cette quantité aura la propriété requiſe.

En effet, ſoit

$$\theta + \upsilon a\sqrt[n]{A} + \xi a^2\sqrt[n]{A^2} + \psi a^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} = \pi$$

& la quantité $\pi'\pi''\pi'''$ - - - ſera rationelle & ſemblable à la quantité $p'p''p'''$ - - -; donc ſi on fait

$$P = p'p''p''' - - - -, \qquad \Pi = \pi'\pi''\pi''' - - - -$$

on aura $P\Pi = p'\pi'p''\pi''p'''\pi''' - - - -$; mais en multipliant $p$ par $\pi$ & nommant le produit $q$, on trouvera, à cauſe de $a^n = 1$

$$T + Va\sqrt[n]{A} + Xa^2\sqrt[n]{A^2} + Ya^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} = q$$

T, V, X etc. étant des fonctions rationelles de $t$, $u$, $x$ etc. $\theta$, $\upsilon$, $\xi$ etc. & A; donc, ſi on fait de même

$$Q = q'q''q''' - - - -$$

la quantité Q ſera rationelle & ſemblable à P & à $\Pi$, & l'on aura $Q = P\Pi$.

De là on voit que, ſi on multiplie enſemble autant de fonctions ſemblables à P qu'on voudra, le produit ſera toujours auſſi une fonction ſemblable.

Donc, ſi on éleve P à une puiſſance quelconque, cette puiſſance ſera toujours auſſi une fonction ſemblable à ſa racine.

Pour trouver en général l'expreſſion d'une puiſſance quelconque $P^m$, il faudra trouver d'abord celle de $p^m$ qui ſera néceſſairement de la forme

T +

$$T + Va\sqrt[n]{A} + Xa^2\sqrt[n]{A^2} + Ya^3\sqrt[n]{A^3} \text{ etc.}$$

& alors on aura $P^m = p'^m p''^m p'''^m \ldots\ldots$

Soit donc en général

$$p^m = T + Va\sqrt[n]{A} + Xa^2\sqrt[n]{A^2} + Ya^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.}$$

& comme cette équation doit être identique, & par conſéquent avoir lieu pour toutes les valeurs de $a$, on aura celles-ci

$$p'^m = T + Va'\sqrt[n]{A} + Xa'^2\sqrt[n]{A^2} + Ya'^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.}$$

$$p''^m = T + Va''\sqrt[n]{A} + Xa''^2\sqrt[n]{A^2} + Ya''^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.}$$

$$p'''^m = T + Va'''\sqrt[n]{A} + Xa'''^2\sqrt[n]{A^2} + Ya'''^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.}$$

etc.

qui feront au nombre de $n$; donc, comme les quantités T, V, X, Y etc. ſont auſſi au même nombre, on pourra les déterminer à l'aide de ces mêmes équations; & il eſt facile de voir qu'à cauſe que $a'$, $a''$, $a'''$ etc. ſont les racines de l'équation $a^n - 1 = 0$, dont tous les termes intermédiaires manquent, on aura

$$T = \frac{p'^m + p''^m + p'''^m + \text{etc.}}{n}$$

$$V = \frac{a'^{n-1}p'^m + a''^{n-1}p''^m + a'''^{n-1}p'''^m + \text{etc.}}{n\sqrt[n]{A}}$$

$$X = \frac{a'^{n-2}p'^m + a''^{n-2}p''^m + a'''^{n-2}p'''^m + \text{etc.}}{n\sqrt[n]{A^2}}$$

$$Y = \frac{a'^{n-3}p'^m + a''^{n-3}p''^m + a'''^{n-3}p'''^m + \text{etc.}}{n\sqrt[n]{A^3}}$$

etc.

expreſ-

expreſſions qui deviendront rationelles par la ſubſtitution des valeurs de $p^{\prime m}$, $p^{\prime\prime m}$, $p^{\prime\prime\prime m}$ etc. comme il eſt facile de s'en convaincre par cette conſidération que l'on a

$$a' + a'' + a''' + \text{etc.} = 0$$
$$a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \text{etc.} = 0$$
$$a'^3 + a''^3 + a'''^3 + \text{etc.} = 0$$
etc.
$$a'^n + a''^n + a'''^n + \text{etc.} = n$$
$$a'^{n+1} + a''^{n+1} + a'''^{n+1} + \text{etc.} = 0$$
etc.
$$a'^{2n} + a''^{2n} + a'''^{2n} + \text{etc.} = n$$

& ainſi de ſuite;

de ſorte qu'on pourra avoir les valeurs de T, V, X etc. indépendamment des racines $a'$, $a''$, $a'''$ etc.

Cette même conſidération ſuffit auſſi pour faire trouver en général la valeur de $P = p'p''p''' \cdots$ ſans connoitre les racines $a'$, $a''$, $a'''$ etc.; car, ſi on fait

$$p' + p'' + p''' + \text{etc.} = \alpha$$
$$p'^2 + p''^2 + p'''^2 + \text{etc.} = \beta$$
$$p'^3 + p''^3 + p'''^3 + \text{etc.} = \gamma$$
etc.

& enſuite

$$b = \frac{\alpha^2 - \beta}{2}$$
$$c = \frac{\alpha b - \beta\alpha + \gamma}{3}$$
$$d = \frac{\alpha c - \beta b + \gamma\alpha - \delta}{4}$$
etc.

la

la quantité P ſera égale, comme l'on ſait, au terme $n^{ème}$ de la ſérie $a$, $b$, $c$, $d$ etc.; mais il eſt facile de voir que les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. ne peuvent contenir d'autres fonctions des racines $a'$, $a''$, $a'''$ etc. que la ſomme de ces racines, ou de leurs carrés, ou de leurs cubes etc.; donc etc.

En général, il eſt évident que la quantité P n'eſt autre choſe que le dernier terme de l'équation dont les racines ſeroient $p'$, $p''$, $p'''$ etc., c'eſt à dire, de l'équation qui réſultera de celle-ci

$$t + u\sqrt[n]{A} + x\sqrt[n]{A^2} + \text{etc.} = p$$

en la délivrant des quantités radicales & l'ordonnant enſuite par rapport à $p$; ou bien (ce qui revient au même) de l'équation réſultante de l'élimination de $\omega$ dans ces deux-ci

$$t + u\omega + x\omega^2 + y\omega^3 + \text{etc.} = p$$

& $\omega^n - A = 0$.

Soit $n = 2$, en ſorte que $p = t + u\sqrt{A}$, & $a^2 - 1 = 0$, on trouvera $P = t^2 - Au^2$; c'eſt le cas que nous avons examiné plus haut (art. 1).

Soit $n = 3$, en ſorte que $p = t + u\sqrt[3]{A} + x\sqrt[3]{A^2}$, & $a^3 - 1 = 0$, on trouvera

$$P = t^3 + Au^3 - 3Atux + A^2x^3.$$

Donc, ſi on fait de même

$$\Pi = \theta^3 + A\upsilon^3 - 3A\theta\upsilon\xi + A^2\xi^3$$

le produit $P\Pi$ ſera de la même forme, c'eſt à dire qu'on aura

$$P\Pi = T^3 + AV^3 - 3ATVX + A^2X^3$$

& pour avoir les valeurs de T, V & X, on conſidérera que $\pi = \theta + \upsilon\sqrt[3]{A} + \xi\sqrt[3]{A^2}$, & que $p\pi = T + V\sqrt[3]{A} + X\sqrt[3]{A^2}$, d'où l'on aura

$$T = t\theta + A(u\xi + vx)$$
$$V = tv + \theta u + Ax\xi$$
$$X = t\xi + \theta x + uv.$$

Si on faiſoit $x$ & $\xi = 0$, les quantités P & $\Pi$ deviendroient $t^3 + Au^3$ & $\theta^3 + Av^3$, mais leur produit ne ſeroit plus de la même forme, à cauſe que la quantité X ne deviendroit pas nulle.

Soit $n = 4$, en ſorte que $p = t + ua\sqrt[4]{A} + xa^2\sqrt[4]{A^2} + ya^3\sqrt[4]{A^3}$, & $a^4 - 1 = 0$, on trouvera

$$P = t^4 - A(2t^2(x^2 + uy) - 4tu^2x + u^4) + A^2(4txy^2 + x^4 - 4ux^2y + 2u^2y^2) - A^3y^4;$$

& le produit d'autant de fonctions de cette forme qu'on voudra ſera toujours une fonction de la même forme; & ainſi de ſuite.

IV.

Si on avoit à réſoudre l'équation

$$r^n - As^n = q^m$$

il eſt évident qu'on y parviendroit ſi on pouvoit rendre chaque facteur de $r^n - As^n$, comme $r - as\sqrt[n]{A}$, égal à une puiſſance $u^{eme}$, $a$ étant toujours une des racines de l'équation $a^n - 1 = 0$.

Soit donc en général $r - sa\sqrt[n]{A} = p^m$, en ſorte que $p = \sqrt[m]{(r - sa\sqrt[n]{A})}$, il eſt facile de concevoir que la valeur de $p$ ne peut être exprimée que de cette maniere

$$p = t + ua\sqrt[n]{A} + xa^2\sqrt[n]{A^2} + ya^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} + za^{n-1}\sqrt[n]{A^{n-1}};$$

cette quantité étant élevée à la puiſſance $m$, on aura (art. préc.)

$$p^m = T + Va\sqrt[n]{A} + Xa^2\sqrt[n]{A^2} + Ya^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} + Za^{n-1}\sqrt[n]{A^{n-1}}$$

donc

donc $r = T$, $s = -V$, & $X = 0$, $Y = 0$, etc. $Z = 0$, & la valeur de $q$ ſera $= p' p'' p''' \ldots\ldots$.

Donc le probleme ſera réſoluble, au moins par cette méthode, toutes les fois qu'on pourra ſatisfaire aux équations $X = 0$, $Y = 0$ etc. $Z = 0$; mais, quoique ces équations ne ſoient qu'au nombre de $n - 2$, & que les indéterminées $t$, $u$, $x$ etc. ſoient au nombre de $n$, il arrivera bien ſouvent qu'il ne ſera pas poſſible de les réſoudre rationellement.

Le cas de $n = 2$ ayant déjà été examiné (art. 1), faiſons $n = 3$, & l'on aura $p = t + u\alpha\sqrt[3]{A} + x\alpha^2\sqrt[3]{A^2}$.

Soit maintenant $m = 2$, en ſorte qu'il s'agiſſe de réſoudre l'équation

$$r^3 - As^3 = q^2$$

& faiſant le carré de $p$, on aura

$$p^2 = t^2 + 2uxA + (Ax^2 + 2tu)\alpha\sqrt[3]{A} + (u^2 + 2tx)\alpha^2\sqrt[3]{A^2}$$

en ſorte qu'on aura

$$T = t^2 + 2Aux,$$
$$V = Ax^2 + 2tu$$
$$X = u^2 + 2tx,$$

par conſéquent

$$r = t^2 + 2Aux, \qquad s = -Ax^2 - 2tu$$

& l'équation à laquelle il faudra ſatisfaire ſera $u^2 + 2tx = 0$, laquelle donne ſur le champ $x = -\frac{u^2}{2t}$; de ſorte qu'en ſubſtituant cette valeur de $x$, dans celles de $r$ & $s$, on aura

$$r = t^2 - \frac{Au^3}{t}$$

$$s = -\frac{Au^4}{4t^2} - 2tu.$$

A l'égard de $q = p'p''$, on trouvera comme dans le n°. préc.

$$q = t^3 + Au^3 - 3Atux + A^2x^3$$

ou bien en ſubſtituant, pour $x$, ſa valeur $-\frac{u^2}{2t}$,

$$q = t^3 + \frac{5Au^3}{2} - \frac{A^2u^6}{8t^3}.$$

Si on vouloit éviter les fractions, il n'y auroit qu'à multiplier $r$ & $s$, par le carré $4t^2$, & $q$ par le cube $8t^3$, & l'on auroit plus ſimplement

$$r = 4t(t^3 - Au^3)$$
$$s = -u(8t^3 + Au^3)$$
$$q = 8t^6 + 20At^3u^3 - A^2u^6.$$

Soit $m = 3$ en ſorte que l'équation à réſoudre ſoit

$$r^3 - As^3 = q^3$$

on fera le cube de $p$, & l'on aura

$$p^3 = t^3 + Au^3 + 6Atux + A^2x^3$$
$$+ 3(t^2u + Au^2x + Atx^2)\sqrt[3]{A}$$
$$+ 3(tu^2 + t^2x + Aux^2)u^2\sqrt[3]{A^2}$$

d'où

$$T = t^3 + Au^3 + 6Atux + A^2x^3$$
$$V = 3t^2u + 3A(u^2x + tx^2)$$
$$X = 3(tu^2 + tx^2 + Aux^2)$$

ainſi l'on aura

$$r = t^3 + Au^3 + 6Atux + A^2x^3$$
$$s = -3t^2u - 3A(tx^2 + u^2x)$$

& il

& il faudra que l'on ait $X = o$, ſavoir

$$tu^2 + t^2x + Aux^2 = o;$$

quant à la valeur de $q$, elle ſera la même que ci-deſſus, ſavoir

$$q = t^3 + Au^3 - 3Atux + A^2x^3.$$

Ainſi toute la difficulté ſe réduit à réſoudre l'équation $tu^2 + t^2x + Aux^2 = o$; c'eſt à dire, à trouver une valeur quelconque rationelle de $t$, ou de $u$, ou de $x$ qui ſatisfaſſe à cette équation.

Pour la mettre ſous une forme plus ſimple, faiſons $u = ft$, $x = fgt$; & diviſant par $ft^3$, on aura $f + g + Af^2g^2 = o$; ou bien, en diviſant par $fg$, $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = Afg$; ſoit de plus $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = h$, $\frac{1}{f} - \frac{1}{g} = l$, on aura $\frac{4}{fg} = h^2 - l^2$; donc l'équation précédente deviendra celle-ci $h = \frac{4A}{h^2 - l^2}$, c'eſt à dire $4A = h(h + l)(h - l)$; ſoit encore $l = kh$, & l'on aura $4A = h^3(1 - k^2)$, c'eſt à dire que $\frac{4A}{1 - k^2}$ devra être un cube; & par conſéquent que $2A^2(1 - k^2)$ devra en être un auſſi, dont la racine ſera $\frac{2A}{h}$.

Mais, comme nous ne nous propoſons pas ici de traiter cette matiere à fond, nous ne nous y arrêterons pas davantage quant à préſent; nous obſerverons ſeulement que M. de Fermat prétend, dans ſes remarques ſur Diophante, avoir démontré en général ce théoreme,

que l'équation $r^n + s^n = q^n$ n'eſt jamais réſoluble d'une maniere rationelle lorſque $n$ ſurpaſſe 2; mais ce Savant ne nous a pas laiſſé ſa démonſtration, & il ne paroit pas que perſonne l'ait encore trouvée juſqu'à préſent. M. Euler a à la vérité démontré ce théoreme dans le cas de $n = 3$, & de $n = 4$, par une analiſe particuliere & très ingénieuſe, mais qui ne paroit pas applicable en général à tous les autres cas; ainſi ce théoreme eſt un de ceux qui reſtent encore à démontrer, & qui méritent le plus l'attention des Géometres.

SUR LA

# RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

PAR M. DE LA GRANGE. (*)

Viete eſt le premier qui ait tâché de donner une méthode générale pour réſoudre les équations numériques; mais, quoique cette méthode ait été enſuite perfectionnée & ſimplifiée à quelques égards par Harriot, Ougtred, Pell etc. elle eſt encore ſi compliquée, & ſi rebutante par le grand nombre d'opérations qu'elle demande, que les Géometres paroiſſent l'avoir entiérement abandonnée. Celle que l'on ſuit communément eſt due à Newton, & elle eſt très facile & très ſimple. Il faut ſuppoſer ſeulement qu'on ait déjà trouvé la valeur de la racine qu'on cherche, approchée au moins juſqu'à ſa dixieme partie près; alors on égale cette valeur, plus une nouvelle inconnue, à celle de l'équation propoſée, & faiſant la ſubſtitution, on a une ſeconde équation dont la racine eſt ce qu'il faudroit ajouter à la premiere racine approchée pour avoir la racine exacte; mais comme, par l'hypotheſe, ce reſte à ajoûter à la premiere valeur de la racine eſt moindre qu'un dixieme de cette racine, on peut dans l'équation dont il s'agit négliger le carré & les puiſſances plus hautes de l'inconnue; de ſorte que l'équation étant ainſi réduite au premier degré, on aura ſur le champ la valeur de l'inconnue en décimales; cette valeur ne ſera qu'approchée, mais on pourra s'en ſervir pour en trouver une autre plus exacte en faiſant ſur la ſeconde équation la même opération que ſur la premiere

&

(*) Lû à l'Académie le 20 Avril 1769.

& ainſi de ſuite. De cette maniere on trouve à chaque opération de nouvelles décimales à ajoûter, ou à retrancher de la valeur de la racine déjà trouvée, & on a par conſéquent cette racine d'autant plus exactement qu'on pouſſe le calcul plus loin.

On peut auſſi, comme l'a pratiqué Halley, revenir toujours à la premiere équation propoſée en y ſubſtituant à la place de l'inconnue la valeur de la racine de plus en plus approchée & augmentée d'un reſte inconnu; ce qui paroit en quelque façon plus ſimple & plus commode.

Telle eſt la méthode uſitée pour réſoudre les équations numériques par approximation. Pluſieurs ſavans Géometres ſe ſont appliqués à la rendre encore plus exacte & plus facile, ſoit en ayant égard aux termes où l'inconnue eſt au ſecond degré, ſoit en donnant des formules générales à l'aide deſquelles on puiſſe trouver ſur le champ la valeur de la fraction qui eſt le reſte à ajoûter à la racine approchée; mais aucun d'eux ne paroit avoir fait attention aux inconvéniens ou plutôt aux imperfections qui ſe trouvent encore dans cette méthode: du moins perſonne, que je ſache, n'a donné juſqu'à-préſent les moyens d'y remédier.

La premiere & la principale de ces imperfections conſiſte en ce qu'il faut ſuppoſer qu'on ait déjà trouvé la valeur de la racine cherchée, approchée juſqu'à ſa dixieme partie près; car, comme on n'a point encore de regle générale & ſûre pour trouver, dans une équation quelconque, la valeur approchée de chacune de ſes racines réelles, la méthode dont il s'agit n'eſt proprement applicable qu'aux cas où l'on connoit d'avance à peu près la valeur de la racine qu'on cherche. Il eſt vrai que Rolle a donné une méthode, qu'on appelle des *caſcades*, pour approcher des racines des équations numériques auſſi près que l'on veut; mais cette méthode n'eſt pas toujours ſûre, ſurtout lorſqu'il y a dans l'équation des racines imaginaires, auquel cas elle laiſſe toujours en doute ſi ces racines ſont réelles, ou non: (voyez l'*Algebre* de Rolle, chap. III & VI du livre 2).

Une

Une ſeconde imperfection regarde la nature même de la méthode par laquelle on approche de la valeur de la racine cherchée; ſuivant cette méthode on néglige, à chaque opération, des termes dont on ne connoit pas la valeur; de ſorte qu'il eſt impoſſible de pouvoir juger de la quantité de l'approximation, & de s'aſſurer du degré d'exactitude qui doit réſulter de chaque correction.

D'ailleurs ne pourroit-il pas arriver que la ſérie qui donne la racine cherchée fût très peu convergente, ou même qu'elle devînt divergente après avoir été convergente dans ſes premiers termes? Au moins il n'eſt pas démontré que cela ne puiſſe jamais avoir lieu dans la méthode dont nous parlons.

Enfin, quand même la ſérie ſeroit toujours convergente, il eſt clair qu'elle ne donneroit jamais qu'une valeur approchée de la racine dans le cas même où elle ſeroit égale à un nombre commenſurable. Il eſt vrai que l'on a des méthodes particulieres pour trouver les racines commenſurables; mais c'eſt toujours une grande imperfection de la méthode dont il s'agit de ne pas donner la valeur exacte de ces racines.

## §. I.

### *Méthode pour trouver, dans une équation numérique quelconque, la valeur entiere la plus approchée de chacune de ſes racines réelles.*

1. *Théoreme I.* Si l'on a une équation quelconque, & que l'on trouve deux nombres tels, qu'étant ſubſtitués ſucceſſivement à la place de l'inconnue de cette équation, ils donnent deux réſultats de ſigne contraire, l'équation aura néceſſairement au moins une racine réelle dont la valeur ſera entre ces deux nombres.

Ce théoreme eſt connu depuis longtems, & l'on a coûtume de le démontrer par la théorie des lignes courbes; mais on peut auſſi le démontrer directement par la théorie des équations, en cette ſorte. Soit $x$ l'inconnue de l'équation, & $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. ſes racines, l'équation ſe réduira, comme l'on ſait, à cette forme

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots = 0.$$

Or ſoient $p$, & $q$, les nombres qui ſubſtitués par $x$ donneront des réſultats de ſigne contraire, il faudra donc que ces deux quantités

$$(p - \alpha)\ (p - \beta)\ (p - \gamma) \text{ - - - - -}$$
$$(q - \alpha)\ (q - \beta)\ (q - \gamma) \text{ - - - - -}$$

ſoient de ſignes différens; par conſéquent il faudra qu'il y ait au moins deux facteurs correſpondans comme $p - \alpha$ & $q - \alpha$ qui ſoient de ſignes contraires; donc il y aura au moins une des racines de l'équation comme $\alpha$, qui ſera entre les nombres $p$, & $q$, c'eſt à dire plus petite que le plus grand de ces deux nombres, & plus grande que le plus petit d'entr'eux; donc cette racine ſera néceſſairement réelle.

2. *Corollaire* 1. Donc, ſi les nombres $p$, & $q$, ne different l'un de l'autre que de l'unité, ou d'une quantité moindre que de l'unité, le plus petit de ces nombres, s'il eſt entier, ou le nombre entier qui ſera immédiatement moindre que le plus petit de ces deux nombres, s'il n'eſt pas entier, ſera la valeur entiere la plus approchée d'une des racines de l'équation. Si la différence entre $p$, & $q$, eſt plus grande que l'unité, alors nommant $n$, $n+1$, $n+2$ etc. les nombres entiers qui tombent entre $p$ & $q$, il eſt clair que, ſi on ſubſtitue ſucceſſivement à la place de l'inconnue les nombres $p$, $n$, $n+1$, $n+2$ etc. $q$, on trouvera néceſſairement deux ſubſtitutions conſécutives qui donneront des réſultats de ſignes différens; donc, puiſque les nombres qui donneront ces deux réſultats ne différent entr'eux que de l'unité, on trouvera comme ci-deſſus la valeur entiere la plus approchée d'une des racines de l'équation.

3. *Corollaire* 2. Toute équation dont le dernier terme eſt négatif, en ſuppoſant le premier poſitif, a néceſſairement une racine réelle poſitive, dont on pourra trouver la valeur entiere la plus approchée en ſubſtituant à la place de l'inconnue les nombres 0, 1, 2, 3 etc. juſqu'à ce que l'on rencontre deux ſubſtitutions qui donnent des réſultats de ſigne contraire.

Car, en ſuppoſant le premier terme $x^m$, & le dernier $-H$, ($H$ étant un nombre poſitif) on aura, en faiſant $x = 0$, le réſultat négatif $-H$, & en faiſant $x = \infty$, le réſultat poſitif $\infty^m$; donc on

aura

aura ici $p = 0$, & $q = \infty$, donc les nombres entiers intermédiaires ſeront tous les nombres naturels 1, 2, 3 etc. donc etc. (Coroll. préc.).

De là on voit 1°. que toute équation d'un degré impair, dont le dernier terme eſt négatif, a néceſſairement une racine réelle poſitive.

2°. Que toute équation d'un degré impair, dont le dernier terme eſt poſitif, a néceſſairement une racine réelle négative; car, en changeant $x$ en $-x$, le premier terme de l'équation deviendra négatif; donc, changeant tous les ſignes pour rendre de nouveau le premier terme poſitif, le dernier deviendra négatif; donc l'équation aura alors une racine réelle poſitive; par conſéquent l'équation primitive aura une racine réelle négative.

3°. Que toute équation d'un degré pair, dont le dernier terme eſt négatif, a néceſſairement deux racines réelles, l'une poſitive & l'autre négative; car premierement elle aura une racine réelle poſitive; enſuite, comme en changeant $x$ en $-x$, le premier terme demeure poſitif, la transformée aura auſſi une racine réelle poſitive; donc l'équation primitive en aura une réelle & négative.

4. *Remarque.* Comme on peut toujours changer les racines négatives d'une équation quelconque en poſitives, en changeant ſeulement le ſigne de l'inconnue, nous ne conſidérerons dans la ſuite, pour plus de ſimplicité, que les racines poſitives; ainſi, quand il s'agira d'examiner les racines d'une équation donnée, on conſidérera d'abord les racines poſitives de cette équation, enſuite on y changera les ſignes de tous les termes où l'inconnue ſe trouvera élevée à une puiſſance impaire, & on conſidérera de même les racines poſitives de cette nouvelle équation; ces racines priſes en moins ſeront les racines négatives de la propoſée.

5. *Théoreme II.* Si dans une équation quelconque qui ait une ou pluſieurs racines réelles & inégales, on ſubſtitue ſucceſſivement à la place de l'inconnue deux nombres dont l'un ſoit plus grand & dont l'autre ſoit plus petit que l'une de ces racines, & qui different en même

tems l'un de l'autre d'une quantité moindre que la différence entre cette racine & chacune des autres racines réelles de l'équation, ces deux ſubſtitutions donneront néceſſairement deux réſultats de ſignes contraires.

En effet, ſoit $\alpha$ une des racines réelles & inégales de l'équation, & $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. les autres racines quelconques; ſoit de plus $\rho$ la plus petite des différences entre la racine $\alpha$ & chacune des autres racines réelles de l'équation, il eſt clair qu'en prenant $p > \alpha$, $q < \alpha$, & $p - q < \rho$, les quantités $p - \alpha$, & $q - \alpha$ ſeront de ſignes contraires, & que les quantités $p - \beta$, $p - \gamma$ etc. ſeront chacune de même ſigne que ſa correſpondante $q - \beta$, $q - \gamma$ etc.; car, ſi $p - \beta$, & $q - \beta$ étoient de ſignes contraires, il faudroit que $\beta$ fût auſſi compris entre $p$, & $q$, ce qui ne ſe peut. Donc les deux quantités

$$(p - \alpha)\ (p - \beta)\ (p - \gamma) \text{ - - - - -}$$
$$(q - \alpha)\ (q - \beta)\ (q - \gamma) \text{ - - - - -}$$

c'eſt à dire les réſultats des ſubſtitutions de $p$, & $q$ à la place de l'inconnue $x$ (art. 1) ſeront néceſſairement de ſignes contraires.

6. *Corollaire* 1. Donc, ſi dans une équation quelconque on ſubſtitue ſucceſſivement à la place de l'inconnue les nombres en progreſſion arithmétique

$$0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,\ 4\Delta \text{ etc. - - - - - (A)}$$

les réſultats correſpondans formeront une ſuite dans laquelle il y aura autant de variations de ſignes que l'équation propoſée aura de racines réelles poſitives & inégales, mais dont les différences ne ſoient pas moindres que la différence $\Delta$ de la progreſſion. De ſorte que, ſi on prend $\Delta$ égale ou moindre que la plus petite des différences entre les différentes racines poſitives & inégales de l'équation, la ſuite dont il s'agit aura néceſſairement autant de variations de ſigne que l'équation contiendra de racines réelles poſitives, & inégales.

Donc

Donc, ſi la différence $\Delta$ eſt en même tems égale ou moindre que l'unité, on trouvera auſſi par ce moyen la valeur entiere approchée de chacune des racines réelles poſitives & inégales de l'équation (art. 2).

Si l'équation ne peut avoir qu'une ſeule racine réelle, & poſitive, ou ſi elle en a pluſieurs, mais dont les différences ne ſoient pas moindres que l'unité, il eſt clair qu'on pourra faire $\Delta = 1$, c'eſt à dire, qu'on pourra prendre les nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. pour les ſubſtituer à la place de l'inconnue; mais, s'il y a dans l'équation des racines inégales dont les différences ſoient moindres que l'unité, alors il faudra prendre $\Delta$ moindre que l'unité, & telle qu'elle ſoit égale ou moindre que la plus petite des différences entre les racines dont il s'agit; ainſi la difficulté ſe réduit à trouver la valeur qu'on doit donner à $\Delta$, en ſorte qu'on ſoit aſſuré qu'elle ne ſurpaſſe pas la plus petite des différences entre les racines poſitives & inégales de l'équation propoſée; c'eſt l'objet du probleme ſuivant.

7. *Corollaire* 2. Toute équation qui n'a qu'un ſeul changement de ſigne, ne peut avoir qu'une ſeule racine réelle poſitive.

Il eſt d'abord clair que l'équation aura néceſſairement une racine réelle poſitive, à cauſe que ſon dernier terme ſera de ſigne différent du premier (art. 3).

Or, ſoit (en ſuppoſant le premier terme poſitif comme à l'ordinaire) X la ſomme de tous les termes poſitifs de l'équation, & Y la ſomme de tous les négatifs, en ſorte que l'équation ſoit $X - Y = 0$; & puiſqu'il n'y a par l'hypotheſe qu'un ſeul changement de ſigne, il eſt clair que les puiſſances de l'inconnue $x$ du polynome X ſeront toutes plus hautes que celles du polynome Y; de ſorte que, ſi $x^r$ eſt la plus petite puiſſance de $x$ dans le polynome X, & qu'on diviſe les deux polynomes X & Y par $x^r$, la quantité $\frac{X}{x^r}$ ne contiendra que des puiſſances poſitives de $x$, & la quantité $\frac{Y}{x^r}$ ne contiendra que des puiſſances

négatives de $x$; d'où il s'enſuit que, $x$ croiſſant, la valeur de $\frac{X}{x^r}$ devra croître auſſi, & $x$ diminuant, $\frac{X}{x^r}$ diminuera auſſi, à moins que le polynome X ne contienne que le ſeul terme $x^r$, auquel cas $\frac{X}{x^r}$ ſera toujours une quantité conſtante; au contraire, $x$ croiſſant, la valeur de $\frac{Y}{x^r}$ diminuera néceſſairement, & $x$ diminuant, $\frac{Y}{x^r}$ ira en augmentant. Or, ſoit $a$ la racine réelle & poſitive de l'équation, on aura donc lorſque $x = a$, $X = Y$; donc auſſi $\frac{X}{x^r} = \frac{Y}{x^r}$; donc, en ſubſtituant au lieu de $x$ des nombres quelconques plus grands que $a$, on aura toujours $\frac{X}{x^r} > \frac{Y}{x^r}$, & par conſéquent $X - Y$ égal à un nombre poſitif; & en ſubſtituant au lieu de $x$ des nombres moindres que $a$, on aura toujours $\frac{X}{x^r} < \frac{Y}{x^r}$, & par conſéquent $X - Y$ égal à un nombre négatif; donc il ſera impoſſible que l'équation ait des racines réelles poſitives plus grandes ou plus petites que $a$.

8. *Probleme.* Une équation quelconque étant donnée, trouver une autre équation dont les racines ſoient les différences entre les racines de l'équation donnée.

Soit donnée l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc.} = 0 \quad \text{---(B)}$$

on ſait que $x$ peut être indifféremment égal à une quelconque de ſes racines; or ſoit $x'$ une autre racine quelconque de la même équation, en ſorte que l'on ait auſſi

$$x'^m - Ax'^{m-1} + Bx'^{m-2} - Cx'^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

&

& ſoit $u$ la différence entre les deux racines $x$, & $x'$, de maniere que l'on ait $x' = x + u$; ſubſtituant cette valeur de $x'$ dans la derniere équation, & ordonnant les termes par rapport à $u$, on aura une équation en $u$ du même degré $m$, laquelle, en commençant par les derniers termes, ſera de cette forme

$$X + Yu + Zu^2 + Vu^3 + \text{etc.} + u^m = 0$$

les coëfficiens X, Y, Z, etc. étant des fonctions de $x$ telles que

$$X = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc.}$$

$$Y = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \text{etc.}$$

$$Z = \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ax^{m-3} + \text{etc.}$$

etc.

c'eſt à dire

$$Y = \frac{dX}{dx}, \quad Z = \frac{d^2X}{2\,dx^2}, \quad V = \frac{d^3X}{2.3\,dx^3} \text{ etc.}$$

Donc, puiſque par l'équation donnée (B) on a $X = 0$, l'équation précédente étant diviſée par $u$ deviendra celle-ci:

$$Y + Zu + Vu^2 + \text{etc.} + u^{m-1} = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (C)$$

Cette équation, ſi on y ſubſtitue pour $x$ une quelconque des racines de l'équation (B), aura pour racines les différences entre cette racine & toutes les autres de la même équation (B); donc, ſi on combine les équations (B) & (C) en éliminant $x$, on aura une équation en $u$ dont les racines ſeront les différences entre chacune des racines de l'équation (B) & toutes les autres racines de la même équation; ce ſera l'équation cherchée.

Mais, ſans exécuter cette élimination qui ſeroit ſouvent fort laborieuſe, il ſuffira de conſidérer

1°. Que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc. étant les racines de l'équation en $x$, celles de l'équation en $u$ ſeront $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$ etc. $\beta - \alpha$, $\beta - \gamma$ etc.

$\gamma -$

$\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ etc. etc.; d'où l'on voit que ces racines ſeront au nombre de $m(m-1)$, & que de plus elles ſeront égales deux à deux, & de ſignes contraires; de ſorte que l'équation en $u$ manquera néceſſairement de toutes les puiſſances impaires de $u$. Donc, en faiſant $\frac{m(m-1)}{2} = n$, & $u^2 = v$, l'équation dont il s'agit ſera de cette forme

$$v^n - av^{n-1} + bv^{n-2} - cv^{n-3} + \text{etc.} = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{(D)}.$$

2°. Que $(\alpha - \beta)^2$, $(\alpha - \gamma)^2$, $(\beta - \gamma)^2$ etc. étant les différentes valeurs de $v$ dans l'équation (D), le coëfficient $a$ ſera égal à la ſomme de tous leurs produits deux à deux, etc. Or il eſt facile de voir que $(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + \text{etc.} = (m - 1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.}) - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \text{etc.})$; mais on ſait que $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \text{etc.} = B$; & $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.} = A^2 - 2B$; donc on aura $a = (m-1)(A^2 - 2B) - 2B$, ſavoir $a = (m-1)A^2 - 2mB$; & on pourra de la même maniere trouver la valeur des autres coëfficiens $b$, $c$ etc.

Pour y parvenir plus facilement, ſuppoſons

$$A1 = \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.}$$
$$A2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.}$$
$$A3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

& l'on aura comme l'on ſait

$$A1 = A$$
$$A2 = AA1 - 2B$$
$$A3 = AA2 - BA1 + 3C$$
$$A4 = AA3 - BA2 + CA1 - 4D$$
$$\text{etc.}$$

Sup-

Suppoſons de plus

$$a1 = (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\gamma)^2 + \text{etc.}$$
$$a2 = (\alpha-\beta)^4 + (\alpha-\gamma)^4 + (\beta-\gamma)^4 + \text{etc.}$$
$$a3 = (\alpha-\beta)^6 + (\alpha-\gamma)^6 + (\beta-\gamma)^6 + \text{etc.}$$
etc.

il eſt facile de voir que l'on aura

$$a1 = (m-1)A2 - 2\left(\frac{(A1)^2 - A2}{2}\right)$$
$$a2 = (m-1)A4 - 4(A1A3 - A4) + 6\left(\frac{(A2)^2 - A4}{2}\right)$$
$$a3 = (m-1)A6 - 6(A1A5 - A6) + 15(A2A4 - A6) - 20\left(\frac{(A3)^2 - A6}{2}\right)$$
etc.

ou bien

$$a1 = mA2 - 2\frac{(A1)^2}{2}$$
$$a2 = mA4 - 4A1A3 + 6\frac{(A2)^2}{2}$$
$$a3 = mA6 - 6A1A5 + 15A2A4 - 20\frac{(A3)^2}{2}$$
etc.

& en général

$$a\mu = mA2\mu - 2\mu A1(A2\mu - 1) + \frac{2\mu(2\mu-1)}{2}A2(A2\mu - 2) - \text{etc.}$$
$$\pm \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)\cdots(\mu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\mu}\cdot\frac{(A\mu)^2}{2}.$$

Les quantités $a1$, $a2$, $a3$ etc. étant ainſi connues, on aura ſur le champ les valeurs des coëfficiens $a$, $b$, $c$ etc. de l'équation (D) par les formules

$$a = a1$$

$$b = \frac{aa1 - a2}{2}$$

$$c = \frac{ba1 - aa2 + a3}{3}$$

$$d = \frac{ca1 - ba2 + aa3 - a4}{4}$$

etc.

Ainſi on pourra déterminer directement les coëfficiens $a$, $b$, $c$ etc. de l'équation (C) par ceux de l'équation donnée (B). Pour cela on cherchera d'abord par les formules ci-deſſus les valeurs des quantités A1, A2, A3 etc. juſqu'à $A2n$; enſuite à l'aide de celles-ci on cherchera celles des quantités $a1$, $a2$, $a3$ etc. juſqu'à $an$, & enfin par ces dernieres on trouvera les valeurs cherchées des coëfficiens $a$, $b$, $c$ etc.

9. *Remarque.* Il eſt bon de remarquer que l'équation (D) exprime également les différences entre les racines poſitives & négatives de l'équation (B); de ſorte que la même équation aura lieu auſſi lorſqu'on changera $x$ en $-x$ pour avoir les racines négatives (art. 4).

De plus il eſt clair que l'équation (D) ſera toujours la même ſoit qu'on augmente, ou qu'on diminue toutes les racines de l'équation propoſée d'une même quantité quelconque; donc, ſi cette équation a ſon ſecond terme, on pourra le faire diſparoitre, & cherchant enſuite l'équation en $v$ qui en réſultera, on aura la même équation qu'on auroit eue ſi on n'avoit pas fait évanouir le ſecond terme; mais l'évanouiſſement de ce terme rendra toujours la recherche des coëfficiens $a$, $b$, $c$ etc. un peu plus facile, parce qu'on aura $A = 0$, & par conſéquent auſſi $A1 = 0$, de ſorte que les formules de l'art. préc. deviendront

$$A1 = 0$$
$$A2 = -2B$$
$$A3 = 3C$$
$$A4 = -BA2 - 4D$$
etc.
$$a1 = mA2$$
$$a2 = mA4 + 6.\frac{(A2)^2}{2}$$
$$a3 = mA6 + 15A2A4 - 20\frac{(A3)^2}{2}$$
etc.
$$a = a1$$
$$b = \frac{aa1 - a2}{2}$$
$$c = \frac{ba1 - aa2 + a3}{3}$$
etc.

10. *Corollaire* 1. Puiſque les racines de l'équation (D) ſont les carrés des différences entre les racines de l'équation propoſée (B), il eſt clair que ſi cette équation (D) avoit tous ſes termes de même ſigne, auquel cas elle n'auroit aucune racine réelle & poſitive, il eſt clair, dis-je, que, dans ce cas, les différences entre les racines de l'équation (B) ſeroient toutes imaginaires; de ſorte que cette équation ne pourroit avoir qu'une ſeule racine réelle, ou bien pluſieurs racines réelles & égales entr'elles; ſi ce dernier cas a lieu, on le reconnoitra & on le réſoudra par les méthodes connues (voyez auſſi plus bas le §. II); à l'égard du premier cas, il s'enſuit de l'art. 6 qu'on pourra prendre $\Delta = 1$.

11. *Corollaire* 2. Si l'équation (B) a une ou plusieurs couples de racines égales, il est clair que l'équation (D) aura une ou plusieurs valeurs de $v$ égales à zéro, de sorte qu'elle sera alors divisible une ou plusieurs fois par $v$; cette division faite, lorsqu'elle a lieu, soit l'équation restante disposée à rebours de cette maniere

$$1 + \alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 + \text{etc.} + \pi v^r = 0 \cdots \text{(E)}$$

$r$ étant $=$ ou $< n$; qu'on fasse $v = \frac{1}{y}$, & ordonnant l'équation par rapport à $y$ on aura

$$y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \text{etc.} + \pi = 0 \cdots \text{(F)}.$$

Qu'on cherche par les méthodes connues la limite des racines positives de cette équation, & soit $l$ cette limite, en sorte que $l$ surpasse chacune des valeurs positives de $y$; donc $\frac{1}{l}$ sera moindre que chacune des valeurs positives de $\frac{1}{y}$ ou de $v$; & par conséquent moindre que chacune des valeurs de $u^2$, à cause de $v = u^2$ (probl. préc.).

Donc $\frac{1}{\sqrt{l}}$ sera nécessairement moindre qu'aucune des valeurs de $u$, c'est à dire qu'aucune des différences entre les racines réelles & inégales de l'équation proposée (B).

Donc 1°. si $\sqrt{l} < 1$, alors on sera sûr que l'équation (B) n'aura point de racines réelles dont les différences soient moindres que l'unité; ainsi dans ce cas on pourra faire sans scrupule $\Delta = 1$ (art. 6).

2°. Mais si $\sqrt{l} =$ ou $> 1$, alors il peut se faire qu'il y ait dans l'équation (B) des racines dont les différences soient moindres que l'unité; mais, comme la plus petite de ces différences sera toujours nécessairement plus grande que $\frac{1}{\sqrt{l}}$, on pourra toujours prendre $\Delta =$ ou $< \frac{1}{\sqrt{l}}$ (art. cité).

En

En général ſoit $k$ le nombre entier qui eſt égal ou immédiatement plus grand que $\sqrt{l}$, & on pourra toujours prendre $\Delta = \frac{1}{k}$.

12. *Scholie* 1. Quant à la maniere de trouver la limite des racines d'une équation, la plus commode & la plus exacte eſt celle de Newton, laquelle conſiſte à trouver un nombre dont les racines de l'équation propoſée étant diminuées, l'équation réſultante n'ait aucune variation de ſigne; car alors cette équation ne pourra avoir que des racines négatives; par conſéquent le nombre dont les racines de la propoſée auront été diminuées ſurpaſſera néceſſairement la plus grande de ces racines.

Ainſi, pour chercher la limite $l$ des racines de l'équation

$$(F) \quad \cdots \quad y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \text{etc.} = 0,$$

on y mettra $y + l$ au lieu de $y$, & ordonnant l'équation réſultante par rapport à $y$, elle deviendra

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \text{etc.} + y^r = 0$$

dans laquelle

$$P = l^r + \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} + \gamma l^{r-3} + \text{etc.} + \pi$$

$$Q = r l^{r-1} + (r-1)\alpha l^{r-2} + (r-2)\beta l^{r-3} + \text{etc.}$$

$$R = \frac{r(r-1)}{2} l^{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)}{2} \alpha l^{r-3} + \text{etc.}$$

$$S = \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} l^{r-3} + \text{etc.}$$

etc.

& il n'y aura qu'à chercher une valeur de $l$ qui étant ſubſtitué dans les quantités P, Q, R etc. les rende toutes poſitives; en commençant par la derniere de ces quantités laquelle n'aura que deux termes, & remontant ſucceſſivement aux quantités précédentes, on déterminera facilement le plus petit nombre entier qui pourra être pris pour $l$, & qui ſera la limite la plus proche cherchée.

Si on vouloit éviter tout tâtonnement, il n'y auroit qu'à prendre pour $l$ le plus grand coëfficient des termes négatifs de l'équation (F) augmenté d'une unité; car il eſt facile de prouver qu'en donnant à $l$ cette valeur, les quantités P, Q, R etc. ſeront toujours poſitives.

Cette maniere d'avoir la limite des racines d'une équation quelconque eſt due, je crois, à Maclaurin; mais en voici une autre qui donnera le plus ſouvent des limites plus approchées.

Soient $-\mu y^{r-m} - \nu y^{r-n} - \pi y^{r-p} -$ etc. les termes négatifs de l'équation (F), on prendra pour $l$ la ſomme des deux plus grandes des quantités $\sqrt[m]{\mu}$, $\sqrt[n]{\nu}$, $\sqrt[p]{\pi}$ etc., ou un nombre quelconque plus grand que cette ſomme. Cette propoſition peut ſe démontrer de la même maniere que la précédente; ainſi nous ne nous y arrêterons pas.

Au reſte il faut obſerver que les limites trouvées de l'une, ou de l'autre de ces deux manieres ſeront rarement les plus prochaines limites; pour en avoir de plus petites on eſſayera ſucceſſivement pour $l$ des nombres moindres, & on prendra le plus petit de ceux qui ſatisferont aux conditions que P, Q, R etc. ſoient des nombres poſitifs.

13. *Scholie* 2. Ayant donc trouvé la limite $l$ de l'équation (F), & pris $k$ égal ou immédiatement plus grand que $\sqrt{l}$, on fera $\Delta = \frac{1}{k}$ (art. 10), & on ſubſtituera ſucceſſivement dans l'équation propoſée à la place de l'inconnue les nombres 0, $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$, $\frac{3}{k}$ etc.; les réſultats venans de ces ſubſtitutions formeront une ſérie dans laquelle il y aura autant de variations de ſigne que l'équation propoſée contiendra de racines réelles poſitives & inégales, &.de plus chacune de ces racines ſe trouvera entre les deux réſultats conſécutifs qui ſeront de ſigne différens, de ſorte que ſi les nombres $\frac{h}{k}$, & $\frac{h+1}{k}$ donnent

des

des réſultats de ſigne contraire, il y aura une racine entre $\frac{h}{k}$, & $\frac{h+1}{k}$; par conſéquent le nombre entier qui approchera le plus de $\frac{h}{k}$ ſera la valeur entiere approchée de cette racine (art. 2).

Ainſi on connoitra par ce moyen non ſeulement le nombre des racines poſitives, & inégales de l'équation propoſée, mais encore la valeur entiere approchée de chacune de ces racines.

Au reſte il eſt clair que ſi l'on trouvoit un, ou pluſieurs réſultats égaux à zéro, les nombres qui auroient donné ces réſultats ſeroient des racines exactes de l'équation propoſée.

Pour faciliter, & abréger ce calcul on fera encore les remarques ſuivantes.

1°. Si on cherche par les méthodes des art. préc. la limite des racines poſitives de l'équation propoſée, il eſt clair qu'il ſera inutile d'y ſubſtituer à la place de l'inconnue des nombres plus grands que cette limite; en effet il eſt facile de voir qu'en ſubſtituant des nombres plus grands que cette limite, on aura toujours néceſſairement des réſultats poſitifs. Ainſi, nommant $\lambda$ la limite dont il s'agit, le nombre des ſubſtitutions à faire ſera égal à $\lambda k$, & par conſéquent toujours limité.

En général, ſans chercher la limite $\lambda$, il ſuffira de pouſſer les ſubſtitutions juſqu'à ce que le premier terme de l'équation, ou la ſomme des premiers termes s'il y en a pluſieurs conſécutifs avec le même ſigne $+$, ſoit égale ou plus grande que la ſomme de tous les termes négatifs; car il eſt facile de prouver, par la méthode de l'art. 7, qu'en donnant à l'inconne des valeurs plus grandes, on aura toujours à l'infini des réſultats poſitifs.

2°. Au lieu de ſubſtituer à la place de l'inconnue $x$ les fractions $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$ etc. on y mettra d'abord $\frac{x}{k}$ à la place de $x$, ou ce qui revient

vient au même, on multipliera le coëfficient du ſecond terme par $k$, celui du troiſieme terme par $k^2$, & ainſi des autres, & on y ſubſtituera enſuite à la place de $x$ les nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. juſqu'à la limite de cette équation, ou bien juſqu'à ce que le premier terme, ou la ſomme des premiers, quand il y en a pluſieurs conſécutifs avec le même ſigne, ſoit égale, ou plus grande que la ſomme des négatifs; par ce moyen les réſultats ſeront tous des nombres entiers, & les racines de l'équation propoſée ſe trouveront néceſſairement entre les nombres conſécutifs qui donneront des réſultats de ſigne contraire, ces nombres étant diviſés par $k$, comme nous l'avons vu plus haut.

3°. Soit $m$ le degré de l'équation dans laquelle il s'agit de ſubſtituer ſucceſſivement les nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. je dis que, dès que l'on aura trouvé les $m + 1$ premiers réſultats, c'eſt à dire, ceux qui répondent à $x = 0, 1, 2$ etc. $m$, on pourra trouver tous les ſuivans par la ſeule addition.

Pour cela il n'y aura qu'à chercher les différences des réſultats trouvés, leſquelles ſeront au nombre de $m$, enſuite les différences de ces différences, leſquelles ne ſeront plus qu'au nombre de $m - 1$, & ainſi de ſuite juſqu'à la différence $m^{ème}$.

Cette derniere différence ſera néceſſairement conſtante, parce que l'expoſant de la plus haute puiſſance de l'inconnue eſt $m$; ainſi on pourra continuer la ſuite des différences $m^{emes}$ auſſi loin qu'on voudra en répétant ſeulement la même différence trouvée; enſuite par le moyen de cette ſuite on pourra par la ſimple addition continuer celle des différences $m - 1^{emes}$, & à l'aide de celle-ci, on pourra continuer de même la ſuite des différences $m - 2^{emes}$, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que l'on arrive à la premiere ſuite qui ſera celle des réſultats cherchés.

Il eſt bon d'obſerver ici que ſi les termes correſpondans des différentes ſuites dont nous parlons étoient tous poſitifs, les termes ſuivans dans chaque ſuite ſeroient tous auſſi poſitifs. Or, puiſque la derniere différence eſt toujours poſitive, il eſt clair qu'on parviendra néceſſairement dans chaque ſuite à des termes tous poſitifs; ainſi il

ſuffira

ſuffira de continuer toutes ces ſuites juſqu'à ce que leurs termes correſpondans ſoient devenus tous poſitifs; parce qu'alors on ſera ſûr que la ſérie des réſultats continuée auſſi loin qu'on voudra ſera toujours poſitive, & que par conſéquent elle ne contiendra plus aucune variation de ſigne.

Pour éclaircir ceci par un exemple, ſoit propoſée l'équation

$$x^3 - 63x + 189 = 0$$

on trouvera d'abord que les réſultats qui répondent à $x = 0, 1, 2, 3$ ſont 189, 127, 71, 27, d'où l'on tirera les diff. $1^{eres}$ $-62, -56, -44$, les diff. $2^{des}$ 6, 12, & la diff. $3^{eme}$ 6; ainſi on formera les quatre ſéries ſuivantes

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | etc. |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | etc. |
| −62 | −56 | −44 | −26 | −2 | 28 | 64 | etc. |
| 189 | 127 | 71 | 27 | 1 | −1 | 27 | etc. |

dont la loi eſt que chaque terme eſt égal à la ſomme du terme précédent de la même ſérie, & de celui qui y eſt au deſſus dans la ſérie précédente; de ſorte qu'il eſt très facile de continuer ces ſéries auſſi loin qu'on voudra.

Or la derniere de ces quatre ſéries ſera, comme l'on voit, celle des réſultats qui viennent de la ſubſtitution des nombres naturels 0, 1, 2 etc. à la place de $x$ dans l'équation propoſée, & comme les termes de la $7^{eme}$ colonne, ſavoir 6, 42, 64, 27, ſont tous poſitifs, il s'enſuit que les termes ſuivans ſeront tous auſſi poſitifs, de ſorte que la ſérie des réſultats continuée auſſi loin qu'on voudra n'aura plus aucune variation de ſigne.

14. *Remarque.* On avoit déjà remarqué que l'on pouvoit trouver la valeur approchée de toutes les racines réelles & inégales d'une équation quelconque, en y ſubſtituant ſucceſſivement à la place de l'inconnue différens nombres en progreſſion arithmétique; mais cette re-

marque ne pouvoit pas être d'une grande utilité, faute d'avoir une méthode pour déterminer la progreſſion que l'on doit employer dans chaque cas, en ſorte que l'on ſoit aſſuré qu'elle faſſe connoître toutes les racines réelles & inégales de l'équation propoſée. Nous en ſommes heureuſement venus à bout à l'aide du probleme de l'art. 8.

Au reſte, nous verrons encore ci-après d'autres uſages de ce même probleme par rapport aux racines égales & imaginaires.

## §. II.

### *De la maniere d'avoir les racines égales & imaginaires des équations.*

15. Nous n'avons conſidéré dans le §. préc. que les racines réelles & inégales de l'équation propoſée (B); ſuppoſons maintenant que cette équation ait des racines égales; dans ce cas il faudra (art. 11) que l'équation (D) ſoit diviſible autant de fois par $v$, qu'il y aura de combinaiſons de racines égales deux à deux; par conſéquent il faudra qu'il y ait dans cette équation (D) autant des derniers termes qui manquent; ainſi on connoîtra d'abord par ce moyen combien de racines égales il y aura dans la propoſée.

Or, puiſque dans le cas des racines égales on a néceſſairement $u = 0$ (art. 8), l'équation (C) du même art. donnera pour ce cas $Y = 0$; ainſi il faudra que les deux équations en $x$, $X = 0$, & $Y = 0$, aient lieu en même tems lorſque $x$ eſt égal à une quelconque des racines égales de l'équation (B).

On cherchera donc par les méthodes connues le plus grand commun diviſeur des deux polynomes X & Y, & faiſant enſuite ce diviſeur égal à zéro, on aura une équation qui ne ſera compoſée que des racines égales de la propoſée, mais élevées à une puiſſance moindre de l'unité.

Soit R le plus grand commun diviſeur de X & de Y, & $X'$ le quotient de X diviſé par R, il eſt facile de voir que l'équation

$X' =$

$X' = 0$ contiendra toutes les mêmes racines que l'équation propoſée $X = 0$, avec cette différence que les racines multiples de cette équation ſeront ſimples dans l'équation $X' = 0$; ainſi l'équation $X' = 0$ ſera dans le cas des méthodes précédentes.

On peut encore, ſi l'on veut, trouver deux équations ſéparées, dont l'une contienne ſeulement les racines égales de l'équation $X = 0$, & dont l'autre contienne les racines inégales de la même équation. Pour cela il n'y aura qu'à chercher encore le plus grand commun diviſeur des polynomes $X'$ & $Y$, & nommant ce diviſeur $R'$ on prendra le quotient de $X'$ diviſé par $R'$, lequel étant nommé $X''$ on fera ces deux équations $X'' = 0$, & $R' = 0$.

La premiere contiendra ſeulement les racines inégales de l'équation $X = 0$, & la ſeconde contiendra ſeulement les racines égales de la même équation, mais chacune une ſeule fois; de ſorte que les deux équations $X'' = 0$, & $R' = 0$ n'auront que des racines inégales, & par conſéquent ſeront ſuſceptibles des méthodes du §. préc.

16. Connoiſſant ainſi le nombre des racines réelles tant inégales qu'égales de l'équation propoſée, ſi ce nombre eſt moindre que le degré de l'équation, on en conclura que les autres racines ſont néceſſairement imaginaires.

En général, pour que l'équation (B) ait toutes ſes racines réelles, il faut que les valeurs de $u$ ſoient réelles auſſi; donc il faudra que les valeurs de $u^2$, ou de $v$, ſoient toutes réelles & poſitives; par conſéquent l'équation (D) de l'art. 8 doit avoir toutes ſes racines réelles & poſitives; donc il faudra, par la regle connue, que les ſignes de cette équation ſoient alternativement poſitifs, & négatifs; de ſorte que, ſi cette condition n'a pas lieu, ce ſera une marque ſure que l'équation (B) a néceſſairement des racines imaginaires.

Or on ſait que les racines imaginaires vont toujours en nombre pair, & qu'elles peuvent ſe mettre deux à deux ſous cette forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\alpha$ & $\beta$ étant des quantités réelles; donc on aura

$u = \pm 2\beta\sqrt{-1}$, & par conſéquent $v = -4\beta^2$; d'où l'on voit que l'équation (D) aura néceſſairement autant de racines réelles négatives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans l'équation (B).

Donc, ſi on fait $v = -w$, ce qui changera l'équation (D) en celle-ci

$$w^n - aw^{n-1} + bw^{n-2} - cw^{n-3} + \text{etc.} = 0 \quad \text{- - (G)}$$

cette équation aura néceſſairement autant de racines réelles poſitives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans l'équation (B).

Donc, ſi dans l'équation (G) il n'y a qu'un ſeul changement de ſigne, l'équation (B) n'aura que deux racines imaginaires (art. 7).

17. Il ſuit de l'article précédent que, pour avoir la valeur des racines imaginaires de l'équation (B), il n'y a qu'à chercher les racines réelles poſitives de l'équation (G). En effet, ſoit $w'$, $w''$, $w'''$ etc. ces racines, on aura d'abord $\frac{\sqrt{w'}}{2}$, $\frac{\sqrt{w''}}{2}$, $\frac{\sqrt{w'''}}{2}$ etc. pour les valeurs de $\beta$; enſuite, pour trouver les valeurs correſpondantes de $\alpha$, on ſubſtituera, dans l'équation (B), $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, à la place de $x$, & on fera deux équations ſéparées des termes tous réels, & de ceux qui ſeront multipliés par $\sqrt{-1}$; de cette maniere on aura deux équations en $\alpha$ de cette forme

$$\left.\begin{aligned} \alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + \text{etc.} &= 0 \\ m\alpha^{m-1} + p\alpha^{m-2} + q\alpha^{m-3} + \text{etc.} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{- - (H)}$$

dans leſquelles les coëfficiens P, Q etc. $p$, $q$ etc. ſeront donnés en $a$, $b$, $c$ etc. & en $\beta$.

Donc, ſi on donne à $\beta$ quelqu'une des valeurs précédentes, il faudra néceſſairement que ces deux équations aient lieu en même tems, & par conſéquent il faudra qu'elles aient un diviſeur commun. On cherchera donc leur plus grand commun diviſeur, & le faiſant égal à zéro, on aura une équation en $\alpha$ & $\beta$, par laquelle, $\beta$ étant connu, on trouvera $\alpha$.

Il eſt

Il eſt bon de remarquer que, ſi toutes les valeurs de $\beta$ tirées de l'équation (G) ſont inégales entr'elles, alors à chaque valeur de $\beta$ il ne pourra répondre qu'une ſeule valeur de $\alpha$; donc dans ce cas les deux équations (H) ne pourront avoir qu'une ſeule racine commune; & par conſéquent leur plus grand commun diviſeur ne pourra être que du premier degré.

On pouſſera donc la diviſion juſqu'à ce que l'on parvienne à un reſte où $\alpha$ ne ſe trouve plus qu'à la premiere dimenſion, & on fera enſuite ce reſte égal à zéro; ce qui donnera la valeur cherchée de $\alpha$.

Mais, ſi parmi les valeurs de $\beta$ tirées de l'équation (G) il y en a, par exemple, deux d'égales entr'elles, alors, comme à chacune de ces valeurs égales de $\beta$ il peut répondre des valeurs différentes de $\alpha$, il faudra qu'en mettant cette valeur double de $\beta$ dans les équations (H), elles puiſſent avoir lieu par rapport à l'une & l'autre des valeurs de $\alpha$ qui y répondent; ainſi ces deux équations auront néceſſairement deux racines communes, & par conſéquent leur plus grand commun diviſeur ſera du ſecond degré. Il faudra donc, dans ce cas, ne pouſſer la diviſion que juſqu'à ce que l'on arrive à un reſte, où $\alpha$ ſe trouve à la ſeconde dimenſion ſeulement; & alors on fera ce reſte égal à zéro, ce qui donnera une équation du ſecond degré par laquelle on déterminera les deux valeurs de $\alpha$, leſquelles ſeront néceſſairement toutes deux réelles.

De même, s'il y avoit trois valeurs égales de $\beta$, il faudroit, pour trouver les valeurs de $\alpha$ qui répondroient à cette valeur triple de $\beta$, ne pouſſer la diviſion que juſqu'à ce que l'on parvînt à un reſte où la plus haute puiſſance de $\alpha$ fût la troiſieme; & alors, feſant ce reſte égal à zéro, on auroit une équation en $\alpha$ du troiſieme degré, laquelle donneroit les trois valeurs réelles de $\alpha$, correſpondantes à la même valeur de $\beta$; & ainſi de ſuite.

## §. III.

### *Nouvelle méthode pour approcher des racines des équations numériques.*

18. Soit l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} + K = 0 \quad \text{----} \quad (a)$$

& ſuppoſons qu'on ait déjà trouvé par la méthode précédente, ou autrement, la valeur entiere approchée d'une de ſes racines réelles & poſitives; ſoit cette premiere valeur $p$, en ſorte que l'on ait $x > p$ & $x < p + 1$; on fera $x = p + \frac{1}{y}$, & ſubſtituant cette valeur dans l'équation propoſée, à la place de $x$, on aura, après avoir multiplié toute l'équation par $y^m$ & ordonné les termes par rapport à $y$, une équation de cette forme

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \text{etc.} + K' = 0 \quad \text{---} \quad (b).$$

Or, comme (*hyp.*) $\frac{1}{y} > 0$ & $< 1$, on aura $y > 0$; donc l'équation $(b)$ aura néceſſairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité.

On cherchera donc par les méthodes du §. I la valeur entiere approchée de cette racine, & comme cette racine doit être néceſſairement poſitive, il ſuffira de conſidérer $y$ comme poſitif (art. 4).

Ayant trouvé la valeur entiere approchée de $y$, que je nommerai $q$, on fera enſuite $y = q + \frac{1}{z}$, & ſubſtituant cette valeur de $y$ dans l'équation $(b)$, on aura une troiſieme équation en $z$ de cette forme

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + \text{etc.} + K'' = 0 \quad \text{---} \quad (c)$$

laquelle aura néceſſairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité, dont on pourra trouver de même la valeur entiere approchée.

Cette

Cette valeur approchée de $z$ étant nommée $r$, on fera $z = r + \frac{1}{u}$, & ſubſtituant on aura une équation en $u$ qui aura au moins une racine réelle plus grande que l'unité, & ainſi de ſuite.

En continuant de la même maniere on approchera toujours de plus en plus de la valeur de la racine cherchée; mais, s'il arrive que quelqu'un des nombres $p$, $q$ etc. ſoit une racine exacte, alors on aura $x = p$, ou $y = q$ etc. & l'opération ſera terminée; ainſi, dans ce cas, on trouvera pour $x$ une valeur commenſurable.

Dans tous les autres cas la valeur de la racine ſera néceſſairement incommenſurable, & on pourra ſeulement en approcher auſſi près qu'on voudra.

19. Si l'équation propoſée a pluſieurs racines réelles poſitives, on pourra trouver, par les méthodes expoſées dans le §. I, la valeur entiere approchée de chacune de ces racines; & nommant ces valeurs $p$, $p'$, $p''$ etc. on les employera ſucceſſivement pour approcher davantage de la vraie valeur de chaque racine; il faudra ſeulement remarquer

1°. Que ſi les nombres $p$, $p'$, $p''$ etc. ſont tous différens l'un de l'autre, alors les transformées $(b)$, $(c)$ etc. de l'art. préc. n'auront chacune qu'une ſeule racine réelle & plus grande que l'unité; car ſi, par exemple, l'équation $(b)$ avoit deux racines réelles plus grandes que l'unité, telles que $y'$ & $y''$, on auroit donc $x = p + \frac{1}{y'}$ & $x = p + \frac{1}{y''}$, de ſorte que ces deux valeurs de $x$ auroient la même valeur entiere approchée $p$ contre l'hypothèſe; il en ſeroit de même ſi l'équation $(c)$, ou quelqu'une des ſuivantes, avoit deux racines réelles plus grandes que l'unité.

De là il s'enſuit que, pour trouver dans ce cas les valeurs entieres approchées $q$, $r$ etc. des racines des équations $(b)$, $(c)$ etc., il ſuffira de ſubſtituer ſucceſſivement à la place de $y$, $z$ etc. les nombres naturels poſi-

poſitifs 1, 2, 3 etc. juſqu'à ce que l'on trouve deux ſubſtitutions conſécutives qui donnent des réſultats de ſigne contraire (art. 6).

2°. Que s'il y a deux valeurs de $x$ qui aient la même valeur entiere approchée $p$, alors, en employant cette valeur, les équations $(b)$, $(c)$ etc. auront chacune deux racines réelles plus grandes que l'unité, juſqu'à ce que l'on arrive à une équation dont les deux racines plus grandes que l'unité aient des valeurs entieres approchées différentes; alors chacune de ces deux valeurs donnera une ſuite particuliere d'équations dont chacune n'aura plus qu'une ſeule racine réelle plus grande que l'unité.

En effet, puiſqu'il y a deux valeurs différentes de $x$ qui ont la même valeur entiere approchée $p$, ces deux valeurs ſeront repréſentées par $p + \frac{1}{y}$; de ſorte qu'il faudra que $y$ ait néceſſairement deux valeurs réelles plus grandes que l'unité; or, ſi ces deux valeurs de $y$ ont la même valeur approchée $q$, il faudra de nouveau qu'en faiſant $y = q + \frac{1}{z}$, $z$ ait deux valeurs différentes plus grandes que l'unité, & ainſi de ſuite.

Mais, ſi les valeurs entieres approchées de $y$ étoient différentes, alors nommant ces valeurs $q$ & $q'$, on feroit $y = q + \frac{1}{z}$ & $y = q' + \frac{1}{z}$, & il eſt clair que $z$, dans l'une & l'autre de ces deux ſuppoſitions, n'auroit plus qu'une ſeule valeur réelle plus grande que l'unité; autrement les valeurs de $y$, au lieu d'être ſeulement doubles, ſeroient triples ou quadruples etc.

Donc, quand on ſera parvenu à une transformée dont les deux racines plus grandes que l'unité auront des valeurs entieres différentes, alors les autres transformées réſultantes de chacune de ces deux valeurs n'auront plus qu'une ſeule racine plus grande que l'unité; par conſéquent on pourra trouver la valeur entiere approchée de ces racines

en

en y ſubſtituant ſimplement les nombres naturels 1, 2, 3 etc. juſqu'à ce que l'on ait deux ſubſtitutions qui donnent des réſultats de ſignes contraires (art. 6).

On peut faire des remarques analogues ſur le cas où il y auroit dans l'équation (*a*) trois racines ou davantage, qui auroient la même valeur entiere approchée.

20. Nous avons ſuppoſé dans l'art. 18 que les racines cherchées étoient poſitives; pour trouver les négatives il n'y aura qu'à mettre $-x$ à la place de $x$ dans l'équation propoſée, & on cherchera de même les racines poſitives de cette derniere équation; ce ſeront les racines négatives de la propoſée (art. 4).

Quant aux racines imaginaires, qui ſont toujours exprimées par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, nous avons donné, dans le §. II, le moyen de trouver les équations dont $\alpha$ & $\beta$ ſont les racines; ainſi il n'y aura qu'à chercher les racines réelles de ces équations, & l'on aura la valeur de toutes les racines imaginaires de l'équation propoſée.

21. Pour faciliter les ſubſtitutions (art. 18) de $p + \frac{1}{y}$ au lieu de $x$, de $q + \frac{1}{z}$ au lieu de $y$ etc. il eſt bon de remarquer que les coëfficiens de la transformée (*b*) peuvent ſe déduire immédiatement de ceux de l'équation (*a*) en cette ſorte

$$A' = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} + \text{etc.}$$
$$B' = mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} + \text{etc.}$$
$$C' = \frac{m(m-1)}{2}Ap^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Bp^{m-3} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

On aura de même ceux de la transformée (*c*) par ceux de la transformée (*b*) en mettant dans les formules précédentes $q$ à la place de $p$, $A''$, $B''$,

$B''$, $C''$ etc. à la place de $A'$, $B'$, $C'$, etc. & $A'$, $B'$, $C'$ etc. à la place de A, B, C etc.; & ainſi de ſuite.

De là il eſt évident que le premier coëfficient $A'$, ou $A''$ etc. ne ſera jamais nul à moins que le nombre $p$, ou $q$ etc. ne ſoit une racine exacte, auquel cas nous avons vu que la fraction continue ſe termine à ce nombre (art. 18). En effet, ſi $A' = 0$, ou $A'' = 0$ etc., on aura $y = \infty$, ou $z = \infty$, donc $x = p$, ou $y = q$ etc.

22. Soient donc $p, q, r, s, t$, etc. les valeurs entieres approchées des équations $(a)$, $(b)$, $(c)$ etc. en ſorte que l'on ait $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$, $z = r + \frac{1}{u}$ etc. & ſubſtituant ſucceſſivement ces valeurs dans celle de $x$, on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

Ainſi la valeur de $x$, c'eſt à dire de la racine cherchée, ſera exprimée par une fraction continue. Or on ſait que ces ſortes de fractions donnent toujours l'expreſſion la plus ſimple, & en même tems la plus exacte qu'il eſt poſſible, d'un nombre quelconque ſoit rationel ou irrationel.

M. Huygens paroit être le premier qui ait remarqué cette propriété des fractions continues, & qui en ait fait uſage pour trouver les fractions les plus ſimples, & en même tems les plus approchantes d'une fraction quelconque donnée (voyez ſon traité de *Automato planetario*).

Pluſieurs habiles Géometres ont enſuite développé davantage cette théorie, & en ont fait différentes applications ingénieuſes & utiles; mais on n'avoit pas encore penſé, ce me ſemble, à s'en ſervir dans la réſolution des équations.

23. Maintenant, ſi on réduit les fractions continues

$$\frac{p}{1}, \quad p + \frac{1}{q}, \quad p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}} \quad \text{etc.}$$

en

en fractions ordinaires, on aura en faiſant

$$\alpha = p, \qquad \alpha' = 1$$
$$\beta = q\alpha + 1, \qquad \beta' = q\alpha' = q$$
$$\gamma = r\beta + \alpha, \qquad \gamma' = r\beta' + \alpha'$$
$$\delta = s\gamma + \beta, \qquad \delta' = s\gamma' + \beta'$$
etc. etc.

on aura, dis-je, cette ſuite de fractions particulieres

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\beta}{\beta'}, \quad \frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'} \text{ etc.}$$

leſquelles ſeront néceſſairement convergentes vers la vraie valeur de $x$, & dont la premiere ſera plus petite que cette valeur, la ſeconde ſera plus grande, la troiſieme plus petite, & ainſi de ſuite; de ſorte que la valeur cherchée ſe trouvera toujours entre deux fractions conſécutives quelconques; c'eſt ce qu'il eſt aiſé de déduire de la nature même de la fraction continue, d'où celles-ci ſont tirées.

Or il eſt facile de voir que les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma$ etc. & $\alpha', \beta', \gamma'$ etc. ſont toujours telles que $\beta\alpha' - \alpha\beta' = 1$, $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1$, $\delta\gamma' - \gamma\delta' = 1$ etc.; d'où il s'enſuit

1°. Que ces fractions ſont déjà réduites à leurs moindres termes; car, ſi $\gamma$, & $\gamma'$, par exemple, avoient un commun diviſeur autre que l'unité, il faudroit, en vertu de l'équation $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1$, que l'unité fût auſſi diviſible par ce même diviſeur.

2°. Qu'on aura $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}$, $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\beta'\gamma'}$, $\frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}$ etc. de ſorte que les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ etc. ne peuvent jamais différer de la vraie valeur de $x$ que d'une quantité reſpectivement moindre que $\frac{1}{\alpha'\beta'}$, $\frac{1}{\beta'\gamma'}$, $\frac{1}{\gamma'\delta'}$ etc.; d'où il ſera facile de juger de la quantité de l'approximation.

En général, puiſque $\beta' > \alpha'$, $\gamma' > \beta'$ etc. on aura $\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'}$, $\frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'}$ etc. d'où l'on voit que l'erreur de chaque fraction ſera toujours moindre que l'unité diviſée par le carré du dénominateur de la même fraction.

3°. Que chaque fraction approchera de la valeur de $x$, non ſeulement plus que ne fait aucune des fractions précédentes, mais auſſi plus que ne pourroit faire aucune autre fraction quelconque qui auroit un moindre dénominateur. En effet, ſi la fraction $\frac{\mu}{\mu'}$, par exemple, approchoit plus que la fraction $\frac{\gamma}{\gamma'}$, $\gamma'$ étant $> \mu'$, il faudroit que la quantité $\frac{\mu}{\mu'}$ ſe trouvât entre ces deux $\frac{\gamma}{\gamma'}$ & $\frac{\delta}{\delta'}$; donc $\frac{\mu}{\mu'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{1}{\gamma'\delta'}$, & $> 0$; donc $\mu\gamma' - \mu'\gamma < \frac{\mu'}{\delta'} < 1$, & $> 0$; ce qui ne ſe peut.

24. Les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ etc. peuvent être appellées fractions *principales*, parce qu'elles convergent le plus qu'il eſt poſſible vers la valeur cherchée; mais, quand les nombres $p$, $q$, $r$ etc. different de l'unité, on peut encore trouver d'autres fractions convergentes vers la même valeur, & qu'on appellera, ſi l'on veut, fractions *ſecondaires*.

Par exemple, ſi $r$ eſt $> 1$, on peut entre les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$ & $\frac{\gamma}{\gamma'}$ qui ſont toutes deux moindres que la valeur de $x$, inſérer autant de fractions ſecondaires qu'il y a d'unités dans $r - 1$, en mettant ſucceſſivement 1, 2, 3 etc. $r - 1$ au lieu de $r$. De cette maniere, à cauſe de $\gamma = r\beta + \alpha$, & $\gamma' = r\beta' + \alpha'$, on aura cette ſuite de fractions

$\alpha$

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\ \frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\ \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\ \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}\ \text{etc.}\ \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}$$

dont les deux extremes ſont les deux fractions *principales* $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, & dont les intermédiaires ſont des fractions *ſecondaires*.

Or, ſi on prend la différence entre deux fractions conſécutives quelconques de cette ſuite, comme entre $\frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}$ & $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, on trouvera $\frac{1}{(2\beta'+\alpha')(3\beta'+\alpha')}$, de ſorte que cette différence ſera toujours poſitive, & ira en diminuant d'une fraction à l'autre; d'où il s'enſuit que, comme la derniere fraction $\frac{\gamma}{\gamma'}$ eſt moindre que la vraie valeur de la fraction continue, les fractions dont il s'agit ſeront toutes plus petites que cette valeur, & ſeront en même tems convergentes vers cette même valeur.

On fera le même raiſonnement par rapport à toutes les autres fractions principales, & ſi on ajoute à ces fractions les deux fractions $\frac{0}{1}$, & $\frac{1}{0}$, dont la premiere eſt toujours plus petite, & dont la ſeconde eſt plus grande que toute quantité donnée, on pourra former deux ſéries de fractions convergentes vers la valeur cherchée, dont l'une contiendra toutes les fractions plus petites que cette valeur, & dont l'autre contiendra toutes les fractions plus grandes que la même valeur.

*Fractions plus petites.*

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1}\ \text{etc.}\quad \frac{p}{1}\ \cdots\ \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)$$

$$\frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\ \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\ \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}\ \text{etc.}\ \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}\ \cdots\ \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)$$

$$\frac{\delta+\gamma}{\delta'+\gamma'},\ \frac{2\delta+\gamma}{2\delta'+\gamma'},\ \frac{3\delta+\gamma}{3\delta'+\gamma'}\ \text{etc.}\ \frac{t\delta+\gamma}{t\delta'+\gamma'}\ \cdots\ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$$

etc.

*Fractions plus grandes.*

$$\frac{1}{0},\ \frac{\alpha+1}{\alpha'+1},\ \frac{2\alpha+1}{2\alpha'+1},\ \frac{3\alpha+1}{3\alpha'+1}\ \text{etc.}\ \frac{q\alpha+1}{q\alpha'+1}\cdots\left(\frac{\beta}{\beta'}\right)$$

$$\frac{\gamma+\beta}{\gamma'+\beta'},\ \frac{2\gamma+\beta}{2\gamma'+\beta'},\ \frac{3\gamma+\beta}{3\gamma'+\beta'}\ \text{etc.}\ \frac{s\gamma+\beta}{s\gamma'+\beta'}\cdots\left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$$

etc.

Quant à la nature de ces fractions, il eſt facile de prouver, comme nous l'avons fait par rapport aux fractions principales, 1°. que chacune de ces fractions ſera déjà réduite à ſes moindres termes; d'où il s'enſuit que comme les numérateurs & les dénominateurs vont en augmentant, ces fractions ſe trouveront toujours exprimées par des termes plus grands à meſure qu'elles s'éloigneront du commencement de la ſérie. 2°. Que chaque fraction de la premiere ſérie approchera de la valeur de $x$ plus qu'aucune autre fraction quelconque, qui ſeroit moindre que cette valeur, & qui auroit un dénominateur plus petit que celui de la même fraction; & que, de même, chaque fraction de la ſeconde ſérie approchera plus de la valeur de $x$ que ne pourroit faire toute autre fraction qui ſeroit plus grande que cette valeur, & qui auroit un dénominateur plus petit que celui de la même fraction.

En effet, s'il y avoit une fraction comme $\frac{\mu}{\mu'}$ plus petite que la valeur de $x$, & en même tems plus approchante de cette valeur que la fraction $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, par exemple, en ſuppoſant $3\beta'+\alpha' > \mu'$, il faudroit (à cauſe que la fraction $\frac{\beta}{\beta'}$ eſt plus grande que la valeur dont il s'agit) que la quantité $\frac{\mu}{\mu'}$ ſe trouvât entre les deux quantités $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$ & $\frac{\beta}{\beta'}$; donc la quantité $\frac{\mu}{\mu'} - \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$ devroit être

$$< \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}'} - \frac{3\mathfrak{E}+\alpha}{3\mathfrak{E}'+\alpha'} < \frac{\mathfrak{E}\alpha' - \alpha\mathfrak{E}'}{\mathfrak{E}'(3\mathfrak{E}'+\alpha')} < \frac{1}{\mathfrak{E}'(3\mathfrak{E}'+\alpha')};$$

donc il faudroit que $\mu(3\mathfrak{E}'+\alpha') - \mu'(3\mathfrak{E}+\alpha)$ fût $< \frac{\mu'}{3\mathfrak{E}'+\alpha'} < 1$; ce qui ne ſe peut.

Au reſte, il peut arriver qu'une fraction d'une ſérie n'approche pas ſi près qu'une autre de l'autre ſérie, quoique conçue en termes moins ſimples; mais cela n'arrive jamais quand la fraction qui a le plus grand dénominateur eſt une fraction principale (art. 23).

## §. IV.

### *Application des méthodes précédentes à quelques exemples.*

25. Je prendrai pour premier exemple l'équation que Newton a réſolue par ſa méthode, ſavoir

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Je commence par chercher par les formules de l'art. 8 l'équation en $v$ qui réſulte de cette équation; je fais donc $m = 3$, $A = 0$, $B = -2$, $C = 5$; j'aurai $n = \frac{3.2}{2} = 3$, $A1 = 0$, $A2 = 4$, $A3 = 15$, $A4 = 8$, $A5 = 50$, $A6 = 91$; donc $a1 = 12$, $a2 = 72$, $a3 = -1497$, & de là $a = 12$, $b = 36$, $c = -643$; de ſorte que l'équation cherchée ſera

$$v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0.$$

Or, puiſque cette équation n'a pas les ſignes alternativement poſitifs & négatifs, j'en conclus ſur le champ que l'équation propoſée a néceſſairement deux racines imaginaires & par conſéquent une ſeule réelle (art. 16).

Ainſi les nombres à ſubſtituer à la place de $x$ ſeront les nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. (art. 6).

Je

Je ſuppoſe d'abord $x$ poſitif, & je cherche la limite des valeurs de $x$ par les méthodes de l'art. 12, je trouve $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} < 3$; ainſi 3 ſera la limite cherchée en nombres entiers, de ſorte qu'il ſuffira de faire ſucceſſivement $x = 0, 1, 2, 3$; ce qui donnera ces réſultats $-5, -6, -1, 16$; d'où l'on voit que la racine réelle de l'équation propoſée ſera entre les nombres 2 & 3; & qu'ainſi 2 ſera la valeur entiere la plus approchée de cette racine (art. 2).

Je fais maintenant, ſuivant la méthode du §. III, $x = 2 + \frac{1}{y}$, j'ai, en ſubſtituant & ordonnant les termes par rapport à $y$, l'équation

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$$

dans laquelle j'ai changé les ſignes pour rendre le premier terme poſitif.

Cette équation aura donc néceſſairement une ſeule racine plus grande que l'unité (art. 19), de ſorte que, pour en trouver la valeur approchée, il n'y aura qu'à ſubſtituer les nombres 0, 1, 2, 3 etc. juſqu'à ce que l'on trouve deux ſubſtitutions conſécutives qui donnent des réſultats de ſigne contraire.

Pour ne pas faire beaucoup de ſubſtitutions inutiles, je remarque qu'en faiſant $y = 0$, j'ai un réſultat négatif, & qu'en faiſant $y = 10$, le réſultat eſt encore négatif; je commence donc par le nombre 10, & je fais ſucceſſivement $y = 10, 11$, etc. je trouve d'abord les réſultats $-61, 54$ etc.; d'où je conclus que la valeur approchée de $y$ eſt 10; donc $q = 10$.

Je fais donc $y = 10 + \frac{1}{z}$, j'aurai l'équation

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0$$

& ſuppoſant ſucceſſivement $z = 1, 2$, etc. j'aurai les réſultats $-54, 71$ etc.; donc $r = 1$.

Je

Je fais encore $z = 1 + \frac{1}{u}$, j'aurai

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$$

& ſuppoſant $u = 1, 2$ etc. j'aurai les réſultats $-71, 293$ etc.; donc $s = 1$; & ainſi de ſuite.

En continuant de cette maniere on trouvera les nombres 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12 etc. de ſorte que la racine cherchée ſera exprimée par cette fraction continue

$$x = 2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

d'où l'on tirera les fractions (art. 23)

$\frac{2}{1}$, $\frac{21}{10}$, $\frac{23}{11}$, $\frac{44}{21}$, $\frac{111}{53}$, $\frac{155}{74}$, $\frac{576}{275}$, $\frac{731}{349}$, $\frac{1307}{624}$, $\frac{16415}{7837}$ etc.

leſquelles ſeront alternativement plus petites & plus grandes que la valeur de $x$.

La derniere fraction $\frac{16415}{7837}$ eſt plus grande que la racine cherchée; mais l'erreur ſera moindre que $\frac{1}{(7837)^2}$ (art. 23 n°. 2), c'eſt à dire, moindre que 0,000000163; donc, ſi on réduit la fraction $\frac{16415}{7837}$ en fraction décimale, elle ſera exacte juſqu'à la 7^eme décimale; or en faiſant la diviſion on trouve 2,0945514865---; ainſi la racine cherchée ſera entre les nombres 2,09455149, & 2,09455147.

Newton a trouvé par ſa méthode la fraction 2,09455147 (voyez ſa Méthode des ſuites infinies), d'où l'on voit que cette méthode donne dans ce cas un réſultat fort exact; mais on auroit tort de ſe promettre toujours une pareille exactitude.

26. Quant aux deux autres racines de la même équation nous avons déjà vû qu'elles doivent être imaginaires ; néanmoins, ſi on vouloit en trouver la valeur, on le pourroit par la méthode de l'art. 17.

Pour cela on reprendra l'équation en $v$ trouvée ci-deſſus, & en y changeant $v$ en $-w$, on aura

$$w^3 + 12w^2 - 36w - 643 = 0$$

& il ne s'agira plus que de chercher une racine réelle & poſitive de cette équation. Or, puiſqu'elle a ſon dernier terme négatif, elle aura néceſſairement une telle racine, dont on pourra trouver la valeur entiere la plus approchée par la ſubſtitution ſucceſſive des nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. (art. 3). En effet, en faiſant $w = 6$, on aura le réſultat $-211$, & en faiſant $w = 7$, on aura $+40$; ainſi la valeur entiere la plus approchée de la racine poſitive de cette équation ſera 6.

On fera donc maintenant $w = 6 + \frac{1}{u}$, & en ſubſtituant, on aura, après avoir changé les ſignes,

$$211u^3 - 216u^2 - 30u - 1 = 0.$$

Faiſant ſucceſſivement $u = 0, 1, 2$ etc. on aura les réſultats $-1$, $-36$, $+53$; donc 1 ſera la valeur entiere approchée de $u$.

On fera donc $u = 1 + \frac{1}{x}$, & l'on aura en ſubſtituant & changeant les ſignes,

$$36x^3 - 171x^2 - 417x - 211 = 0.$$

En faiſant ſucceſſivement $x = 0, 1, 2$ etc. on trouvera des réſultats négatifs juſqu'à la ſuppoſition de $x = 7$, qui donne 9218 pour réſultat, de ſorte que 6 ſera la valeur entiere approchée de $x$.

On fera donc $x = 6 + \frac{1}{y}$ etc.

De

De cette maniere on approchera de plus en plus de la valeur de $w$, laquelle ſera exprimée par cette fraction continue

$$w = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{etc.}}}$$

doù l'on tire les fractions particulieres

$$\tfrac{6}{1},\quad \tfrac{7}{1},\quad \tfrac{48}{7}\quad \text{etc.}$$

Connoiſſant ainſi $w$, on aura (art. 17) $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$; ainſi on connoitra $\beta$.

On ſubſtituera maintenant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, à la place de $x$ dans l'équation propoſée, & faiſant deux équations ſéparées des termes tout réels, & de ceux qui ſont affectés de $\sqrt{-1}$ on aura les deux équations

$$\alpha^3 - (3\beta^2 + 2)\alpha - 5 = 0$$
$$3\alpha^2 - \beta^2 - 2 = 0.$$

On cherchera le plus grand commun diviſeur de ces deux équations, & on pouſſera ſeulement la diviſion juſqu'à ce que l'on arrive à un reſte où $\alpha$ ne ſe trouve qu'à la premiere puiſſance (art. cité); ce reſte ſera $-\frac{8\beta^2 + 4}{3}\alpha - 5$, lequel étant fait $= 0$ donnera

$$\alpha = -\frac{15}{4(2\beta^2 + 1)}.$$

Ainſi on aura la valeur des deux racines imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, & $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ de l'équation propoſée.

27. Prenons pour ſecond exemple l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

On aura encore ici $m = 3$, & par conſéquent $n = 3$; enſuite $A = 0$, $B = -7$, $C = -7$; d'où $A1 = 0$, $A2 = 14$,

$A3 = -21$, $A4 = 98$, $A5 = -245$, $A6 = 833$; & de là $a1 = 42$, $a2 = 882$, $a3 = 18669$, & enfin $a = 42$, $b = 441$, $c = 49$; de ſorte que l'équation en $v$ ſera

$$v^3 - 42v^2 + 441v - 49 = 0.$$

Puiſque les ſignes de cette équation ſont alternatifs, c'eſt une marque que la propoſée peut avoir toutes ſes racines réelles (art. 16), & comme d'ailleurs cette équation n'eſt point diviſible par $v$, il s'enſuit que l'équation en $x$ n'aura point de racines égales (art. 15).

On fera maintenant (art. 11) $v = \frac{1}{y}$, & ordonnant l'équation par rapport à $y$, on aura

$$y^3 - 9y^2 + \tfrac{42}{49}y - \tfrac{1}{49} = 0.$$

Le plus grand coëfficient négatif étant 9, on pourroit prendre $l = 10$ (art. 12), mais on peut trouver une limite plus proche en cherchant le plus petit nombre entier qui rendra poſitives ces trois quantités

$$l^3 - 9l^2 + \tfrac{42}{49}l - \tfrac{1}{49}$$
$$3l^2 - 18l + \tfrac{42}{49}$$
$$3l - 9$$

& on trouvera que $l = 9$ ſatisfait à ces conditions, de ſorte qu'on aura $k = 3$ (art. 11), & par conſéquent $\Delta = \frac{1}{3}$.

On mettra donc (art. 13 n°. 2) dans l'équation propoſée, $\frac{x}{3}$ à la place de $x$, ce qui la réduira à celle-ci

$$x^3 - 63x + 189 = 0$$

dans laquelle il n'y aura plus qu'à ſubſtituer les nombres naturels 0, 1, 2, etc. à la place de $x$. Or, ſuivant la méthode de l'art. 13 (n°. 3), on trouve que la ſérie des réſultats ne contient que deux variations de ſignes leſquelles répondent à $x = 4, 5, 6$; de ſorte que l'équation propoſée

poſée n'aura que deux racines poſitives, leſquelles tomberont l'une entre les nombres $\frac{4}{3}$ & $\frac{5}{3}$, & l'autre entre les nombres $\frac{5}{3}$ & $\frac{6}{3}$; d'où l'on voit que la valeur entiere la plus approchée de l'une & de l'autre ſera 1 (art. 2).

Faiſons maintenant $x$ négatif pour avoir auſſi les racines négatives (art. 4), & l'équation ſe changera en

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

laquelle ayant ſon dernier terme négatif aura ſûrement une racine poſitive (art. 3), & il eſt clair qu'elle n'en aura qu'une ſeule, puiſque nous avons déjà trouvé les deux autres; ainſi on pourra d'abord trouver la valeur entiere approchée de cette racine en ſubſtituant à la place de $x$ les nombres 0, 1, 2, etc. juſqu'à ce que l'on rencontre deux ſubſtitutions qui donnent des réſultats de ſigne contraire (art. 3); or on trouve que ces ſubſtitutions ſont $x = 3$, & $x = 4$; de ſorte que 3 ſera la valeur entiere la plus approchée de $x$ dans l'équation préédente, & par conſéquent de $-x$ dans la propoſée.

Ayant ainſi trouvé que l'équation a trois racines réelles, deux poſitives, & une négative, & ayant trouvé en même tems leurs valeurs entieres approchées, on pourra approcher autant qu'on voudra de la vraie valeur de chacune d'elles par la méthode du §. III.

Conſidérons d'abord les racines poſitives, & faiſons dans l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$, $x = 1 + \frac{1}{y}$, elle deviendra celle-ci

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$$

laquelle, à cauſe que 1 eſt la valeur approchée de deux racines, aura néceſſairement (art. 19 n°. 2) deux racines plus grandes que l'unité.

J'eſſaye d'abord ſi je peux trouver les valeurs approchées de ces deux racines par la ſubſtitution des nombres entiers 0, 1, 2 etc. & comme il n'y a que le terme $4y^2$ de négatif, il ſuffira (art. 13 n°. 1) de pouſ-

ſer les ſubſtitutions juſqu'à ce que l'on ait $y^3 = \text{ou} > 4y^2$; c'eſt à dire juſqu'à $y = 4$; or, en faiſant $y = 0, 1, 2, 3, 4$, j'ai les réſultats $1, 1, -1, 1, 13$; d'où je conclus que les racines cherchées ſont l'une entre les nombres 1 & 2, & l'autre entre les nombres 2 & 3; de ſorte que les valeurs approchées de $y$ ſeront 1 & 2.

On fera donc 1°. $y = 1 + \frac{1}{z}$, & l'on aura

$$z^3 - 2z^2 - z + 1$$

équation qui n'aura plus qu'une racine réelle plus grande que l'unité (art. 19 n°. 2); ainſi on ſuppoſera ſucceſſivement $z = 1, 2$ etc. juſqu'à ce que l'on trouve deux ſubſtitutions conſécutives qui donnent des réſultats de ſigne contraire; or on trouve que $z = 2$ donne $-1$, & $z = 3$ donne $+7$; donc 2 ſera la valeur entiere approchée de $z$.

On fera donc $z = 2 + \frac{1}{u}$ & ſubſtituant l'on aura en changeant les ſignes

$$u^3 + 3u^2 - 4u - 1 = 0.$$

On ſuppoſera de même $u = 1, 2$ etc. & l'on trouvera que la valeur entiere approchée de $u$ ſera 1.

On fera $u = 1 + \frac{1}{w}$, & ainſi de ſuite.

2°. On fera $y = 2 + \frac{1}{z}$ & ſubſtituant dans l'équation précédente en $y$, on aura après avoir changé les ſignes

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$$

cette équation n'aura, comme la précédente en $z$, qu'une ſeule racine réelle plus grande que l'unité; de ſorte qu'il n'y aura qu'à faire $z = 1, 2$ etc.

2 etc. ce qui donne les réſultats $-1$, $5$, d'où l'on conclut que 1 eſt la valeur entiere approchée de $z$.

On fera donc $z = 1 + \frac{1}{u}$, & l'on aura, en changeant les ſignes,

$$u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0$$

d'où l'on trouvera, de la même maniere que ci-deſſus, que la valeur entiere approchée de $u$ ſera 4.

Ainſi on fera $u = 4 + \frac{1}{w}$; & ainſi de ſuite.

Donc les deux racines poſitives de l'équation propoſée ſeront

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{etc.}}}}$$

D'où l'on tirera, ſi l'on veut, des fractions convergentes, comme dans l'exemple précédent (art. 23, & 24).

Pour trouver maintenant la valeur approchée de la racine négative, on reprendra l'équation

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

dans laquelle on a déjà trouvé que la valeur entiere approchée eſt 3; ainſi on fera $x = 3 + \frac{1}{y}$, ce qui donnera en changeant les ſignes

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0$$

&

& comme cette équation ne peut avoir qu'une ſeule racine réelle plus grande que 1 (art. 19 n°. 2), on en trouvera la valeur approchée, en faiſant $y = 1, 2$ etc. juſqu'à ce que l'on rencontre deux réſultats conſécutifs de ſigne contraire, ce qui arrivera lorſque $y = 20, 21$; de ſorte que la valeur dont il s'agit ſera 20.

On fera donc $y = 20 + \frac{1}{u}$ etc.

De cette maniere la racine négative de l'équation propoſée ſera

$$x = -3 - \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}$$

# SOLUTION GÉNÉRALE ET ABSOLUE DU PROBLEME DE TROIS CORPS MOYENNANT DES SUITES INFINIES.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

Le probleme dont il s'agit dans ce Mémoire ſeroit ſans contredit tout auſſi fameux que celui de la quadrature du cercle, s'il avoit été connu depuis le tems des anciens Géometres Grecs, & ſi ce qui en fait le ſujet étoit autant à la portée de tout le monde que l'eſt la figure d'un cercle. Cette double différence diminue ſa célébrité, mais elle fait en échange, que tandis que la quadrature du cercle fait l'objet des recherches des plus ignorans, le probleme des trois corps n'occupe que ceux qui ſont le plus verſés dans les calculs, & qui, ſans ſe repaître, comme les premiers, de quelque ſolution fautive & illuſoire, ſe bornent à accuſer le calcul intégral du peu de ſuccès de leurs recherches. Ils ſe déſiſtent de la quadrature du cercle, & je crois qu'ils ſe déſiſteroient également du probleme des trois corps, ſi on pouvoit leur démontrer que ces deux problemes doivent, à cet égard, être rangés dans une même claſſe. Il me ſemble que c'eſt par cet examen qu'il faut commencer. Tâchons donc de parler raiſon ſur ce qu'il faut trouver, avant qu'on puiſſe dire que le probleme de trois corps eſt réſolu.

§. 2. D'abord je remarque qu'il ne s'agit pas des formules différentielles. Celles par où il faut commencer, & qui ſont du ſecond degré, ſe trouvent ſans peine, non ſeulement pour trois corps

mais pour un ſyſteme d'autant de corps qu'on voudra. Enſuite il ne ſuffit pas de tirer de ces formules quelques autres, qui ne donnent que la loi de la conſervation des forces vives, ou celle des aires proportionelles au tems, ou quelque autre loi ſemblable, qui, pour s'étendre ſur tout le ſyſteme, nous laiſſe abſolument ignorer le mouvement de chaque corps en particulier. Enfin, quand même on parviendroit à déterminer ſéparément la viteſſe de chaque corps par les diſtances, il y auroit encore plus d'un pas à faire pour parvenir à la ſolution complette, qui demande que *la poſition des corps, leurs viteſſes & leurs directions étant données pour un certain moment, on puiſſe aſſigner la poſition, les viteſſes & les directions pour un autre moment quelconque donné.* Cette queſtion eſt la principale. Elle touche immédiatement à l'uſage qu'on veut faire du probleme, & toutes les autres queſtions s'y réduiſent aiſément.

§. 3. Mais cette queſtion eſt-elle réſoluble? On dira ſans doute qu'elle l'eſt, parce que non ſeulement le probleme eſt déterminé, mais parce que les formules différentielles, deſquelles la ſolution dépend, ſont trouvées, de ſorte qu'il ne s'agit que d'en chercher les intégrales. Mais quelles intégrales? Veut-on que ce ſoient des formules finies? Je démontrerai qu'il n'y en a point, & que toutes celles qu'on pourra encore trouver ne ſuffiſent pas pour rendre la ſolution complette. Tout ce qu'il y aura à faire, revient donc à ce qu'on a fait par rapport à la quadrature du cercle, c'eſt d'avoir recours à des ſuites infinies; & la queſtion ſe réduit à en trouver qui ſoient convergentes & traitables. Voilà en quoi ces deux problemes, quoique différemment fameux, ſe reſſemblent parfaitement.

§. 4. Je le répete, *la ſolution n'eſt complette & abſolue, que lorſque toutes les circonſtances du ſyſteme peuvent être déterminées directement pour un moment quelconque, en n'employant que le tems écoulé depuis le moment qu'on a fait ſervir de baſe dans le calcul, & qui par là tient lieu d'époque.* Car, à conſidérer les formules différentielles & la façon dont elles ſemblent devoir être traitées, il paroit que, quand même

me

me elles ſeroient intégrables à tous égards, on trouveroit plus facilement les viteſſes exprimées par les diſtances, qu'on ne trouveroit le tems exprimé par les viteſſes ou par les diſtances, & qu'encore le tems ſe trouveroit plus facilement par les autres circonſtances, que ces circonſtances ne ſe trouveroient par le tems. C'eſt cependant ce dernier but qu'on doit ſe propoſer, parce que c'eſt celui que l'uſage du probleme demande. On ſait qu'il en eſt de même dans le cas où on ne conſidere que deux corps. Depuis Kepler, la grande queſtion étoit toujours de trouver *directement*, non l'anomalie moyenne par la vraie ou par les diſtances, mais *l'anomalie vraie par la moyenne, qui repréſente le tems.* Queſtion, qui n'a été réſolue & qui ne le ſera que par des ſuites infinies, par des approximations, par des interpolations, ou par d'autres manieres indirectes.

§. 5. En viendra-t-on mieux à bout, lorſqu'au lieu de deux corps on en ſuppoſe trois ou pluſieurs? Je réponds d'abord ce que tout Géometre répondra, qu'il n'eſt gueres probable. Mais ſuppoſons, par exemple, pour le cas de trois corps, toutes les intégrations des formules différentielles faites. Que les intégrales ayent une forme quelconque, mais qu'elles ſoient réduites en ſorte qu'elles expriment la poſition des corps par le tems. Que dans ces formules la maſſe d'un des trois corps ſoit faite $= 0$, de même que les autres coëfficiens qui s'y rapportent. Il eſt clair que par là elles ſeront ſimplifiées de beaucoup; peut-être même que pluſieurs termes & quantités tranſcendantes diſparoitront. Mais voyons ce qui reſte. Les formules ainſi ſimplifiées ſeront pour le cas de deux corps. Elles exprimeront la poſition de ces deux corps par le tems, c'eſt à dire les diſtances & les anomalies vraies par les moyennes; c'eſt à dire, encore que ces formules ſeront des ſuites infinies, & qui plus eſt, des ſuites infinies ſimplifiées. Remettons maintenant le troiſieme corps, & il eſt clair que tous les termes qu'on avoit anéantis, ſe remettront auſſi, & que non ſeulement les formules qui expriment la poſition des trois corps par le tems, ſeront des ſuites, mais même des ſuites beaucoup

plus compliquées que celles qui dans le cas de deux corps expriment leur poſition par le tems, ou l'anomalie vraie par la moyenne. Il ne ſera pas difficile d'appliquer ce même raiſonnement à un ſyſteme d'un nombre de corps quelconque. La poſition de ces corps ne pourra être exprimée par le tems, ſi ce n'eſt par des ſuites infinies, qui ſeront d'autant plus compliquées, que le nombre des corps ſera plus grand.

§. 6. Tournons maintenant le cas du probleme, & ſans avoir égard à ce qui en rend la ſolution complette & abſolue, ſuppoſons une ſolution telle, qu'elle détermine les diſtances par les angles, ou les angles par les diſtances. Il eſt clair qu'une ſemblable ſolution aboutit uniquement à nous faire connoitre la nature des courbes que les corps parcourent. C'eſt ainſi p. ex. qu'on ſait, que lorſqu'il n'y a que deux corps dont le centre commun de gravité eſt en repos, ces corps parcourent des ſections coniques. Mais quelles ſeront les courbes, ou les orbites, lorſqu'il y a trois ou pluſieurs corps? On prévoit bien que ce pourront être des courbes à double courbure, & que le probleme, propoſé dans ſa plus grande univerſalité, doit s'étendre juſques ſur les cas les plus compliqués. Or on ne ſauroit diſconvenir que les courbes à double courbure ne ſoient encore peu connues. Il n'en étoit pas de même des ſections coniques pour le cas de deux corps. On en connoiſſoit un grand nombre des plus belles propriétés, bien longtems avant de ſavoir qu'on pouvoit en faire uſage dans l'Aſtronomie théorique. Mais il s'en faut de beaucoup qu'on trouve les mêmes avantages par rapport au probleme de trois corps. Car, quand on pourroit parvenir à trouver des équations qui nous faſſent connoitre la nature des orbites, quelle apparence y a-t-il que ces orbites ſeront des courbes connues depuis long tems, tandis que ce que nous connoiſſons des courbes à double courbure ſe réduit à fort peu de choſe, & qu'il n'y en a peut-être aucune, qui pour être mieux connue ou plus intéreſſante ait mérité un nom.

§. 7. A conſidérer les formules différentielles par où le calcul commence, la différentielle du tems, ou pour mieux dire, le quarré

ré de cette différentielle ſe trouve dans toutes d'une même façon, & il eſt très facile de l'en faire diſparoitre. Par là les formules ſont réduites en ſorte qu'elles ne renferment plus d'autres variables que celles qui ſervent à déterminer la nature des courbes. Par là encore le probleme ceſſe, pour ainſi dire, d'être mécanique ou aſtronomique, & devient un probleme de pure Géométrie. Mais ce n'eſt pas qu'il en devienne d'autant plus réſoluble. Et il n'eſt pas difficile de prévoir combien la ſolution générale doit être compliquée. Car l'orbite de chaque corps ſe détermine par l'état initial de tout le ſyſteme. Cet état étant donné ou pris dans ſa plus grande généralité, il s'agit de trouver pour l'orbite de chaque corps une équation qui exprime les ordonnées par les abſciſſes, ou les diſtances par les angles. Mais la même généralité de la ſolution demande qu'à chaque abſciſſe il réponde un nombre indéfini d'ordonnées, ou qu'à chaque angle il réponde un nombre indéfini de diſtances. La raiſon en eſt, que la ſolution générale doit comprendre encore ces cas où l'orbite de chaque corps tourne & s'entortille, pour ainſi dire, une infinité de fois autour du centre commun de gravité, ſans jamais rentrer en elle-même & ſans ſe perdre par une excurſion à l'infini. Tel eſt à peu près le cas de la cycloïde à double courbure que les Satellites décrivent autour du Soleil, ou du centre commun de gravité du Syſteme Solaire. Il eſt vrai qu'on peut imaginer des formules aſſez ſimples, qui ſatisfont à cette condition. Peut-être en trouvera-t-on auſſi, qui ſatisfont en même tems à la loi de la gravitation, ou de l'attraction mutuelle des corps du ſyſteme, mais qui, pour ne préſenter que des cas particuliers, n'auront pas toute l'univerſalité que la ſolution du probleme demande.

§. 8. Si cependant on pouvoit parvenir à des formules véritablement univerſelles, & calculer ou conſtruire les orbites pour un état initial du ſyſteme quelconque donné, alors le probleme des trois corps ſeroit réſolu à peu près autant que l'eſt celui de deux corps. Car ſuppoſons, ce qui peut toujours ſe faire, que le centre commun de gravité ſoit immobile, & ſoient les orbites conſtruites. Je dis que, le lieu

d'un corps étant donné, on trouvera aſſez facilement celui des deux autres. Car, en tirant par le lieu du corps donné & par le centre commun de gravité une ligne droite, cette ligne paſſera par le centre commun de gravité des deux autres corps, & ce centre ſe trouvera moyennant le rapport des maſſes. Enſuite il ne s'agit que de tirer par ce centre une ligne droite, qui, en paſſant par les orbites des deux autres corps, ſoit coupée par ces orbites en raiſon réciproque des maſſes des corps, ce qui ne pouvant communément ſe faire que d'une ſeule façon, donnera les lieux des deux autres corps qu'il s'agiſſoit de chercher. Si donc on prend ſur l'orbite du premier corps encore un autre point, on trouvera également les lieux répondans des deux autres corps; & la loi générale des aires proportionelles au tems, donnera le tems que le ſyſteme aura employé pour parvenir du premier état au ſecond, du moins dans le cas où les trois orbites ſe trouvent dans un même plan. Mais, quand cette façon de procéder ſeroit univerſellement praticable, il s'en faut de beaucoup que nous connoiſſions aſſez les orbites pour pouvoir les conſtruire; & d'ailleurs la queſtion, *de déterminer la poſition des corps par le tems*, ne pourroit par là être réſolue que fort indirectement. Voyons donc comment, en employant des ſuites infinies, nous pourrons parvenir à la ſolution directe qu'il s'agit de trouver.

§. 9. Comme à cet égard je ne me propoſe dans ce Mémoire que de faire voir la méthode qui conduit à ce but, je me bornerai d'abord à l'appliquer à un cas moins compliqué. Mais je l'appliquerai de façon qu'on voie que cette méthode eſt généralement applicable, non ſeulement à un ſyſteme d'un nombre de corps quelconque mais encore ſous une loi de gravitation quelconque. Le cas que j'examinerai eſt celui où les trois corps qui s'attirent mutuellement, ſe trouvent & ſe meuvent en un même ligne droite. Je choiſis ce cas, afin de débarraſſer le calcul de la pluralité des dimenſions, qui, ſans rendre le calcul plus difficile, le rendroient plus prolixe, au préjudice de la clarté que demande l'explication d'une méthode. J'ajoute que ce même

même cas, tout ſimple qu'il eſt, pourra ſelon toute apparence être celui auquel les autres plus compoſés ſe réduiſent, du moins à l'égard de tout ce qui regarde la loi de la conſervation des forces vives; & je ſuis d'autant plus porté à croire une ſemblable réduction poſſible qu'elle a également & très généralement lieu dans le cas de deux corps, comme je l'ai fait voir dans un Traité intitulé: *Inſigniores orbitæ cometarum proprietates.*

§. 10. Soient donc

les trois corps placés en ligne droite, & en même tems leurs maſſes A, B, C. Qu'on prenne ſur la même ligne un point quelconque G, afin d'y rapporter les diſtances. Le point G pourra, ſi l'on veut, être le centre commun de gravité, & en ce cas chaque diſtance ſe détermine par les deux autres. Soient les diſtances

$$AG = z$$
$$CG = y$$
$$BG = x$$

& en déſignant par $g$ la gravité abſolue, on aura pour un tems $\tau$ quelconque les trois formules différentielles

$$-\mathrm{d}\mathrm{d}z = \left(\frac{C}{(y+z)^2} + \frac{B}{(x+z)^2}\right) g\,\mathrm{d}\tau^2$$
$$-\mathrm{d}\mathrm{d}y = \left(\frac{A}{(y+z)^2} - \frac{B}{(x-y)^2}\right) g\,\mathrm{d}\tau^2$$
$$-\mathrm{d}\mathrm{d}x = \left(\frac{A}{(x+z)^2} + \frac{C}{(x-y)^2}\right) g\,\mathrm{d}\tau^2.$$

§. 11. Comme dans ces formules il y a trois ſortes d'unités, qui ſont celle du tems, celle des maſſes & celle des diſtances, on voit bien que deux de ces unités peuvent toujours être priſes à volonté, & que la troiſieme ſe détermine en ce que ces formules doivent être des équations. Poſons donc

$$gC = M$$
$$gB = N$$
$$gA = P$$

& il ſera

$$-\,dd\zeta : d\tau^2 = \frac{M}{(y+\zeta)^2} + \frac{N}{(x+\zeta)^2}$$
$$-\,ddy : d\tau^2 = \frac{P}{(y+\zeta)^2} - \frac{N}{(x-y)^2}$$
$$-\,ddx : d\tau^2 = \frac{P}{(x+\zeta)^2} + \frac{M}{(x-y)^2}.$$

§. 12. Ces formules ainſi trouvées, il s'agit d'exprimer chacune des diſtances $x, y, \zeta$ par le tems $\tau$. J'ai fait voir ci-deſſus, que cela ne pourra ſe faire que par des ſuites infinies. Il eſt donc clair que la façon la plus courte qui y conduiſe ſera la meilleure. Commençons donc par déterminer quelle ſera la forme de ces ſuites. Comme elles doivent exprimer les diſtances par le tems $\tau$, il eſt clair qu'elles procéderont ſuivant quelques dimenſions de $\tau$. Or je dis

I°. Que le premier terme doit être une quantité conſtante, qui dénote la diſtance initiale qui a lieu pour le tems $\tau = 0$.

II°. Que le ſecond terme doit être le tems $\tau$ multiplié par un coëfficient qui dénote la viteſſe initiale de chaque corps, & qui ſera poſitif quand le corps s'éloigne du point G, lorſqu'il eſt $\tau = 0$.

III°. Que le troiſieme terme doit être le quarré de $\tau$ multiplié par un coëfficient qui exprime l'effet de la gravité ou de la chûte initiale de chaque corps vers les deux autres corps.

On voit par là, que les ſuites qu'il s'agit de trouver procedent ſuivant toutes les dimenſions du tems $\tau$, que les coëfficiens de deux premiers termes de chaque ſuite ſont donnés par l'état initial du ſyſteme, que les coëfficiens des troiſiemes termes ſe définiſſent par la gravitation mutuelle des trois corps, & partant, comme ceux de tous les termes ſuivans, par les formules différentielles.

§. 13.

§. 13. Faiſant donc

$$z = a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3 + e\tau^4 + \text{etc.}$$
$$y = \alpha + \mathfrak{B}\tau + \gamma\tau^2 + \delta\tau^3 + \varepsilon\tau^4 + \text{etc.}$$
$$x = \mathrm{A} + \mathrm{B}\tau + \mathrm{C}\tau^2 + \mathrm{D}\tau^3 + \mathrm{E}\tau^4 + \text{etc.}$$

& par ce que je viens de dire

$a$, $\alpha$, A ſeront les diſtances initiales,
$b$, $\mathfrak{B}$, B les viteſſes initiales,
$c$, $\gamma$, C les chutes initiales.

Afin donc de déterminer les coëfficiens ſuivans, il ne s'agira que de ſubſtituer ces ſuites, comme étant la valeur des diſtances $x$, $y$, $z$ dans les formules différentielles, en poſant $d\tau$ conſtante. Pour cet effet nous aurons d'abord

$$ddz = d\tau^2\,(2c + 6d\tau + 12e\tau^2 + \text{etc.})$$
$$ddy = d\tau^2\,(2\gamma + 6\delta\tau + 12\varepsilon\tau^2 + \text{etc.})$$
$$ddx = d\tau^2\,(2\mathrm{C} + 6\mathrm{D}\tau + 12\mathrm{E}\tau^2 + \text{etc.})$$

Faiſons encore pour abréger

$$\frac{1}{\alpha + a} = m \qquad \mathfrak{B} + b = q$$
$$\frac{1}{a + \mathrm{A}} = n \qquad b + \mathrm{B} = r$$
$$\frac{1}{\mathrm{A} - a} = p \qquad \mathrm{B} - \mathfrak{B} = s$$

& il ſera

$$(z+y) = \frac{1}{m}(1 + mq\tau + m(c+\gamma)\tau^2 + m(d+\delta)\tau^3 + m(e+\varepsilon)\tau^4 + \text{etc.})$$

$$(x+z) = \frac{1}{n}(1 + nr\tau + n(\mathrm{C}+c)\tau^2 + n(\mathrm{D}+d)\tau^3 + n(\mathrm{E}+\varepsilon)\tau^4 + \text{etc.})$$

$$(x-y) = \frac{1}{p}(1 + ps\tau + p(\mathrm{C}-\gamma)\tau^2 + p(\mathrm{D}-\delta)\tau^3 + p(\mathrm{E}-\varepsilon)\tau^4 + \text{etc.})$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{(z+y)^2} = m^2 - 2m^3 q\tau - 2m^2(c+\gamma)\tau^2 - 2m^3(d+\delta)\tau^3 - 2m^3(e+\varepsilon)\tau^4 - \text{etc.}$$
$$+ 3m^4q^2\tau^2 + 6m^4q(c+\gamma)\tau^3 + 6m^4q(d+\delta)\tau^4$$
$$- 4m^5q^3\tau^3 + 3m^4(c+\gamma)^2\tau^4$$
$$- 12m^5(c+\gamma)\tau^4$$
$$+ 5m^6q^4\tau^4$$

$$\frac{1}{(z+x)^2} = n^2 - 2n^3r\tau - 2n^3(C+c)\tau^2 - 2n^3(D+d)\tau^3 - 2n^3(E+e)\tau^4 - \text{etc.}$$
$$+ 3n^4r^2\tau^2 + 6n^4r(C+c)\tau^3 + 6n^4r(D+d)\tau^4$$
$$- 4n^5r^3\tau^3 + 3n^4(C+c)^2\tau^4$$
$$- 12n^5(C+c)\tau^4$$
$$+ 5n^6r^4\tau^4$$

$$\frac{1}{(x-y)^2} = p^2 - 2p^3s\tau - 2p^3(C-\gamma)\tau^2 - 2p^3(D-\delta)\tau^3 - 2p^3(E-\varepsilon)\tau^4 - \text{etc.}$$
$$+ 3p^4s^2\tau^2 + 6p^4s(C-\gamma)\tau^3 + 6p^4s(D-\delta)\tau^4$$
$$- 4p^5s^3\tau^3 + 3p^4(C-\gamma)\tau^4$$
$$- 12p^5(C-\gamma)\tau^4$$
$$+ 5p^6s^4\tau^4.$$

§. 14. Substituant donc ces valeurs dans les formules différentielles, & égalant les termes, on aura les équations suivantes pour les coëfficiens

$$-2c = Mm^2 + Nn^2 \qquad +6d = 2Mm^3q + 2Nn^3r$$
$$-2\gamma = Pm^2 - Np^2 \qquad +6\delta = 2Pm^3q - 2Np^3s$$
$$-2C = Pn^2 - Mp^2 \qquad +6D = 2Pn^3r + 2Mp^3s$$

$$-12e = 3Mm^4q^2 - 2m^3(c+\gamma)M + 3Nn^4s^2 - 2Nn^3(C+c)$$
$$-12e = 3Pm^4q^2 - 2m^3(c+\gamma)P - 3Np^4s^2 - 2Np^3(C-\gamma)$$
$$-12E = 3Pn^4r^2 - 2n^3(C+c)P + 3Mp^4s^2 - 2Mp^3(C-\gamma)$$
etc.

Voilà donc de quelle maniere les coëfficiens des suites proposées se déterminent très directement & comme d'eux-mêmes.

§. 15.

§. 15. Mais, comme j'ai rapporté ce cas particulier du probleme de trois corps, afin de le faire ſervir d'exemple pour tous les autres cas, il conviendra de faire encore là-deſſus quelques remarques générales. La premiere qui s'offre aſſez naturellement, c'eſt que le tems $\tau$ pouvant être pris auſſi grand que l'on voudra, les ſuites trouvées ne ſeront pas convergentes pour une quantité $\tau$ quelconque. On ne pourra donc calculer les diſtances $x$, $y$, $z$, que pour des tems $\tau$ aſſez petits pour que les ſuites trouvées ſoient encore ſuffiſamment convergentes. Ce n'eſt pas cependant que par-là ces ſuites ceſſent d'être d'uſage. Car toute la différence qu'il y a, c'eſt qu'il faut calculer par intervalles. Qu'on prenne p. ex. un tems $t$ ſuffiſamment petit, & on trouvera les diſtances $x, y, z$ répondantes. On trouvera de plus les viteſſes moyennant les mêmes ſuites différentiées,

$$dz : dt = b + 2ct + 3dt^2 + 4et^3 + \text{etc.}$$
$$dy : dt = \mathfrak{C} + 2\gamma t + 3\delta t^2 + 4\varepsilon t^3 + \text{etc.}$$
$$dx : dt = B + 2Ct + 3Dt^2 + 4Et^3 + \text{etc.}$$

Ces nouvelles diſtances & viteſſes étant trouvées, on les ſubſtituera aux précédentes $a$, $\alpha$, A; $b$, $\mathfrak{C}$, B, & par-là on déterminera de nouveau les coëfficiens, afin de pouvoir enſuite déterminer l'état du ſyſteme tel qu'il ſera après un ſecond intervalle du tems. C'eſt ainſi qu'on pourra continuer autant qu'il ſera néceſſaire pour parvenir juſqu'au moment qu'on s'étoit propoſé de calculer.

§. 16. La ſeconde remarque qui s'offre à faire, c'eſt que lorſqu'un des trois corps eſt aſſez petit pour n'avoir point d'action ſenſible ſur les deux autres, ſa maſſe pourra être faite $= 0$, ce qui abrégera de beaucoup la détermination des coëfficiens. Elle ſera pareillement fort abrégée, lorſque dans l'état initial du ſyſteme les trois corps ſont en repos; car alors les viteſſes initiales $b$, $\mathfrak{C}$, B, de même que leurs ſommes ou différences $q$, $r$, $s$, ſont $= 0$, ce qui fera encore diſparoitre les coëfficiens $d$, $\delta$, D, & généralement tous ceux des dimenſions impaires de $\tau$.

§. 17. Tout que je viens de dire aura encore lieu dans les cas où les trois corps ne ſont ni dans une même ligne droite ni dans un même plan. Le calcul n'en ſera ni plus difficile ni plus compliqué, mais bien plus prolixe. Car dans ce dernier cas le mouvement des trois corps doit être décompoſé ſuivant les trois dimenſions de l'eſpace. Par-là au lieu des trois ſuites que nous avons introduites dans le calcul, on y en introduira neuf, ce qui naturellement triplera tout au moins la prolixité du calcul.

§. 18. Il y a cependant des cas où on pourra l'abréger conſidérablement, & ce ſont préciſément ceux qui ont tant fait ſouhaiter la ſolution du probleme de trois corps. Suppoſons, par exemple, les maſſes des trois corps aſſez diſproportionnées pour qu'il n'y ait que le plus petit qui ſoit altéré par le moyen dans le mouvement qu'il auroit autour du grand, ſi le corps mitoyen étoit ſans action. C'eſt le cas d'une Comete troublée dans ſon orbite par l'action de Jupiter. Dans ce cas, le plan de l'orbite de Jupiter ſera mis pour baſe, & le nombre des neuf ſuites que la ſolution générale demande, ſe réduit à cinq. Car il n'en faudra aucune pour le Soleil. Il n'en faudra que deux pour Jupiter, & ces deux ſuites & leurs coëfficiens ſe déterminent indépendamment de la Comete, de ſorte qu'il ne s'agit que de déterminer les coëfficiens des trois ſuites, qui doivent exprimer les abſciſſes & les ordonnées de l'orbite de la Comete. De cette maniere le calcul ne ſera gueres plus long que celui que je viens de donner pour trois corps qui ſe meuvent dans une même ligne droite.

# MÉMOIRES
DE
# L'ACADÉMIE ROYALE
DES
# SCIENCES
ET
# BELLES-LETTRES.

---

*CLASSE*
*DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.*

# CONSIDÉRATIONS

SUR

## CE QU'ON PEUT REGARDER AUJOURD'HUI

COMME LE BUT PRINCIPAL DES ACADÉMIES, ET COMME LEUR EFFET LE PLUS AVANTAGEUX.

PAR MR. FORMEY. (*)

Il eſt aiſé d'enviſager ſous divers points de vue les objets de quelque importance: cela réſulte naturellement de la diverſité des parties qui entrent dans leur compoſition, & de la multitude des rélations qu'ils embraſſent. Comme avec cela chacun a ſa façon de voir, qui varie dans chaque individu, & qui varie d'autant plus que ceux qui conſiderent les choſes ont d'étendue, de pénétration ou de profondeur, dans l'eſprit; de là vient qu'on voit éclorre ſans ceſſe tant d'aſſertions différentes ſur les mêmes choſes, & que ceux qui les produiſent, trouvent les moyens de les juſtifier, ou du moins de les pallier. Quand cela va trop loin, on donne dans les propoſitions hazardées, dans les paradoxes; & ce n'eſt pas le moyen le moins propre à capriver l'attention, à ſe procurer des approbateurs: les hommes ont toujours eu du goût pour ceux qui leur cauſoient de l'étonnement, de la ſurpriſe, & ce goût n'a jamais été plus répandu que dans notre ſiecle. Le Lapon, le Si-

(*) Lû dans l'Aſſemblée publique du 29 Janvier, 1767.

Sibérien, qui eſt tout ſtupéfait à la vue des preſtiges de la Sorcélerie qui domine encore dans ces contrées, ne differe point quant au fond & aux diſpoſitions eſſentielles de l'ame, de ce nombre infini de Lecteurs qui ſe pâment à la lecture des ouvrages de ces Auteurs qu'on peut appeller les Enchanteurs de la Littérature, qui éblouiſſent par la magie de leur ſtyle, qui en impoſent par leur ton fatidique.

Suivant ces obſervations préliminaires, la ſimple lecture du titre de ce Diſcours, n'a pû faire comprendre à quoi je le deſtine, en déterminer exactement l'objet. Il eſt probable même que la plûpart de ceux qui m'écoutent, ont roulé & roulent encore dans leur eſprit, chacun ſa conjecture propre, ſur ce que j'ai en vue, ſur ce que j'ai voulu exprimer, en annonçant des *Conſidérations ſur ce qu'on peut regarder aujourd'hui comme le but principal des Académies, & comme leur effet le plus avantageux.* De ſorte que, ſi, au lieu de me ſuivre dans cette diſcuſſion, chacun partoit de ſon point de vue, & compoſoit un Diſcours d'après ſes propres idées, nous verrions ce qu'on voit tous les jours & ce qu'on a toujours vu, autant de routes différentes ſe tracer, & aboutir à autant de termes, entre leſquels il y auroit ſans doute de l'analogie, mais ſans identité, ni même ſans un grand degré de reſſemblance.

C'eſt ainſi non ſeulement que pluſieurs Orateurs ou pluſieurs Poëtes traitent différemment un même ſujet; mais que les faits, & même les vérités, qui paroiſſent, pour ainſi dire, immodifiables, ne laiſſent pas de recevoir l'empreinte la plus marquée du tour d'eſprit de ceux qui les manient. Le même Héros préſenté par divers Hiſtoriens offre des traits qui varient plus que ceux du pinceau de divers Peintres, ou du ciſeau de divers Sculpteurs, qui voudroient exprimer ſon image. Si vous en doutez, comparez les Plutarque, les Tite-Live, les Salluſte, les Tacite, les Suetone, les Vellejus Paterculus; ou parmi les modernes, les Vertot, les Rollin, les Voltaire, les Duclos, les Raynal, les Coyer: & voyez ſi, chez les premiers, Alexandre, Céſar, Pompée, Auguſte, Caligula même & Neron, chez les autres, Char-

Charles-Quint, Elizabeth, Louis XI, Henri IV, Cromwel & Richelieu, Charles XII & Pierre I, ne ſont pas jettés dans des moules ſi différens, que quelquefois on eſt tenté de les méconnoître. (*)

Il en eſt des vérités comme des faits: à comparer la maniere différente dont les Philoſophes les expoſent, on les trouve ſi diſſemblables qu'on eſt dérouté, & jetté dans le plus grand embarras. Je n'en citerai qu'un exemple, mais récent & frappant. Qu'on liſe Locke ſur les idées & ſur tout ce qui concerne l'Entendement humain, on admirera ſans doute la beauté de ſon génie & la ſagacité de ſes recherches. Mais qu'on prenne enſuite l'ouvrage poſthume de Leibnitz, qui a été publié depuis trois ou quatre ans; qu'on ſuive les obſervations, les critiques ſéveres, mais ſolides, qui mettent au creuſet la doctrine du Philoſophe Anglois, & le plus ſouvent la détruiſent; on ſera ſurpris que la vérité elle-même puiſſe avoir, pour ainſi dire, deux viſages, ſans compter ceux que d'autres lui ont donnés, ſans y joindre les maſques innombrables ſous leſquels on l'a déguiſée.

J'en reviens donc à ce que je diſois; je penſe que vous ne prévoyez pas dans ce moment, ni ne pouvez même prévoir, de quoi j'ai deſſein de vous entretenir. Mon projet n'eſt pas cependant de vous éblouir, ni de vous ſurprendre par quelcun de ces tours de force auxquels on ſe plaît tant aujourd'hui. Je vous propoſerai mon idée avec une parfaite ſimplicité, après vous avoir conduits par la route qui m'y a fait arriver. Vous jugerez en dernier reſſort, ſi la route eſt bonne & l'idée juſte.

Sans remonter à l'origine du mot d'*Académie*, & à ſes diverſes acceptions dans l'Hiſtoire philoſophique des Grecs & des Romains; & après avoir écarté le ſens équivoque qui fait qu'aujourd'hui on donne quel-

(*) On pourroit généraliſer le jugement particulier que Strabon, Liv. XI. porte de ceux qui ont écrit l'Hiſtoire d'Alexandre: *Pleriſque eorum, qui de Alexandro ſcripſerunt, credere non eſt ſatis tutum.*

quelquefois aux Univerſités le nom d'Académies: j'entens par celles-ci les Sociétés ou Compagnies de gens de lettres, établies pour la culture & l'avancement des Sciences. Je n'y comprens pas les Académies qu'on nomme des Arts; à plus forte raiſon celles qui ont pour objet les exercices du corps. Ces établiſſemens entreroient plutôt dans la notion des Univerſités, &, entant qu'Ecoles, peuvent en être regardés comme des dépendances. Et quant aux Belles-Lettres, ſoit qu'on les joigne aux Sciences, ou qu'on en faſſe un objet ſéparé & le partage d'une Académie diſtincte de celle des Sciences, je les reſtrains à leurs parties théorétiques & didactiques; j'en exclus tout ce qui ne ſert qu'à des amplifications & à l'ornement des ſujets, ſans contribuer à l'étendue & à la netteté de nos connoiſſances.

Je ne ferai pas remonter fort haut la naiſſance des Académies, telles que je viens de les définir. Quand on auroit la complaiſance de qualifier ainſi la Société de gens de lettres que Charlemagne établit par le conſeil d'Alcuin, je n'y verrois qu'une ombre & une ébauche très imparfaite des Académies modernes. Je ſais que ce Prince fit choix des plus beaux Génies de ſon Empire, & qu'il ne dédaigna pas d'être leur Confrere. C'eſt aſſurément tout ce qu'il pouvoit faire; mais, ce qui étoit impoſſible pour lui, c'étoit de créer des objets propres à occuper une Académie, & de rendre ſes Académiciens capables de les traiter. Auſſi que faiſoient-ils? Ils choiſiſſoient quelque ancien Auteur, le liſoient, & rendoient compte de leurs lectures, chacun prenant le nom de l'Auteur qu'il affectionnoit le plus. *Alcuin* choiſit celui de *Flaccus* par goût pour *Horace*; un jeune Seigneur, nommé *Angilbert*, prit celui d'*Homere*; *Adelard*, Evêque de Corbie, ſe nomma *Auguſtin*; *Riculphe*, Archevêque de Mayence, *Dametas*; & l'Empereur lui-même *David*. Or faites-vous une idée des Conférences académiques que pouvoient avoir enſemble Homere & Horace, S. Auguſtin & David; car pour Dametas, je n'ai pas l'honneur de le connoître. Auſſi les ſiecles de fer & de plomb ſuccéderent-ils à ces fauſſes lueurs de ſavoir.

Je

Je ne puis m'empêcher de vous produire un échantillon du ton qui régnoit alors dans les converſations des Savans, appellés à la Cour, où ils avoient l'honneur d'approcher des plus grands Princes, de vivre familierement avec eux, & de leur faire paſſer, de l'aveu de ces Princes mêmes, les meilleurs momens de la vie. Conrad III, Empereur d'Allemagne, mort à la Diete de Bamberg, le 13 de Fevrier, 1152, avoit des connoiſſances & du goût pour les Lettres. Pierre Diacre, Moine du Mont-Caſſin, lui dédia un Ouvrage qu'il avoit fait ſur les abbréviations, fort en uſage dans l'ancienne écriture; & dans ſa Dédicace, il exalte beaucoup les ſoins que ce Prince ſe donnoit pour former une Bibliotheque, & pour raſſembler en particulier tout ce qui regardoit les Livres Sacrés. On s'entretenoit beaucoup de Littérature à ſa table. L'Abbé *Guibald*, qui y occupoit une place diſtinguée, & comme Savant, & comme Homme d'Etat, rendoit compte d'une de ces converſations à un de ſes correſpondans, (*ad Mangoldum, Magiſtrum Scholæ,*) & voici ſes propres termes. *Mirabatur Dominus noſter, Conradus Rex, quæ a literatis veſtris dicebantur, & probari non poſſe hominem eſſe aſinum, ajebat. Dicebam ei hoc in rerum natura non poſſe fieri, ſed ex conceſſione indeterminata naſcens a vero mendacium falſa concluſione adſtringi. Cum non intelligeret, ridiculo eum ſophiſmate adortus ſum. Unum, inquam, habetis oculum? quod cum dediſſet, duos, inquam, oculos habetis? quod cum abſolute annuiſſet: unus, inquam, & duo tres ſunt; ergo tres oculos habetis. Captus verbi cavillatione jurabat, ſe tantum duos habere; multis tamen & his ſimilibus determinare doctus, jucundam vitam dicebat habere litteratos.* Quelcun pourroit-il bien évaluer à quelle diſtance l'eſprit humain étoit alors du point auquel nous le voyons parvenu?

Tranſportons-nous donc tout d'un coup à une Epoque plus lumineuſe; mais n'inſiſtons pas ſur celle du renouvellement des Lettres, lorſque les Grecs chaſſés de Conſtantinople ſe répandirent dans l'Occident, où ils ne firent que des éleves ſemblables à eux, des Critiques & des Littérateurs. Ce qu'on appelloit alors Philoſophie, en étoit

les vrayes antipodes. Un exemple pourra tenir ici lieu de tous les autres. (*) C'eſt celui de ce Pic de la Mirandole qui fit tant de bruit dans ſon ſiecle, & qui certainement ne le méritoit gueres. C'étoit un homme à qui la lecture des Scholaſtiques, & peut-être auſſi les louanges des flatteurs qui ne manquent jamais aux Grands, avoient gâté l'eſprit. Il croyoit être inſtruit & pouvoir répondre *de omni re ſcibili.* Faut-il d'autre titre pour avoir droit d'être logé aux petites maiſons? Il vouloit réfuter l'Alcoran ſans ſavoir l'Arabe. Il vouloit accorder Platon & Ariſtote; Saint Thomas & Scot; apprécier toutes les Sectes, toutes les Religions; concilier tous les Théologiens & tous les Philoſophes. Cela finit par vouloir de Prince devenir Moine. Belle péroraiſon & digne de l'exorde!

Paſſons donc à l'Epoque du véritable rétabliſſement des Sciences, de la renaiſſance, ou pour dire l'exacte vérité, de la naiſſance de la Philoſophie, qui me paroit être ſortie du cerveau de Deſcartes, comme Pallas de celui de Jupiter. Oui, c'eſt ce grand homme qui a appris aux mortels à penſer, à raiſonner, à ſe dégager de l'ornière fangeuſe où des Maîtres auſſi durs qu'imbécilles les trainoient, pour entrer dans la route du Vrai, & y marcher à l'aide de leurs propres forces, de leur ſeul génie. Je ſuis diſpenſé de m'étendre ici ſur cette révolution, la plus intéreſſante, à mon avis, qui ſoit jamais arrivée. Vous avez ſans doute lû la plûpart des Eloges de Deſcartes qui ont paru depuis peu, & ſurtout celui dont l'Auteur n'auroit été récompenſé qu'à demi, ſi l'Académie qui avoit partagé le prix, ne venoit de le dédommager de ce partage, en lui donnant la préférence ſur ſes compétiteurs à la place d'Académicien; gain pour cette Compagnie qui ſera une perte pour le Public, à qui il étoit plus avantageux de voir M. Thomas comme Athlete dans la lice, qu'aſſis parmi les Juges.

Mais c'eſt de Deſcartes qu'il s'agit; & je ne fais point de difficulté de dire qu'il eſt le véritable pere des Académies, parce qu'il eſt inconteſtablement le pere de la ſaine Philoſophie & de l'eſprit philoſophi-

(*) *Longueruana* p. 214.

phique. Il eſt à la vérité dans le cas de ces Docteurs dont il vaut mieux ſuivre les préceptes que d'imiter la conduite; mais je ne parle auſſi que des préceptes, & je maintiens que leur prix & leur efficace ſont d'une évidence inconteſtable. Ecoutez M. Thomas: c'eſt à lui qu'il appartient de décrire dignement la grande influence de ce puiſſant génie ſur les eſprits & ſur les ſiecles. „C'eſt ici, dit-il, le vrai triomphe „de Deſcartes. C'eſt là ſa grandeur. Il n'eſt plus; mais ſon eſprit „vit encore. Cet eſprit eſt immortel, il ſe répand de Nation en Na„tion & de ſiecle en ſiecle. Il reſpire à Paris, à Londres, à Berlin, „à Leipſig, à Florence. Il pénétre à Petersbourg; il pénétrera un „jour juſques dans ces climats où le genre humain eſt encore ignorant „& avili: peut-être qu'il fera le tour de l'Univers."

Je vais plus loin encore; & je dis que les erreurs, les écarts de Deſcartes ont mieux conduit à l'érection des Académies que ſa méthode & ſes maximes de raiſonnement. D'abord l'admiration qu'il excita, la reconnoiſſance pour ſes bienfaits ſignalés, firent qu'on l'écouta comme un Oracle, qu'on lui accorda cette confiance aveugle qu'il étoit venu bannir de l'eſprit humain. On devint Cartéſien comme on avoit été Péripatéticien; peut-être auſſi parce qu'on avoit encore le plî de la ſujettion, le caractere ſervile: à peu près comme les Réformateurs ont été intolérans parce qu'ils ſortoient du ſein d'une Egliſe intolérante. Mais peu à peu les yeux s'ouvrirent; on comprit que Deſcartes pouvoit ſe tromper; on vit qu'il s'étoit trompé effectivement: & je date de là une ſeconde révolution, entée, pour ainſi dire, ſur la premiere, qui n'auroit pas eu lieu ſans doute ſi la premiere n'avoit précédé, mais qui ne laiſſe pas d'être beaucoup plus importante, & la ſeule déciſive; celle par laquelle tout bon eſprit, tout vrai Philoſophe, ne porte plus le nom d'aucun Maître, d'aucune Secte; mais, après avoir ſuffiſamment examiné, mûrement comparé, toutes les doctrines, en adopte une, parce qu'il la trouve vraye, ou s'en forme une en réuniſſant ce qu'il a trouvé de ſolide dans le cours de toutes ſes études, & par la voye de ſes propres recherches.

Quand je dis que les choſes ſont ainſi, un ſcrupule m'arrête; & je devrois plutôt dire qu'on les croit ſur ce pied, qu'on s'en flatte & qu'on s'en vante, comme de tant d'autres prérogatives, dans leſquelles il entre plus d'illuſion que de réalité. Non, l'affranchiſſement de l'eſprit humain n'eſt rien moins que décidé: le nombre de ceux qui aiment à voir de leurs propres yeux, à faire uſage de leur eſprit & de leur raiſon, demeure toujours le plus petit. S'il n'y a plus de Carteſiens, on a vu depuis eux des Newtoniens, des Leibnitiens, des Wolfiens même; & qui ſait ce que l'on verra encore! Mais il ſuffit qu'il y ait eu depuis Deſcartes ce qui n'avoit pas exiſté avant lui, un certain nombre de Génies ſupérieurs, qui ont défriché & mis en valeur des portions incultes du domaine philoſophique; domaine qui s'étend & ſe fertiliſe de jour en jour, ſans qu'il y ait perſonne qui puiſſe, ni qui oſe, s'y arroger aucun droit deſpotique. Je dirois preſque qu'on y voit à préſent l'image du Gouvernement féodal, ſans y en rencontrer les inconvéniens. Chacun eſt Seigneur ſuzerain de ſes propres découvertes; & le titre authentique de cette propriété ſe tranſmet aux races futures. Rien de plus encourageant que cette forme de gouvernement; la Vérité ſeule regne: c'eſt aux pieds de ſon Thrône qu'on porte toutes les conquêtes, qu'on dépoſe tous les tréſors: elle en regle la diſtribution, elle décide de la mouvance de tous les fiefs.

Il n'y a donc point d'homme à préſent, qui, après avoir acquis les connoiſſances préalables néceſſaires, ne puiſſe travailler pour ſoi en fait de Philoſophie, & recueillir immédiatement le fruit de ſon travail. La Sageſſe n'habite plus le Lycée, ni le Portique, encore moins ces Ecoles poudreuſes, où, pendant ſi longtems, le fantôme qui avoit uſurpé ſon nom & ſa dignité, transforma ſon ſceptre en une vraye marotte. Elle eſt dans le cabinet de chaque Philoſophe; elle s'y plaît à proportion de l'application qu'on lui conſacre, & des progrès qu'on y fait. N'exiſtât-il qu'un ſeul de ces Cabinets, il ſeroit le Palais de la Philoſophie, le Sanctuaire de la Vérité. Quelle douceur! quelles délices! au prix de l'aridité & de la tyrannie de tout ce qu'on nommoit autrefois étude & ſcience!

Ce-

Cependant les hommes aiment les aſſociations, ſoit par le goût naturel & général qu'ils ont pour la ſociété, ſoit par la connoiſſance du profit qu'on peut retirer des forces réunies & des travaux combinés. De là tous les Etats, toutes les villes, les bourgades, les hameaux; de là les Corps & les Compagnies, qui, de tout tems, ont formé des entrepriſes de concert. Celle de cultiver ainſi les Sciences n'eſt pas de premiere néceſſité; & l'on peut jouir des principaux agrémens de la vie ſans la former, ni même ſans en avoir l'idée, comme le prouve l'expérience de la plûpart des tems & des lieux. Cependant, dès que l'eſprit humain eſt développé juſqu'à un certain point, & a fait certains progrès, il a ſes beſoins & ſes plaiſirs à part; il lui faut des alimens dont l'uſage devient preſque indiſpenſable; & il cherche avec empreſſement les moyens de ſe les procurer. On a cru en trouver un fort convenable, en faiſant un dépôt commun des connoiſſances acquiſes par un certain nombre de perſonnes, qui ſe rendent des ſervices réciproques dans cette acquiſition. Depuis un ſiecle, à dater de l'origine de la Société Royale de Londres, l'une de celles, ſelon moi, qui ont le plutôt ſaiſi & le mieux ſuivi le véritable objet de ces établiſſemens; vous ſavez mieux que moi, Meſſieurs, tout ce qui s'eſt fait, c'eſt à dire, à la lettre plus qu'on n'avoit fait en quarante ſiecles que comprend à peu près l'Hiſtoire philoſophique. De grands Princes ont beaucoup contribué à ces rapides progrès & à ces glorieux ſuccès, par leur protection & par toutes ſortes d'encouragemens. Nous en avons un à notre tête qui a plus fait encore, en y joignant ſon exemple; de ſorte que, s'il n'étoit pas notre Protecteur, il ſeroit Académicien né, le premier de nos Confreres.

Je ferois ſcrupule de répandre des ombres ſur ce riant tableau, & de montrer, comme il ne me ſeroit que trop aiſé de le faire, qu'il s'en faut bien que les Académies ayent, ni au dedans l'agrément, ni au dehors l'utilité, qu'on pourroit s'en promettre. Au fonds les cauſes que j'en alléguerois, ſont moins dans les Académies mêmes, que dans les hommes, dans le cœur humain. La concorde & l'union ſont ra-

res:

res: elles ſuppoſent une franchiſe, une cordialité, des ſentimens qui n'exiſterent jamais dans la plûpart des individus, & que l'envie & la jalouſie, l'orgueil & l'interêt, étouffent plus ou moins dans les autres. Il faudroit d'ailleurs, pour que des Académiciens ſe prêtaſſent mutuellement tous les ſecours qu'ils peuvent & doivent ſe fournir, qu'au lieu de ces lectures, rarement intéreſſantes, ou qui ne le ſont jamais que pour le plus petit nombre des aſſiſtans, & cela en ſuppoſant qu'ils y prêtent une attention dont à peine ſauve-t-on quelquefois les apparences; il faudroit que chaque diſcours n'offrît rien qui ne pût être ſaiſi, au moins dans ſes réſultats, par ceux qui l'entendent, & qu'enſuite on fît ſur ce qui a été lû des remarques judicieuſes & décentes. Mais, à parler franchement, il n'y a preſque point de Savans qui ſachent exercer la critique, & il y en a moins encore qui ſachent la ſoutenir. Je me rappelle à ce ſujet une anecdote que je tiens de M. de Maupertuis. L'Abbé Gedoyn, connu par ſes belles Traductions, demanda à l'Académie Françoiſe la permiſſion de lui lire dans ſes Aſſemblées ordinaires celle de Quintilien à laquelle il travailloit, & pria qu'on lui fît part des remarques qui ſe préſenteroient. Il commença en effet; mais il ne put aller au delà de la ſeconde lecture, en partie excédé par les obſervations vétilleuſes de ſes Confreres, en partie trop vif & trop ſenſible pour ſavoir ſe rendre de bonne grace toutes les fois que le cas l'exigeoit. Je ne vois point de remede à ces inconvéniens, parce que je n'ai point de ſecret pour refondre l'homme.

Mais j'abrege; & laiſſant l'homme tel qu'il eſt, je me livre à une idée de ſpéculation, qui eſt permiſe dans toutes les eſpeces du genre auquel mon ſujet appartient. Je ſuppoſe les Académies auſſi parfaites qu'elles pourroient l'être, compoſées de Membres éclairés, judicieux, impartiaux, unis enſemble par les liens de l'eſtime & de l'amitié; & je demande, quel eſt le plus grand avantage qui puiſſe réſulter de leurs efforts réunis? C'eſt toujours ma Queſtion originaire. Je diſtingue; & comme dans l'énoncé de cette queſtion, j'ai ajouté le mot d'*actuel* à celui d'*avantage*, je remonte d'abord au premier bien

que

que les Académies étoient appellées à faire dans leur inſtitution même, au ſiecle où elles ont été fondées: & ce ſiecle, comme nous l'avons inſinué, ne remonte pas plus haut que le précédent.

L'ennemi qu'elles avoient en tête, & dont la défaite faiſoit la matiere de leurs triomphes, c'étoit l'ignorance. Mais quelle ignorance! Je ſaiſis de nouveau ici deux points de vue. D'abord celui de l'ignorance privative, de cet état dans lequel on ne ſçait rien, parce qu'on ne veut rien ſavoir, & qu'on mépriſe les ſciences. Qu'on ſe rappelle quels ont été les préjugés à cet égard; nous les avons vûs, je parle de ceux d'entre nous dont la carriere eſt à ſon déclin, nous les avons vûs encore aſſez fortement enracinés; & je ne ſai ſi on peut les regarder comme pleinement détruits. Le ſavoir étant regardé comme ſynonyme de la pédanterie, tous ceux qui aſpiroient à quelque genre de diſtinction, auroient cru s'avilir, contracter une eſpece de rouille, de craſſe, en devenant érudits, en ſe mettant au fait des notions de la Grammaire, de la Logique, de tout ce qu'on enſeigne dans les Colleges, dans les Univerſités. Les Nobles ne connoiſſoient point de dérogeance plus marquée que celle de ſavoir quelque choſe. Les Militaires enchériſſoient ſur eux: à leur avis on ne pouvoit bien manier l'épée qu'en foulant aux pieds la plume. Le Connêtable Anne de Montmorenci, qui a fait une ſi grande figure ſous pluſieurs Regnes, l'un des plus illuſtres perſonnages de cette Maiſon qui ſe gloriſie du titre de premier Baron Chrêtien, étoit un Cacique, ou pis encore, un vrai Chef de Sauvages, dur, barbare, ignorant juſqu'à avoir peine à ſigner ſon nom. Le ſexe n'auroit fourni alors à Moliere, ni Précieuſes ridicules, ni Femmes ſavantes: il avoit des graces, il avoit du génie, cela ne lui a jamais manqué; mais il n'avoit point de connoiſſances proprement dites. J'en atteſte les Cours de Catherine de Médicis, de Henri IV, de Louis XIII, & même de Louis XIV. Dans celles-ci Meſdames de Sévigné & de Maintenon ne peuvent être regardées que comme des femmes prodigieuſement ſpirituelles; & Madame Des-Houlieres, la Comteſſe de la Suze, & quelques autres qui ont excellé

en divers genres de Poéſies délicates & galantes, ne changent rien à ma theſe. Quelcune s'émancipoit-elle au delà de ces bornes? Boileau, quoiqu'injuſte dans les traits de ſatyre qu'il a décochés à ce ſujet, & même d'une ignorance groſſiere dont je prens auſſi acte, ne laiſſoit pas de ſe monter au ton du ſiecle en voulant imprimer du ridicule à la Dame que Roberval fréquentoit. Il reſte peut-être à décider, s'il n'auroit pas mieux valu, & ne vaudroit pas mieux encore par rapport au ſexe, qu'il fût demeuré en deçà par rapport au ſavoir que d'aller au delà de certaines bornes, qu'on peut regarder comme circonſcrites par l'eſprit, le goût, la fineſſe du ſentiment, l'élégance du ſtyle, le langage des paſſions, l'expreſſion du cœur. Pour l'ordinaire la délicateſſe des organes n'en permet pas davantage; les agrémens de la ſociété, les beſoins de la vie, le bien des familles, en exigent encore moins.

Ne diſſimulons rien. Louis XIV l'objet de tant d'admirations, la matiere de tant d'éloges, l'Apollon & l'Auguſte de ſon ſiecle, avoit un grand ſens, mais il ne ſavoit rien de rien. Son frere, Philippe Duc d'Orléans, parloit perpétuellement ſans rien dire. Il n'a jamais eu au monde de Livre que ſes Heures, que le Jay, ſon Maître de Chapelle, & en même tems ſon Bibliothécaire portoit dans ſa poche. Colbert, ce grand Miniſtre, n'étoit pas plus Mécene que ſon Maître étoit Auguſte. Il étoit guidé dans ſes diſtributions par des ſots, ou par ſa vanité qui ſe ſentoit flattée de ſe faire louer à trois cens lieues de lui. Les Tallemans, les Chapelains, les Caſſagnes, les Boyers & les le Clerc étoient ſes illuſtres. Son Abbé Gallois n'eſtimoit que le Grec. Son Bibliothécaire Baluze n'excelloit qu'à lire de vieux parchemins. Tous ces gens-là ne cherchoient qu'à faire valoir leurs amis. Pendant ce tems des Savans du premier ordre mouroient de faim; Patru, le Dictateur de l'Eloquence Françoiſe, le Fevre de Saumur, le plus habile Littérateur & Critique de ſon tems, Bouillaud & Auzoot auſſi verſés dans les Mathématiques & dans la Phyſique qu'on pouvoit l'être alors, & bien d'autres. N'avois-je pas raiſon, Meſſieurs, de vous dire d'entrée que les mêmes objets offrent des points de vue bien diffé-

différens, & ſouvent bien oppoſés. J'avoue cependant que l'ignorance diminuoit alors à vue d'œil, & qu'en paſſant par des nuances & des dégradations inſenſibles, elle tendoit au ſavoir.

Recherchons à préſent d'où venoit cet éloignement pour la ſcience, cet attachement à l'ignorance privative. Changez de poſition, & vous trouverez la raiſon du fait dans ce que je crois pouvoir nommer l'ignorance poſitive, dans le faux ſavoir. Les ſubtilités, les obſcurités, les puérilités de toutes les doctrines, ſans en excepter la plus ſainte de toutes, ou même en la regardant comme la plus radicalement viciée, avoient tellement dégoûté le reſte des humains de l'étude qu'on ne peut bonnement leur en faire un reproche. Ouvrez les Livres du Maître des ſentences & de tous les Docteurs de la même trempe; & voyez ſi de pareils Ouvrages ne tomboient pas néceſſairement des mains de ceux qui y jettoient les yeux, & ne leur inſpiroient pas même une ſorte de frayeur. Suivant le Poëte Satyrique, l'homme eſt bien au deſſous de l'âne; mais le docteur étoit alors fort au deſſous de l'homme. Cela me rappelle la plaiſanterie du Libraire Hollandois, qui, faiſant la Table d'un Boileau, y mit: DOCTEUR. Voyez ANE.

Dans le grand nombre il y avoit ſans contredit quelques Docteurs eſtimables; mais je ne puis mieux faire ſentir la différence que le tems mettoit entr'eux qu'en comparant deux hommes qui ſe touchent, & dont l'un a ſuccédé immédiatement à l'autre; ce ſont les deux premiers Sécretaires de l'Académie des Sciences de Paris, Mrs. du Hamel & de Fontenelle. M. du Hamel étoit certainement ce qu'on pouvoit être de mieux de ſon tems: encore faut-il remarquer qu'il avoit vu l'aurore du jour Cartéſien, & qu'il avoit ſû en profiter. Mais quelle différence de lui à M. de Fontelle, inondé, pour ainſi dire, de tout l'éclat d'un ſiecle de lumiere, & y rayonnant lui-même avec la plus grande force, quoiqu'avec la petite tache d'être mort Cartéſien, peut-être parce que, ſans le ſavoir, & quoique l'Avocat, le Héraut des modernes, il étoit encore un peu ancien.

Dans cette fermentation des eſprits, de quoi s'agiſſoit-il? D'inſpirer aux uns le goût du vrai ſavoir, & de porter les autres, choſe bien plus difficile! à l'abjuration du faux ſavoir. Après le flambeau allumé & préſenté par Deſcartes, rien n'étoit plus propre à produire ces heureux effets, & ne les a mieux produits en effet, que l'établiſſement des Académies. Quand on a vu des gens d'élite, parmi leſquels il n'a pas tardé de s'en trouver de très diſtingués par leur naiſſance & par leurs dignités, ſe dévouer à l'étude; & ſans prendre ni robe, ni bonnet, ſans aller s'enrouer ſur les bancs d'aucune Ecole, s'abſorber dans les ſciences, dans celles en particulier, qui, vers la fin du ſiecle paſſé, acquirent par un jet imprévu, ſi je puis m'exprimer ainſi, tant de hauteur; quand on les a vûs en faire leurs délices, y chercher leur gloire; on a d'abord eu peine à en croire ſes yeux, mais de l'étonnement on a bientôt paſſé à l'admiration, de l'admiration à l'imitation: & je ſerois tenté de craindre qu'on ne ſe ſoit jetté, ou qu'on ne vienne à ſe jetter, dans l'extrémité oppoſée. Les places d'Académicien ſont devenues des brevets d'honneur, qui figurent avec ceux des Maréchaux & des Miniſtres, qui ſont même recherchés, nous en avons un ſouvenir bien récent & bien gracieux, par des Princes, par des Héros, que la Renommée exalte, que la Gloire couronne.

Quelle révolution, Meſſieurs! Et ne ſommes-nous pas excuſables de l'enviſager avec quelque complaiſance? L'ignorance n'a plus d'autre partage que le mépris & la honte: le faux ſçavoir d'autre azyle que ces contrées où le ſyſteme monachal le protege. Partout ailleurs, juſqu'aux glaces du Pole, les Académies ſont des Capitales des ſciences dont on ne croit pas que les Capitales des Empires doivent ou même puiſſent être dépourvues. Il me ſemble déjà les voir traverſer le détroit tant cherché & à la découverte duquel il ſemble qu'on touche, celui qui ſépare l'Europe de l'Amérique, & procurer à notre Globe un avantage, dont le Soleil lui-même, quoique pere du jour, ne ſauroit le faire jouir, c'eſt d'avoir ſes deux Hémiſpheres éclairés à la fois.

Que

Que reſte-t-il donc à faire aux Académies? Quelle eſt leur tâche actuelle, leur but principal, & leur effet le plus avantageux dans les circonſtances où nous nous trouvons? C'eſt ce que je devrois vous dire à préſent, Meſſieurs, ſi ce diſcours n'avoit peut-être été déjà trop long, & ne vous avoit privés du plaiſir d'en entendre d'autres plus propres à captiver votre attention. Permettez-moi donc de m'arrêter, en vous promettant un ſecond Diſcours pour l'Aſſemblée publique prochaine, ſi la Providence le permet: & que celui-ci finiſſe par les vœux dont ces murs doivent retentir dans le jour ſolemnel que nous célébrons.

Que FRÉDERIC vive! Que ſa gloire aille toujours en croiſſant! Que ſon Académie ſe rende de plus en plus digne de la célébrer!

SUR

# L'USAGE

DU

# PRINCIPE DE LA RAISON SUFFISANTE DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS.

PAR M. BÉGUELIN. (*)

## I.

J'ai montré dans un Mémoire précédent que la doctrine des probabilités étoit uniquement fondée sur le principe de la raison suffisante; il ne seroit donc pas surprenant que les Mathématiciens ne fussent pas d'accord entr'eux dans la solution des problemes qui ont la probabilité pour objet; leurs calculs sont de vérité nécessaire, mais la nature du sujet auquel ils les appliquent ne l'est pas. Les vérités contingentes ne peuvent être démontrées qu'en partant d'une supposition; & quelque plausible qu'une supposition soit, elle n'en exclut pas nécessairement d'autres, qui peuvent servir de base à d'autres calculs, & donner par conséquent des résultats différents.

Un illustre Auteur, Géometre & Philosophe à la fois, a publié depuis peu sur le Calcul des probabilités, des doutes & des questions bien dignes d'être approfondies; il insinue cependant qu'un grand Géometre ne les a pas jugées telles; le fait ne m'est point connu, & j'ignore également ce qui pourroit fonder ici la diversité de sentiment entre deux Géometres de cet ordre. D'ailleurs il me conviendroit mal d'entreprendre la décision de cette dispute; je dois dire avec Palémon:

*Non noſtrum inter vos tantas componere lites.*

Ce

(*) Lû à l'Académie le 14 Janvier 1768.

Ce que je me propoſe ici, c'eſt ſimplement d'eſſaïer juſqu'où les principes métaphyſiques peuvent aider à éclaircir les doutes, & à réſoudre les queſtions propoſées ſur le Calcul des Probabilités.

II. Pour éviter toute ambiguité ſur ce ſujet, diſtinguons d'abord la poſſibilité d'un événement de ſa probabilité. Toute combinaiſon qui n'implique pas contradiction eſt poſſible, & comme on ne ſauroit impliquer à demi, toutes les combinaiſons poſſibles ſont également poſſibles; ce n'eſt qu'improprement qu'on diroit d'un événement poſſible, qu'il eſt plus ou moins poſſible qu'un autre; il n'y a point de milieu, ni de degrés à concevoir, entre ce qui peut exiſter, & ce qui répugne à l'exiſtence.

Mais la ſimple poſſibilité ne ſuffit pas pour donner l'exiſtence à un événement; il faut de plus qu'il y ait une raiſon ſuffiſante qui détermine l'événement à être plutôt celui qu'il eſt, qu'un des autres également poſſibles: & c'eſt ici que commence la probabilité.

III. Dans un événement quelconque, il y a encore trois choſes à diſtinguer qui peuvent être confondues. 1°. ſa néceſſité; 2°. ſa probabilité, & 3°. ſon actualité. Chacune de ces trois choſes a ſa raiſon ſuffiſante; mais il n'y a que celle de la ſeconde qui ſoit à proprement parler le fondement du calcul des probabilités. La raiſon ſuffiſante de la néceſſité d'un événement, c'eſt l'impoſſibilité de l'événement contraire: s'il n'y a que des billets noirs dans la roue de fortune, il eſt néceſſaire que le billet qui ſortira ſoit noir. La raiſon ſuffiſante de la probabilité d'un événement, c'eſt la prépondérance des raiſons de s'attendre à cet événement ſur celles de s'attendre à l'événement contraire; s'il y a dans la roue quatre vingt dix neuf billets blancs, & un ſeul billet noir; il y a quatre vingt dix neuf raiſons contre une de s'attendre que le billet qu'on tirera au hazard ſera blanc. Enfin la raiſon ſuffiſante de l'actualité d'un événement, c'eſt le concours actuel des cauſes phyſiques & mécaniques capables d'amener

ner cet événement-là. Or, comme on ſuppoſe non ſeulement que l'exiſtence de ce concours de cauſes ne dépend pas de notre volonté, mais de plus que nous ne ſaurions le démêler lors même qu'il exiſte, il eſt évident que nous ne connoiſſons point la raiſon ſuffiſante de l'exiſtence d'un événement qu'on nomme fortuit; & qu'il peut par conſéquent être contraire à celui que nous avions une raiſon ſuffiſante d'attendre, c. à d. de regarder comme le plus probable. Mais il eſt évident auſſi que l'oppoſition entre l'événement & le calcul qui l'annonçoit, n'affoiblit point la ſolidité des principes du calcul. Ces principes ne conduiſent qu'à déterminer quel eſt l'événement le plus probable, abſtraction faite des cauſes phyſiques & mécaniques imperceptibles qui doivent concourir à déterminer ſon exiſtence.

IV. Si le calcul des probabilités n'eſt pas fondé ſur les cauſes phyſiques qui amenent l'événement, il ne l'eſt pas non plus ſur les caprices du hazard qu'on imagine préſider à la naiſſance des événemens d'une certaine eſpece. Les biſarreries du hazard ne ſauroient donner la moindre priſe au calcul, & le plus habile analyſte ne pourra jamais dire, ni ce que le ſort produira, ni même ce qu'il eſt probable qu'il voudra produire; il y a une répugnance parfaite entre l'idée du hazard & celle de la probabilité; la derniere ſuppoſe quelque principe fixe, l'autre exclut tout principe. On peut prédire infailliblement l'effet d'un agent mécanique ſoumis à des loix immuables; on peut prévoir probablement l'action d'un être intelligent qui ſuit les loix de ſa nature; mais on ne devinera jamais avec le moindre degré de vraiſemblance l'opération d'un être qui ne ſeroit dirigé par aucune eſpece de loi, ni phyſique, ni morale, ni néceſſaire, ni contingente. (*) Le Calcul des probabilités prend donc un milieu entre l'arbitraire fortuit, & la néceſſité phyſique; il décide quel ſera l'événement, non entant qu'il eſt dirigé par le hazard, non entant qu'il eſt déterminé par les cauſes méca-

(*) - - - - - - *Incerta hæc ſi tu poſtulet*
*Ratione certa facere, nihilo plus agas,*
*Quam ſi des operam, ut cum ratione inſanias.* TER. EUNUCH.

mécaniques, mais en le ſuppoſant preſcrit par les loix de la convenance, par l'équité d'un juge impartial. Si entre cent cas poſſibles, & également probables, il n'y en a qu'un qui me faſſe gagner cent Ecus, & quatre vingt dix neuf qui ne me feront rien gagner, il y a 99. à parier contre 1. que je ne gagnerai pas. Pourquoi dit-on dans ce cas-ci, que la probabilité que j'ai de gagner vaut préciſément un Ecu tandis qu'il eſt très poſſible que je gagne cent écus, & qu'il eſt abſolument impoſſible que j'en gagne un? C'eſt qu'on ne calcule pas ce que le hazard fera, mais ce qu'il devroit faire s'il diſtribuoit ſes faveurs avec une exacte impartialité.

V. Après ces éclairciſſemens prèliminaires, la premiere queſtion qui ſe préſente à réſoudre, c'eſt de ſavoir *ſi les événemens ſimmétriques & réguliers, attribués au hazard, ſont (toutes choſes d'ailleurs égales) auſſi probables que les événemens qui n'ont ni ordre ni régularité, & au cas qu'ils aient le même degré de probabilité, d'où vient que leur régularité nous frappe, & qu'ils nous paroiſſent ſi ſinguliers?*

Choiſiſſons d'abord un exemple propre à éclaircir ce ſujet:

Je jette ſur la table ſix dez, A, B, C, D, E, F. Il y a préciſément 46656 combinaiſons poſſibles; ainſi, quelque combinaiſon que j'amene, il y avoit 46655 à parier contre 1, qu'elle ne viendroit pas au premier coup. Mais comme malgré cette probabilité qui ſemble exclure ſucceſſivement chaque combinaiſon particuliere, il faut néceſſairement qu'il en vienne une, ſi j'amene par ex. la combinaiſon A 2, B 5, C 3, D 4, E 3, F 1, perſonne n'en marquera la moindre ſurpriſe, ſi au contraire j'amene au premier coup rafle de ſix, ou de cinq, etc. on ſe récriera ſur la ſingularité du cas. Il y a plus, c'eſt que ſi l'on jette ces ſix dez 46656 fois de ſuite, il y a une raiſon ſuffiſante de s'attendre que chaque combinaiſon particuliere paroitra une fois en 46656 coups; & j'avoue que je ne vois rien qui doive exclure les rafles de leur droit d'être compris dans cette probabilité. Cependant il eſt certain que le coup quel qu'il ſoit qui les aménera paroitra toujours extraordinaire, tandis que leur excluſion n'étonnera jamais.

Il y a deux raiſons, ce me ſemble, qui doivent faire paroître un coup de rafle plus ſingulier que toute autre combinaiſon. L'une eſt tirée de la parfaite régularité qui diſtingue ce cas. Les dez ſont mêlés au hazard, & jettés de même. La régularité ſuppoſe le contraire du hazard, un choix, un arrangement, une raiſon ſuffiſante. Trouver dans une production du hazard un effet ſemblable à celui qu'on auroit pû attendre d'un deſſein prémédité, c'eſt un événement auquel on n'eſt pas préparé, il doit frapper par ſa ſingularité, & paroître moins probable par conſéquent que d'autres qui ſans avoir un plus haut degré de probabilité n'ont rien de ſingulier.

La ſeconde raiſon qui doit faire trouver plus étrange la combinaiſon où tous les dez préſentent la même face, que toute autre combinaiſon déterminée, c'eſt que celle-ci étant irréguliere n'a rien qui la rende remarquable, rien qui fixe l'attention. Elle n'offre aucun caractere marqué qui la faſſe diſtinguer d'un grand nombre d'autres combinaiſons également irrégulieres; or le nombre de celles-ci étant ſans contredit le plus grand, le coup qui aménera l'une des combinaiſons irrégulieres, confondu avec tous les autres coups ſemblables, doit paroître un événement fort commun, auquel on avoit tout lieu de s'attendre, d'où il arrive naturellement qu'un événement contraire ſemblera très ſingulier. Six dez donnent $6^6$. combinaiſons différentes; dont il n'y en a que 6 d'exactement régulieres, toutes les autres au nombre de $6^6 - 6$. s'écartent plus ou moins de la régularité; il n'eſt donc pas étonnant que le coup qui aménéroit rafle de ſix paroiſſe plus ſingulier que celui qui aménéroit la combinaiſon A 2, B 5; C 3, D 4, E 3, F 1; puiſque cette combinaiſon reſſemble à 46649 autres, au lieu que le coup de rafle de ſix, n'admet que 5 autres coups ſemblables. Par conſéquent, ſi l'on ne s'apperçoit pas de la détermination individuelle, on jugera le coup qui amene 2; 5; 3; 4; 3; 1. plus probable, ſept mille ſept cent ſoixante & quinze fois, & autant de fois moins ſingulier, que le coup qui aménéroit 6; 6; 6; 6; 6; 6.

Sup-

Suppoſons néanmoins qu'on faſſe réellement attention aux nombres déterminés 2; 5; 3; 4; 3; 1; le cas qui les aménera doit cependant paroître beaucoup moins ſingulier que celui qui donneroit tous les *ſix*, parce que pourvu qu'on voie ces nombres de points différens ſur les dez, on ne s'aviſe gueres d'examiner ſcrupuleuſement à quel dé préciſément chaque nombre appartient. Or ſix dez peuvent donner cette même combinaiſon 2; 5; 3; 4; 3; 1; en ſept cent vingt manieres différentes, il doit donc paroître même en faiſant attention à l'eſpece déterminée d'irrégularité, que les cas qui l'amenent ſont ſept cent vingt fois moins ſinguliers que le cas unique de raſle de ſix.

VI. Les mêmes raiſons qui ſont que les combinaiſons régulieres attribuées au hazard cauſent de la ſurpriſe, nous font également trouver étranges les combinaiſons où l'on n'apperçoit ni ordre ni régularité, lorſque ces combinaiſons ſont attribuées à la volonté d'un Etre intelligent. Entre toutes les combinaiſons poſſibles, un Etre ſage ne choiſira pas une de celles qui compoſent l'eſpece la plus nombreuſe, par la ſeule conſidération que cette claſſe eſt la plus nombreuſe. Il choiſira la combinaiſon qui répond le plus exactement à ſon plan, fût elle unique en ſon eſpece, comme elle eſt néceſſairement unique par ſa détermination individuelle. Les orbites des planetes de notre Soleil, par exemple, pouvoient ſans doute avoir entr'elles des inclinaiſons bien différentes de celles que l'auteur de l'Univers leur a aſſignées. Mais celles-ci étant le réſultat de ſon choix libre, on peut aſſûrer ſans témérité que c'étoit la combinaiſon la plus convenable au plan le plus parfait; & qu'il y a dans ce plan une raiſon ſuffiſante de l'arrangement actuel de ces orbites. Il y auroit peut-être de la témérité à entreprendre de déterminer préciſément cette raiſon. Mais il eſt très permis d'imaginer ſi l'on peut la cauſe finale la plus ſatisfaiſante, pourvu qu'on ne prétende pas décider peremptoirement, qu'elle a dû être l'unique motif de l'arrangement actuel. On a effectivement réuſſi à en trouver des raiſons très plauſibles, & pour ne parler que de l'Ouvrage le plus

nouveau que je connoiſſe ſur ce ſujet, le ſavant auteur des Lettres Coſmologiques a montré avec beaucoup de ſagacité, que l'arrangement préféré étoit le plus propre de tous à raſſembler & à faire tourner ſans embarras autour d'un même Soleil, le plus grand nombre poſſible de planetes à orbites circulaires & allongées.

VII. De ce que nous venons de dire dans les deux articles précédens, je crois que l'on peut conclure légitimement; 1°. que la régularité ou l'irrégularité d'une combinaiſon individuelle déterminée, n'ajoute, & n'ôte rien à ſa probabilité réelle. 2°. que la combinaiſon la plus ſimmétrique paroitra néanmoins la plus ſinguliere, la plus inattendue, & la moins probable de toutes, lorſqu'elle ſera produite par le concours fortuit de cauſes purement mécaniques. 3°. Que d'un autre côté cette même combinaiſon paroitra la plus naturelle, & la plus probable de toutes, ſi on la regarde comme l'effet du choix libre d'un Etre intelligent. 4°. que dans cette derniere ſuppoſition on eſt autoriſé à rechercher la raiſon ſuffiſante de l'actualité d'un événement, parce qu'il doit avoir une cauſe finale; & enfin 5°. qu'on ne doit point chercher de raiſon à l'exiſtence d'un événement qu'on attribue au hazard, puiſqu'il n'y a point ici de cauſes finales à découvrir, & que les cauſes phyſiques ſont trop compliquées, & trop cachées pour qu'on puiſſe les démêler.

VIII. Juſqu'ici il n'a été queſtion que du cas d'une combinaiſon unique, dont l'exiſtence exclut celle de toute autre combinaiſon également poſſible. Mais on propoſe une autre queſtion plus difficile à diſcuter: c'eſt que *lorſqu'un même événement eſt déjà arrivé une ou pluſieurs fois de ſuite, on demande ſi cet événement conſerve autant de probabilité pour ſa future exiſtence, que l'événement contraire qui avec une égale probabilité primitive n'eſt point arrivé encore.* Il n'eſt pas néceſſaire d'avertir que la queſtion concerne les événemens fortuits, ou du moins ceux qu'on eſtime tels faute de connoitre les cauſes qui les produiſent. Car dès qu'il s'agiroit d'événemens amenés par une cauſe mécanique conſtante, ou d'événemens dirigés par la volonté d'un Etre intel-

intelligent, il eſt évident que ces événemens doivent ſe ſuccéder ſans variation auſſi longtems que leurs cauſes finales & mécaniques n'auront pas changé; & que ſi ces cauſes ſont connues on pourra prédire à coup ſûr le retour du même effet. Les événemens fortuits ont également leur cauſe déterminée, mais dans l'impoſſibilité où nous ſommes de l'appercevoir, tout ce que nous pouvons faire c'eſt d'examiner s'il eſt probable que le même concours de circonſtances qui a amené une fois ou deux un événement, ſubſiſtera aſſez longtems invariable pour reproduire ce même événement une troiſieme & une quatrieme fois. Or ſi l'on accorde, comme il ſemble qu'on n'en ſauroit douter, que tout événement dépend d'un grand nombre de cauſes ſéparées qui concourent à le déterminer, & que ces cauſes n'ont entr'elles aucune connexion néceſſaire; ſi l'on conſidere de plus que la nature entiere, par ſa propre activité, paſſe continuellement d'un état à un autre état, on reconnoitra ſans peine qu'il n'eſt pas probable que le même concours de circonſtances dont la réunion accidentelle avoit amené un événement, revienne pluſieurs fois de ſuite ſans la moindre altération; & puiſque toute altération dans l'aſſemblage des cauſes, peut produire une diverſité dans l'effet qui en réſulte, il paroit probable qu'un événement produit par le concours accidentel de diverſes cauſes partiales ne ſera pas le même pluſieurs fois de ſuite. Il ſemble donc que lorſqu'il eſt queſtion d'un événement répété, la probabilité de ſon retour doit être en raiſon compoſée de la probabilité abſolue de cet événement, & de la probabilité des cauſes combinées qui peuvent le ramener.

IX. Pour éclaircir davantage la queſtion, ſuppoſons une lotterie de deux ſeuls billets, l'un blanc, l'autre noir; qu'on ne tire qu'un billet à chaque tirage, & que le billet ſorti rentre chaque fois dans la roue pour le tirage ſuivant. Si le billet qui ſortira eſt blanc, je perds ma miſe; s'il eſt noir, l'entrepreneur de la lotterie m'en païe le double. Il eſt évident qu'au premier tirage la probabilité eſt égale de part & d'autre & que nous jouons au pair.

Mais après le premier tirage, on demande, ſi ce coup doit influer ſur le ſuivant quant au calcul des probabilités, ou ſi l'on doit conſidérer chaque nouveau tirage comme un acte iſolé qui n'a nulle connexion ni avec ceux qui l'ont précédé ni avec ceux qui le ſuivront. Il y a des raiſons ſpécieuſes pour l'une & pour l'autre opinion. En effet l'on peut dire d'un côté que par la rentrée du billet ſorti tout ſe retrouve dans l'état primitif; qu'on n'eſt pas plus fondé à combiner le tirage qui a immédiatement précédé avec celui qui va ſuivre, qu'un tirage quelconque qui auroit précédé celui-ci de pluſieurs ſiècles; ou qu'un tirage qui auroit été fait à cent lieues d'ici ſur un plan ſemblable; qu'avant de procéder au premier tirage on auroit été auſſi bien en droit de ſuppoſer, & d'imaginer un nombre quelconque de tirages antérieurs à ce premier, leſquels ne changeroient néanmoins rien par rapport à celui-ci, ni dans l'événement, ni dans ſa probabilité; en un mot que chaque tirage eſt évidemment un acte unique, indépendant, ſans rélation quelconque à tout autre, & dont par conſéquent la probabilité demeure invariablement déterminée par le rapport du nombre des billets gagnants, aux billets perdants.

En adoptant ce principe, les lots ſeroient ici conſtamment le double de la miſe; & comme je ſuis obligé, pour me racquitter des pertes faites aux tirages précédents, de doubler la miſe à chaque nouveau tirage, ſi la premiere a été de demi-Ecu, on aura la table ſuivante.

| Tirage. | Miſe. | Lot. |
|---|---|---|
| 1er | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 2d | 1 | 2 |
| 3e | 2 | 4 |
| 4e | 4 | 8. |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| xe | $\frac{2^{x}}{4}$ | $\frac{2^{x}}{2}$. |

Quel-

Quelque plauſible que ſoit cette opinion, il en réſulte néanmoins une conſéquence qui tend à la réfuter invinciblement, c'eſt que tôt ou tard l'entrepreneur de la lotterie ſeroit la duppe de ce calcul. Le joueur ſe racquitte de tous les tirages malheureux par un ſeul tirage qui lui ſera favorable, tandis qu'au contraire cent & mille tirages favorables à l'entrepreneur ne le mettent jamais à couvert de perdre en un ſeul coup l'avantage de tous ces tirages heureux. Où ſeroit ici l'égalité qui doit être entre la condition des intéreſſés? Il n'y a qu'un ſeul cas qui puiſſe compenſer le désavantage de l'entrepreneur, mais ce cas eſt étranger au calcul des probabilités; c'eſt que le joueur doublant la miſe à chaque tirage, peut ſe trouver au bout d'un certain nombre de tirages malheureux hors d'état de ſoutenir la gageure; qu'il peut être dans l'impuiſſance de continuer le jeu faute d'argent pour une miſe ultérieure, au lieu que l'entrepreneur ne riſque jamais du ſien que la valeur de la premiere miſe: mais cette conſidération, très importante pour les intéreſſés, ne ſauroit influer ſur l'exactitude du calcul abſtrait des probabilités.

X. Les partiſans de l'opinion que je viens d'examiner diront peut-être que le désavantage de l'entrepreneur n'eſt réel que dans la ſuppoſition que les tirages continuent à l'infini, ou du moins à la volonté du joueur; mais que ſi le nombre des tirages a été fixé d'avance, la probabilité ſera égale de part & d'autre, puiſque ſi l'entrepreneur riſque plus de perdre par la répétition des tirages, il riſque auſſi de gagner une ſomme proportionnée à cette répétition. Mais ne ſeroit-ce pas là reconnoitre tacitement une connexion entre la ſuite des tirages, & avouer en quelque façon qu'ils influent les uns ſur les autres, & qu'il n'eſt pas préſumable qu'un grand nombre de tirages ſucceſſifs puiſſe donner conſtamment l'avantage d'un même côté? Car ſi à chaque tirage il y avoit également à parier *un* contre *un*, que le billet qui ſortira ſera un billet blanc, il devroit être très indifférent à l'entrepreneur que le nombre des tirages fût limité d'avance, ou qu'il ne le fût pas.

XI. Voïons donc auſſi ce qu'on peut dire en faveur du ſentiment qui établit une connexion entre les tirages ſucceſſifs, & quelle ſeroit la nouvelle probabilité qui en réſulteroit. Quand on réfléchit ſur le principe de ce calcul on ne trouve rien qui empêche de l'appliquer auſſi bien aux événemens ſucceſſifs, qu'aux événemens ſimultanés. En effet ce principe n'eſt que le rapport des raiſons ſuffiſantes pour ou contre un événement. Suppoſons que d'une roue où l'on aura mêlé 500 billets blancs, avec autant de billets noirs, on en tire à la fois deux, au hazard. Il y a préciſement autant de raiſon de s'attendre que tous les deux ſeront blancs, que d'eſpérer que tous les deux ſeront noirs. Mais les deux billets ne ſauroient être à la fois blancs & noirs; il y a donc une raiſon ſuffiſante de penſer que l'un des deux ſera un billet blanc, & l'autre un billet noir. Le même raiſonnement aura lieu ſi l'on en tire à la fois 4; 6; 8; ou tel nombre pair que l'on voudra; la probabilité reſtera toujours que la moitié des billets ſortis ſera d'une eſpece, & l'autre moitié de l'autre eſpece. Or je demande s'il y a quelque différence capable d'altérer cette probabilité, ſoit que l'on tire par exemple douze billets à la fois par un acte ſimultané, ou que l'on tire ces douze billets deux à deux, en ſix actes ſucceſſifs? Je dis en ſix fois, car ſi on les tiroit en douze coups, la probabilité pour l'alternation des deux eſpeces ſeroit encore renforcée, par la conſidération qu'il reſteroit dans la roue, après le premier tirage, un billet de plus, de la couleur oppoſée à celle qui viendroit de ſortir.

Mais ſi l'on accorde que la probabilité eſt la même, ſoit que l'on tire à la fois ces douze billets, ſoit qu'on en faſſe douze tirages ſucceſſifs, l'on accorde auſſi que la probabilité eſt que ſur 12 tirages, il y en aura ſix qui donneront des billets blancs, & ſix autres qui en donneront des noirs; & par la même raiſon la probabilité voudra que ſur deux tirages, les eſpeces alternent; & cela, ſoit que les billets ſortis rentrent, ou qu'ils ne rentrent plus. Mais dans ce dernier cas la probabilité pour l'alternation augmente en raiſon du rapport numérique des billets reſtants de chaque eſpece.

XII.

XII. Pour déterminer la loi de cette probabilité, on peut faire différentes ſuppoſitions; la plus naturelle c'eſt de conſidérer chaque eſpece comme réuniſſant les droits de tous les individus qui la compoſent, & chaque individu comme aiant un droit égal à ſortir; ſa prétention s'éteint par ſa ſortie, & ſubſiſte auſſi longtems qu'il ne ſortira pas; ſi les eſpeces contiennent un nombre égal d'individus, elles ſont dans le cas de ceux-ci, pour l'égalité des prétentions. Si, par exemple, on fait deux tirages, une eſpece a le même droit que l'autre, de ſortir au premier & au ſecond coup. Mais celle qui ſort au premier tirage, n'a plus pour ainſi dire qu'une raiſon de prétendre à ſortir, au lieu que l'autre conſerve ſes deux degrés de prétention; il y a donc ici 2 à parier contre 1, que l'eſpece qui n'eſt pas ſortie au premier tirage, ſortira au ſecond.

Par la même raiſon, ſi les trois premiers tirages ont amené la même eſpece, il y auroit 4 à parier contre 1, que l'autre eſpece ſortira au quatrieme tirage, & en général tant qu'il y aura dans la roue autant de billets d'une eſpece que de l'autre; ſi l'on en fait ſortir un nombre quelconque $t$, ſoit à la fois, ou en $t$ tirages ſucceſſifs, & qu'ils ſoient tous d'une même eſpece, il y a à parier $t + 1$ contre 1, que le billet ſuivant ſera de l'autre eſpece.

XIII. Si les billets ſortis ne rentrent plus pour concourir au tirage ſuivant, il réſulte de cette condition une nouvelle probabilité pour l'alternation des eſpeces.

Que le nombre de billets de chacune des deux eſpeces A, & B, ait d'abord été $= n$, qu'on ait déjà fait un certain nombre de tirages $= t$, & que tous les billets ſortis aient été de l'eſpece A, leur nombre reſtant ſera $= n - t$, & celui des B ſera encore $= n$. On demande la probabilité qu'il y a que dans le tirage ſuivant $t + 1$, on verra ſortir un billet de l'eſpece B?

Si l'on ne fait nulle attention aux tirages précédens, & qu'on ne conſidere que le nombre des billets reſtans, la probabilité pour

l'eſpece B ſera $= \frac{n}{2n - t}$, & pour l'eſpece A elle ſera $= \frac{n - t}{2n - t}$; ainſi il y auroit à parier $n$ contre $n - t$, que l'eſpece B ſortira au prochain tirage.

Mais, ſi l'on a égard à ce que chaque eſpece avoit d'abord $t + 1$ prétentions à ſortir en $t + 1$ tirages, que l'eſpece B a conſervé tous ſes droits, & que l'eſpece A n'a plus qu'un ſeul degré de prétention ſur le $t + 1^{me}$ tirage, il y auroit encore à parier $t + 1$ contre 1, que l'eſpece B ſortira à ce tirage-là: & par conſéquent, ſi l'on combine ces deux probabilités, il y aura à parier pour l'eſpece B, $nt + n$ contre $n - t$.

Il eſt remarquable que ce qui n'eſt que probabilité lorſqu'il s'agit d'eſpeces, devient néceſſité lorſque les eſpeces ſont réduites à l'individu; ſi $n = 1$ & $t = 1$, il y a à parier 1. contre 0. que B ſortira au ſecond tirage.

Il paroit que, dans le cas que je ſuppoſe ici, ſavoir que les billets ſortis ne rentrent pas, la combinaiſon des probabilités que je propoſe doit être admiſe. Car les événemens ſucceſſifs doivent alterner par la même probabilité qui fait préſumer qu'un événement multiple ſimultané ſera compoſé d'événemens ſimples alternans. Mais, lorſque les billets ſortis ne rentrent pas, la raiſon pour l'alternation augmente à meſure que les cas qui pouvoient l'empêcher diminuent: cette probabilité augmente même au point, que lorſque la diminution des cas contraires va juſqu'à les anéantir, l'alternation, ou plutôt le paſſage d'une eſpece à l'autre, devient néceſſaire, au lieu d'être ſimplement probable. Je dis le *paſſage*, plutôt que l'*alternation*, parce que celle-ci renferme l'idée d'un retour prochain à la premiere eſpece; retour qui n'eſt plus poſſible lorſque tous les cas qui pouvoient amener cette eſpece-là ſont épuiſés, ce qui arrive lorſque l'on a $t = n$, ou $n - t = 0$

XIV.

XIV. De ce qui a été dit à l'article XII. dans la ſuppoſition que le billet ſorti rentre à chaque tirage ſuivant, il réſulte que, ſi le nombre des tirages étoit cenſé infini, il y auroit auſſi l'infini à parier contre l'unité que l'on n'aura pas toujours tiré le billet blanc; par conſéquent, dans le Probleme que M. *Nicolas Bernoulli* avoit propoſé à M. de *Montmort*, Paul pariant que Pierre amènera *pile*, pourroit dans toutes les regles, je ne dis pas de la prudence, mais de la probabilité, parier une ſomme infinie ſi la choſe étoit faiſable, contre un ſeul écu, que tôt ou tard *pile* ſera amené.

XV. Ce probleme connu a embaraſſé les Mathématiciens par la difficulté que ſa ſolution fait naître. Voici à quoi il ſe réduit ſi on le ramene à notre lotterie perpétuelle, compoſée ſeulement de deux billets, l'un blanc & l'autre noir. Pierre permet à Paul de tirer un billet; & s'engage de lui donner autant de demi-écus, qu'en exprime le nombre 1 doublé autant de fois qu'il aura fallu de tirages pour amener le billet noir. Si, par exemple, ce billet ne ſort qu'au douzieme tirage, Paul recevra $\frac{2^{12}}{2} = 2^{11} = 2048$ Ecus, & en général s'il ne ſort qu'au tirage $t$, Pierre promet la ſomme de $2^{t-1}$ Ecus, ſomme qui ſera énorme, ſi $t$ eſt un nombre un peu conſidérable.

Il ſemble d'abord par l'énoncé de ce Probleme, & c'eſt ce qui a paru ſingulier à de célebres Géometres, que la fortune de Paul eſt aſſurée, & qu'il a l'eſpérance de recevoir une ſomme immenſe: en effet, par le calcul ordinaire des probabilités, on trouve que la ſomme des eſpérances de Paul eſt exprimée en Ecus par cette ſérie

$\frac{1}{2}t \times \frac{2}{2} + \frac{1}{4}t \times \frac{4}{2} + \frac{1}{8}t \times \frac{8}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{t}t \times \frac{t}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t$ etc. $= \frac{1}{2}tt$ Ecus.

Mais, comme entre tous les tirages, dont on ſuppoſe ici que le nombre eſt $= t$, il n'y a qu'un cas qui faſſe gagner Paul, ſon eſpérance moïenne ſe réduit à la ſomme de $\frac{tt}{2t} = \frac{1}{2}t$ Ecus. Il pourroit donc eſpérer une ſomme infinie, ſi le nombre $t$ des tirages alloit à l'infini avant

que le billet noir ſortît. Cependant on tombe aſſez généralement d'accord qu'il y auroit de la folie à lui donner pour cette eſpérance au delà d'une vingtaine d'écus.

Voïons donc, en ſuppoſant nos principes, quelle ſeroit la ſomme qu'on pourroit raiſonnablement offrir à Paul pour ſon eſpérance.

A' chaque tirage $t$ prêt à ſe faire, la ſomme promiſe par Pierre eſt $= 2^{t-1}$ Ecus, & la probabilité pour *blanc* & *noir* étant ſuppoſée égale, l'eſpérance de Paul à cette ſomme eſt $= \frac{2^{t-1}}{2} = 2^{t-2}$. Mais nous avons vû (article XII.) que, ſi le billet noir n'étoit pas ſorti dans les $t - 1$, tirages précédens, il y avoit à parier $t$ contre 1, qu'il ſortiroit au tirage $t$. Donc, par la même raiſon, avant tout tirage il y avoit à parier $t - 1$ contre 1, que le billet noir ſortiroit avant le tirage $t$; $t - 2$ contre 1, qu'il ſortiroit avant le tirage $t - 1$; $t - 3$ contre 1 qu'il ſortiroit avant le tirage $t - 2$, & ainſi de ſuite. En ſorte qu'en combinant ces gageures il y auroit à parier $1 \times 2 \times 3$ (----) $(t - 1)$ contre 1, que Paul ne réaliſera pas l'eſpérance $2^{t-2}$ écus; ſon eſpérance à cette ſomme ne lui vaudroit donc que :

$$2^{t-2} \times \frac{1}{1.2.3\,(\text{---})\,(t-1)+1} \text{ Ecus.}$$

On peut, en développant cette formule, trouver la valeur de l'eſpérance $= e$ de Paul à chaque prix $2^{t-1}$; pour le nombre de tirages dont on ſera convenu d'avance

$t = 1$ donne $e = \frac{1}{2} \times \frac{1}{0+1}$ - - - $= \frac{1}{2}$ Ecu

$t = 2$ - - $e = 1 \times \frac{1}{1+1}$ - - - $= \frac{1}{2}$ - -

$t = 3$ - - $e = 2 \times \frac{1}{1.2+1}$ - - - $= \frac{2}{3}$ - -

$t =$

$t = 4$ donne $e = 2.2 \times \frac{1}{1.2.3+1}$ - - - $= \frac{4}{7}$ Ecu

$t = 5$ - - $e = 2.2.2 \times \frac{1}{1.2.3.4+1}$ - - $= 2\frac{8}{5}$ - -

$t = 6$ - - - $e = \frac{2.2.2.2}{1.2.3.4.5+1}$ - - $= 11\frac{16}{11}$ - -

$t = 7$ - - - $e = \frac{2.2.2.2.2}{1.2.3.4.5.6+1}$ - - $= 7\frac{32}{11}$ - -

etc. etc.

D'où l'on voit que la ſérie qui exprimeroit la valeur totale de l'eſpérance de Paul, en ſuppoſant que les tirages ſoient illimités, ou pouſſés à l'infini, ſeroit:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2+1} + \frac{2.2}{2.3+1} + \frac{2.2.2}{2.3.4+1} + \frac{2.2.2.2}{2.3.4.5+1} + \text{etc. à l'infini.}$$

Or il eſt évident qu'après les trois premiers termes de cette ſérie la valeur de chacun des ſuivans diminue de plus en plus; puiſque chaque terme qui accede a pour nouveau facteur la fraction $\frac{2}{t-1}$, dont le numérateur reſte conſtant, tandis que le dénominateur augmente uniformément juſqu'à l'infini. Le vingtieme terme, par exemple, qui répond au vingtieme tirage, ne vaudra plus que $\frac{2^{19}}{1.2.3 - - - 19+1} = \frac{1}{462972000000}$ d'un écu. Ainſi, quoique la ſérie qui exprime la ſomme des eſpérances de Paul, aille réellement à l'infini, ſans qu'aucun terme ceſſe d'être réel & poſitif, cette ſomme eſt néanmoins ſi peu conſidérable que la valeur du 20$^e$ terme n'eſt déjà plus qu'une partie infiniment petite d'un écu, & qu'on peut négliger ſans erreur tous les termes au delà des huit ou dix premiers. La ſomme des eſpérances de Paul ſe réduiroit donc à $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + 2\frac{8}{5} + 11\frac{16}{11} + 7\frac{32}{11}$

$\frac{8}{7^2} + \frac{64}{5^4} + \frac{16}{5^4} + \frac{32}{5^4} +$ etc. $= \frac{133}{5^4} = 2,454$ Ecus, de ſorte qu'elle n'iroit pas au delà de $2\frac{1}{2}$ Ecus; & que ce ſeroit auſſi tout ce qu'on pourroit raiſonnablement lui offrir pour une prétention qui ſembloit d'abord n'avoir point de bornes.

XVI. On a encore énoncé ce probleme ſingulier d'une autre façon, qui ne differe cependant point de la premiere quant au calcul. On ſuppoſe que Pierre & Paul veulent jouer au pair, & dans cette ſuppoſition on demande quel eſt l'enjeu que Paul doit mettre en commençant la partie. Le calcul des probabilités détermine cet enjeu à $\frac{1}{2}t$ Ecus; c. à d. que Paul doit mettre au jeu autant de demi-écus qu'on aura fixé de coups pour chaque partie. Or, ſi au lieu de déterminer d'avance le nombre des coups, on étoit convenu de ne finir la partie que lorſque l'on amenera *pile*, ou lorſque le billet noir ſortira, comme il n'implique pas contradiction que ce billet ne ſorte point, l'enjeu de Paul ſelon ce calcul devroit être une ſomme infinie de demi-écus, puiſqu'abſolument parlant il n'eſt pas impoſſible que le nombre des tirages $t$ aille au delà de tout nombre limité. On ſent bien qu'il ſeroit abſurde en tout ſens d'impoſer à Paul un tel enjeu, & il n'eſt pas moins vrai que toutes les formules que les Mathématiciens ont données juſqu'ici l'exigent, dès qu'on ne les limite pas par des conditions entierement étrangeres au probleme, telles que ſont la conſidération des facultés de Pierre, celle de la fortune de Paul, ou celle des bornes que ſa modération peut mettre à ſa cupidité. Ce n'eſt pas tout encore: nous venons de voir que l'eſpérance raiſonnable de Paul ne va pas à 3 Ecus; il auroit donc tort de riſquer à ce jeu une plus forte ſomme; d'un autre côté nous avons vû (art. XIV.) qu'il pourroit haſarder à un jeu pareil une ſomme infinie contre un ſeul écu, & enfin on voit par l'article IX. que l'avantage ſeroit encore du côté de Paul quand, pour gagner les mêmes lots que Pierre lui offre ici, il riſqueroit, quel que ſoit le nombre de tirages $t$, je ne dis plus autant de demi-écus que $t$ contient d'unités, mais autant qu'en contient le nombre incomparablement plus grand $2^{t-1} - 1$.

XVII.

XVII. Pour éclaircir ces paradoxes, je crois qu'il ſuffit de faire attention à la nature des cas. Quand on demande, dans le probleme en queſtion, quel doit être l'enjeu, ou l'eſpérance de Paul, on ne demande pas quelle eſt la ſomme qu'il n'impliquera pas contradiction que Paul gagne; cette queſtion n'eſt pas du reſſort de la probabilité; mais on demande ſimplement quelle eſt la ſomme que Paul peut raiſonnablement ſe flatter de gagner. Or il n'y a nulle raiſon de s'attendre que le billet noir ne viendra qu'au bout d'un nombre infini de tirages; il n'y a donc aucune raiſon d'exiger de Paul un enjeu d'une valeur infinie. Il y a très peu de raiſon de s'attendre que ce billet ne ſortira qu'au 10$^{e}$ tirage, & beaucoup moins encore qu'il ne ſortira qu'au vingtieme. Paul auroit donc très peu de raiſon de hazarder un enjeu de *cinq* Ecus, & beaucoup moins encore d'en riſquer un de *dix*. Le calcul mathématique donne bien exactement la proportion entre l'enjeu & les prix correſpondans, pour tel nombre de tirages qu'on voudra depuis zéro juſqu'à l'infini; c'eſt tout ce qu'on demandoit de ce calcul, & plus même qu'on ne demandoit; mais, ſi l'on veut ſavoir combien de tirages il y aura probablement avant que le billet noir ſorte, c'eſt un nouveau probleme, qui demande un autre calcul, & c'eſt cet autre calcul que je viens de tenter; ſi on l'admet, il en réſultera que Paul ne doit pas s'attendre à plus de cinq tirages, & qu'il ne doit riſquer par conſéquent qu'un enjeu de 2 Ecus & demi.

Mais pourquoi ne devroit-il riſquer qu'un ſi petit enjeu, puiſqu'il peut parier une ſomme infinie contre un écu, que le billet noir ſortira tôt ou tard (XIV)? C'eſt préciſément parce qu'il y a à parier l'infini contre l'unité qu'il ne faudra pas un nombre infini de tirages pour amener le billet noir, que Paul doit s'attendre à le voir ſortir avant le ſixieme tirage; & qu'ainſi ſon enjeu doit être proportionné au nombre de tirages qu'il peut raiſonnablement prévoir; s'il hazardoit un enjeu de 20 Ecus, & que le billet noir ſortît au premier, ſecond, troiſieme ou quatrieme tirage, il auroit riſqué contre toute vraiſemblance 19, 18, 16, 12 ou 4 Ecus, ſur la ſimple poſſibilité, qui devient de plus en plus moins probable, de gagner au 6$^{e}$ tirage, 12 Ecus, au 7$^{e}$, 44 etc.

La

La même conſidération leve la difficulté qui ſemble réſulter de la comparaiſon des deux cas des art. IX. & XV. Dans le premier de ces cas, Paul, avons-nous dit, peut riſquer par ex. avec avantage $31\frac{1}{2}$ Ecus, dans l'eſpérance d'en recevoir 32, & dans le ſecond cas, nous trouvons qu'il auroit grand tort de riſquer ces $31\frac{1}{2}$ Ecus, pour en gagner plus de 4 trillions. Mais la diverſité des deux cas eſt ſenſible: dans le premier, Paul a déjà perdu *cinq* tirages conſécutifs, il ne hazarde actuellement que 16 Ecus contre 32 à jeu égal, & avec la certitude morale que le billet noir ne ſauroit plus beaucoup tarder à venir. Dans le ſecond cas au contraire, aucun tirage n'a encore précédé, la même certitude morale doit faire préſumer à Paul que le billet noir ſortira dans l'un des premiers tirages, qui ne lui rembourſeront pas ſon enjeu.

XVIII. Je ſuis cependant bien éloigné de regarder l'eſtimation de l'enjeu de Paul, telle que le calcul de l'article XV. la donne, comme une vérité démontrée; je crois au contraire que le probleme en queſtion ſouffre autant de ſolutions différentes qu'il y a de diverſes manieres d'enviſager les probabilités. Toute ſolution qui n'admet rien d'impoſſible ou d'abſurde, peut être bonne, ou du moins n'eſt pas ſuſceptible d'une réfutation démonſtrative. Les deux ſolutions extrêmes ſont, celle qui donne un enjeu croiſſant juſqu'à devenir infiniment grand, & celle qui fixeroit l'enjeu conſtant à un demi-écu; elles doivent être exclues toutes deux, l'une parce que Paul riſqueroit probablement plus que Pierre; l'autre parce que Pierre riſqueroit vraiſemblablement plus que Paul. La ſolution la plus recevable ſera celle où le gain moïen qui doit toujours être égal de part & d'autre, ſera auſſi accompagné d'une vraiſemblance égale pour l'un & l'autre des joueurs; & c'eſt de ce genre, ſi je ne me trompe, que ſont les ſolutions ſuivantes.

XIX. 1. Chaque prix particulier propoſé par Pierre, combiné avec ſa probabilité, eſt réduit à la valeur du premier prix: c'eſt de quoi les Mathématiciens conviennent. Le premier prix eſt d'un écu, & l'eſpérance de Paul à ce prix vaut préciſément un demi-écu; ainſi l'on peut

peut dire que l'eſpérance à chacun des autres prix particuliers ne vaut pas davantage; & puiſque Paul ne ſauroit gagner qu'un ſeul prix, il ſemble que ſon eſpérance, ou ce qui revient au même ſon enjeu, ne doit pas excéder ce demi-écu, ſoit que le nombre des tirages ait été fixé à un ſeul ou à pluſieurs, ou qu'il n'ait point été limité au commencement du jeu. Mais, d'un autre côté, plus il y aura de tirages, plus il y a de probabilité que Paul remportera ce prix, dont la valeur *abſolue* ou *réduite*, eſt d'un Ecu. Si l'on joue à un ſeul tirage, il y a à parier *un* contre *un* qu'il le gagnera; ainſi ſon enjeu eſt $e = 1 \times \frac{1}{2}$ Ecu: ſi l'on joue en cent mille coups, l'enjeu ſeroit donc par la même raiſon $e = 1 \times \frac{1}{100000}$ écus; & ſi le nombre des coups eſt illimité, il y a l'infini à parier contre 1, que Paul remportera le prix. Ainſi l'enjeu en ce cas-là devroit être $e = 1 \times \frac{\infty}{\infty + 1} = 1$ Ecu; la valeur de l'enjeu varieroit donc à l'infini entre les deux valeurs extrêmes $\frac{1}{2}$ & 1, & la formule qui exprime ces valeurs en général ſeroit $e = 1 \times \frac{t}{t+1} = \frac{t}{t+1}$.

Mais, à le prendre ainſi, Pierre ne pourroit jamais gagner, lorſque le nombre des coups eſt illimité, tandis que Paul eſt à peu près ſûr de gagner $\frac{t}{t+1}$ Ecus. Il faut donc, pour jouer au pair, que Pierre ait une probabilité égale d'en gagner autant. Or il y a préciſément autant de probabilité pour le premier coup que pour tous les autres enſemble; ainſi, en doublant l'enjeu de Paul, il y aura autant de probabilité que Pierre gagnera $\frac{2t}{t+1} - \frac{t}{t+1} = \frac{t}{t+1}$, qu'il y en a qu'il ne le gagnera pas. Donc la formule de l'Enjeu de Paul devroit être: $e = \frac{2t}{t+1}$, lorſque le nombre des coups eſt illimité; ou toutes les fois qu'étant limité, la valeur de $\frac{2t}{t+1}$ ſera plus

petite que celle de $\frac{1}{2}t$, qui eſt la formule générale des Géometres. A ce calcul la valeur des divers enjeux varieroit depuis ſon *minimum* $\frac{1}{2}$ Ecu, juſqu'à ſon *maximum* 2 Ecus, dans l'ordre ſuivant:

$$\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{8}{5};\ \frac{10}{6};\ \frac{12}{7};\ \frac{14}{8};\ \frac{16}{9};\ \frac{18}{10};\ \frac{20}{11};\ \text{- - - -}\ \frac{2\infty}{\infty+1}.$$

XX. 2. Un ſimple raiſonnement métaphyſique ſemble conduire à la même ſolution. Le hazard ne s'aſtreint ni à l'ordre, ni aux formules: mais le calcul des probabilités ſuppoſe tacitement, comme nous l'avons obſervé (art. IV.) que le hazard diſtribue ſes faveurs avec une équité impartiale. Or, au jeu de *croix* & *pile*, l'arbitre le plus équitable ſeroit bien embaraſſé de décider pour *croix* ou *pile* au premier coup; abſtraction faite des circonſtances étrangeres, il ſe trouveroit exactement dans le cas de la liberté d'indifférence, & choiſiroit celui des deux qui s'offriroit le premier à l'eſprit; mais au coup ſuivant l'embarras ceſſeroit; *pile* ſuccéderoit indubitablement à *croix;* & par conſéquent le jeu ſe termineroit infailliblement au deuxieme coup, s'il n'avoit pas fini au premier. La plus grande valeur de l'enjeu doit donc être celle du ſecond prix $=$ 2 Ecus, & ſa plus petite valeur la moitié du premier prix $=$ $\frac{1}{2}$ Ecu; ce qui pour un nombre de coups illimité revient à la formule que nous venons de trouver $e = \frac{2t}{t+1}$.

XXI. 3. On parviendra, ſinon à la même formule, du moins aux mêmes valeurs extrêmes de l'enjeu, par une autre conſidération qui paroit aſſez plauſible.

Quand les Géometres ont calculé l'enjeu de Paul, pour un tirage quelconque $t$, ils ont trouvé cet enjeu égal à $\frac{1}{2}t$, en diſant: l'eſpérance de Paul au plus grand prix $p$ eſt moins probable deux fois que l'eſpérance au prix précédent $p - 1$; celle-ci eſt à ſon tour deux fois moins probable que l'eſpérance au prix $p - 2$, & ainſi de ſuite, en deſcendant juſqu'au premier prix $=$ 1 Ecu. Or l'eſpérance à ce prix 1 eſt $=$ $\frac{1}{2}$, donc celle au prix particulier $p$ eſt $= p \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times$ (-

$\times (\cdot\cdot\cdot) = \frac{p}{2^t}$. Mais $p$ vaut $2^{t-1}$ écus, donc l'eſpérance à ce prix vaut $\frac{2^{t-1}}{2^t} = \frac{1}{2}$ Ecu, & par conſéquent l'eſpérance à tous les prix juſqu'à $p$ incluſivement vaut $\frac{1}{2}t$ Ecus. Il eſt évident que dans ce calcul les Géometres ne ſe contentent pas d'eſtimer la probabilité ſur les combinaiſons abſolument poſſibles, mais ſur les plus probables, & que cette probabilité elle-même eſt évaluée non ſur le nombre abſolu des cas poſſibles, mais ſur l'ordre le mieux réglé qu'on ſuppoſe régner dans leur exiſtence reſpective. Car, comme le célebre Auteur des Doutes l'a très bien obſervé, il n'y a pour chaque prix $p = 2^{t-1}$ que $t + 1$ cas poſſibles, dont un ſeul feroit gagner ce prix à Paul, un ſeul lui feroit perdre ſon enjeu, & les autres au nombre de $t - 1$, lui feront gagner quelque prix inférieur: l'eſpérance de Paul au prix $p$ ſera donc exprimée par la probabilité $\frac{1}{t+1}$; ainſi la ſuite des eſpérances en rétrogradant ſeroit $\frac{2^{t-1}}{t+1}$; $\frac{2^{t-2}}{t}$; $\frac{2^{t-3}}{t-1}$; $\cdots\cdots\frac{2^0}{t-t+2}$, ou dans l'ordre naturel, $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{16}{6}$ etc. & l'on auroit la formule $e = \frac{2^{t-1}}{t+1}$, ce qui eſt bien différent de $e = \frac{1}{2}t$.

Or la même raiſon qui a fait fixer l'enjeu à $\frac{1}{2}t$, & non à $\frac{2^{t-1}}{t+1}$, prouve, ce me ſemble, que cette valeur $\frac{1}{2}t$ demande encore une ſeconde réduction pour être généralement applicable, puiſqu'il eſt plus probable que *croix* ne ſera pas amené, vingt, trente, cinquante, mille, cent mille fois de ſuite, qu'il n'eſt vraiſemblable qu'on l'aménera autant de fois. On ſait que l'arrangement ſucceſſif ou ſimultané d'individus de deux eſpeces différentes peut varier en autant de manieres, qu'il y a d'unités dans le nombre 2 élevé à la puiſſance qui exprime la quantité des choſes que l'on veut arranger. Si, par exemple, d'une roue qui

contient plusieurs billets blancs & noirs, on en tire *douze*, à la fois ou l'un après l'autre, il est certain qu'ils peuvent sortir en $2^{12}$ ordres différens, & que de ce grand nombre d'arrangemens divers, il n'y en a qu'un seul, sur 4096, qui puisse amener douze billets noirs. Il y a donc à parier $2^t - 1$ contre 1, que cette combinaison n'arrivera pas lorsqu'on tirera un nombre $t$ de billets, soit qu'on les tire à la fois ou en $t$ tirages de suite. Or la probabilité que le jeu continuera jusqu'au tirage $t$ est égale à la probabilité d'amener *croix* $t - 1$ fois de suite, & cette probabilité, comme nous venons de le dire, n'est que $\frac{1}{2^t - 1}$. Il semble donc que l'espérance estimée $\frac{1}{2}$ Ecu de gagner le plus haut prix qui répond au nombre de coups $t$, doit encore être affoiblie par la probabilité qu'il y a de pousser le jeu jusqu'à ce nombre de coups $t$, ce qui changeroit la valeur constante de cette espérance sur chaque prix en une valeur moindre & variable $= \frac{1}{2^t - 1}$ Ecus, pour tous les cas où $\frac{1}{2^t - 1}$ est plus petit que $\frac{1}{2}t$, & par conséquent l'enjeu pour un nombre illimité de prix, seroit:

$$e = \frac{1}{2^{t-1}} + \frac{1}{2^{t-2}} + \frac{1}{2^{t-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{t-t}} = \frac{1+2+4+\cdots+2^{t-1}}{2^t - 1} = \frac{2^t - 1}{2^t - 1}.$$

De sorte que l'enjeu approcheroit toujours plus de la valeur de 2 Ecus à mesure que le nombre des coups augmente, sans néanmoins arriver à cette valeur que lorsqu'on supposera le nombre des coups, ou illimité, ou infini. En effet, le moindre enjeu étant $= \frac{1}{2}$ Ecu, les accroissemens successifs de cet enjeu sont exprimés par la série infinie $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^\infty} = 1\frac{1}{2}$, & les enjeux eux-mêmes pour un nombre de coups fixé d'avance, seront

$$\frac{1}{2}; \quad 1; \quad 1\frac{1}{2}; \quad \frac{15}{8}; \quad \frac{31}{16}; \quad \frac{63}{32}; \quad \text{etc.}$$

XXII. 4. Les Géometres dans la formule connue $e = \frac{1}{2}t$ tiennent à la vérité déjà compte du peu de probabilité qu'il y a que le nom-

nombre des coups puiſſe aller bien loin; c'eſt ce qui réduit chaque prix partieulier, quoique croiſſant dans la progreſſion géométrique, à n'entrer que pour la valeur d'un demi-écu dans la ſomme moïenne qui conſtitue l'eſpéranee & l'enjeu de Paul. La queſtion revient done à demander ſi eette premiere réduction ſuffit, ou ſi la nature du ſujet en exige eneore une ſeeonde. Or il paroit que l'eſpérance à chaque prix particulier doit être modifiée par deux raiſons différentes, l'une c'eſt que la moitié des eas poſſibles eſt abſorbée au premier coup, le quart au ſecond eoup, la huitieme au troiſieme eoup; etc. l'autre raiſon c'eſt que la vraiſemblanee des eas poſſibles reſtans diminue auſſi à meſure que le nombre des coups eſt ſuppoſé plus grand. On peut en effet repréſenter les ſommes que Pierre offre par les ordonnées d'une courbe logarithmique dont l'axe exprimeroit le nombre total des eoups. Le calcul des Mathématiciens a réduit la valeur moïenne de ces ſommes, ou l'eſpéranee de Paul, à un parallélogramme qui a pour hauteur la moitié de la premiere ordonnée, & pour baſe l'axe entier de la eourbe. Mais par cette réduction le centre de figure, ou, ſi je puis m'exprimer ainſi, le centre des eſpéranees ehange eontinuellement de plaee, & s'avance enfin juſqu'à répondre au milieu de l'axe prolongé à l'infini; il y tombe tout auſſi près du dernier prix auquel il n'y a nulle apparence d'arriver, que du premier prix qui a la plus grande probabilité par devers ſoi. C'eſt à peu près comme ſi, en tirant au blanc, on ſe contentoit de doubler le prix à meſure qu'on éloigneroit le but, & qu'on exigeât du tireur de proportionner ſa gageure à la diſtance. Il eſt évident qu'au delà d'une certaine portée à laquelle le tireur pourroit ſe flatter d'atteindre, la proportion deviendroit de plus en plus déſavantageuſe pour lui. Il paroit donc qu'il faut eonſerver la figure logarithmique, rapprocher le centre des eſpéranees de l'origine de l'axe, & faire en ſorte que quel que ſoit le nombre des eoups, ee centre reſte toujours entre les deux premieres diviſions de l'axe; c. à d. qu'en laiſſant à l'axe toute ſa longueur, il faut décrire dans le parallélogramme une nouvelle logarithmique, dont la plus grande ordonnée ſoit vers l'origine de l'axe, tandis que les autres déeroiſſent à l'infini; ou, ce qui revient au mê-

me, il n'y a qu'à prendre à contreſens la premiere logarithmique, & puiſque le premier prix eſt infiniment plus aſſuré que le dernier, regarder la plus grande ordonnée comme celle qui repréſente l'unité, & toutes les autres comme des fractions décroiſſantes à l'infini.

En enviſageant le probleme ſous ce point de vue, on obſervera que le centre des eſpérances paſſe d'un terme de la ſérie, ou d'une ordonnée, à l'autre, en s'éloignant de ſon premier point, toutes les fois que le nombre des coups $t$ eſt doublé. Si $t = 4$, l'enjeu $\frac{1}{2}t = 2$ Ecus répond à la ſeconde ordonnée, ou au deuxieme terme de la ſuite des prix; ſi $t = 8$, l'eſpérance eſt reculée au 3$^e$ prix; ſi $t = 16$, elle tombe ſur le quatrieme, & ainſi de ſuite. Pour la fixer au commencement du ſecond terme, où la probabilité eſt la même des deux côtés de la ſérie, il faut néceſſairement tenir compte de la différence qu'il y a entre la valeur d'une eſpérance reculée, & celle d'une eſpérance prochaine. Soit donc $t = 2^n$, le centre de l'eſpérance $\frac{1}{2}t$ tombera ſur le prix $2^{n-1}$ qui eſt le $n^{ieme}$ terme de la ſérie; la probabilité d'y atteindre ſera par conſéquent $= \frac{1}{2^{n-1}}$, tandis que la probabilité d'atteindre au prix 2, qui répond au centre fixe des eſpérances, eſt $= \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$. On a donc l'analogie inverſe:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}t : e, \quad \text{donc } e = \frac{t}{2^{n-1}} = \frac{2t}{t} = 2 \text{ Ecus.}$$

Valeur qui aura lieu, quel que ſoit le nombre des tirages, pourvû que $\frac{1}{2^{t-1}}$ ne ſoit pas plus petit que $\frac{1}{2^{n-1}}$, ou, ce qui revient au même, que $e$ ne ſe trouve pas plus grand que $\frac{1}{2}t$; ou enfin, dès que $t$ eſt un nombre au deſſus de 3, & que par conſéquent la formule ordinaire feroit avancer le centre des eſpérances au delà de ſon point fixe.

A' ce

A ce compte les diverſes valeurs de l'enjeu ſeroient :

en *un* coup $e = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}$ Ecu
en *deux* coups $e = \frac{1}{2}t = 1$ Ecu
en *trois* coups $e = \frac{1}{2}t = 1\frac{1}{2}$ Ecu
en *quatre* coups & au delà à l'infini $e = \frac{2t}{t} = 2$ Ecus.

Mais, comme il ſuffit que le centre des eſpérances ne paſſe pas du ſecond au troiſieme terme, il n'y a point de raiſon ſuffiſante de le ſuppoſer entierement immobile, puiſqu'en effet il ne ſauroit l'être dans les premiers coups, & qu'à meſure que leur nombre augmente, l'eſpérance acquiert quelque petit degré d'intenſité ultérieure; il paroit donc plus naturel de lui laiſſer la latitude qui réſulte de l'eſpace logarithmique entre la ſeconde & la troiſieme ordonnée; & l'enjeu repréſenté par l'eſpace logarithmique ſera $e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$ etc. à l'infini, ou, ce qui revient au même $e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} +$ etc. préciſément comme la ſolution de l'article XXI. l'a donné.

XXIII. On trouvera peut-être étrange que l'enjeu de Paul ſoit ſi modique, tandis que Pierre riſque de ſi énormes ſommes. Je crois en effet que perſonne ne voudroit s'engager à païer ces prix pour un nombre illimité de coups, contre un enjeu de deux Ecus, ou de deux écus & demi: il y auroit cependant beaucoup moins de riſque ſans doute à s'y engager, qu'il n'y en auroit à païer d'avance un enjeu exorbitant pour n'attraper probablement en échange qu'un prix d'un écu ou de deux. Mais, comme la probabilité ne décide pas de l'événement, il y auroit de l'imprudence de hazarder de fortes ſommes ſur la probabilité la plus exactement calculée; car d'ailleurs il eſt aiſé de prouver que dans toutes les regles de la vraiſemblance Pierre peut riſquer tous les prix du probleme, contre un enjeu de 2 Ecus. En effet, que le premier prix ſoit un écu, le ſecond 2 écus, le troiſieme $x^{III}$, le quatrieme $x^{IV}$, le cinquieme $x^{V}$, & ainſi de ſuite à l'infini. Il eſt évident que *pile* venant au premier coup, Pierre gagne *un* Ecu; ſi c'eſt au ſecond, il ne

il ne gagne ni ne perd; ſi c'eſt au troiſieme, il perd $x^{III} - 2$; au quatrieme $x^{IV} - 2$, & ainſi de ſuite à l'infini.

Or, de l'aveu des Mathématiciens, la probabilité de gagner au premier coup eſt $= \frac{1}{2}$. Celle de perdre au 3$^e$ eſt $= \frac{1}{8}$, au 4$^e$ elle eſt $= \frac{1}{16}$ etc. ainſi en proportionant la perte probable au gain probable, on aura:

$$\frac{x^{III} - 2}{8} = 1 \times \tfrac{1}{2}, \quad \text{ou } x^{III} - 2 = 4 \text{ Ecus}$$

$$\frac{x^{IV} - 2}{16} = 1 \times \tfrac{1}{2}, \quad \text{ou } x^{IV} - 2 = 8$$

$$\frac{x^{V} - 2}{32} = 1 \times \tfrac{1}{2}, \quad \text{ou } x^{V} - 2 = 16$$

etc. etc.

d'où l'on voit que l'enjeu ne doit pas même aller juſqu'à 2 Ecus, ſi l'on ne ſuppoſe le nombre des coups, ou infini, ou du moins illimité.

XXIV. 5. Cette conſidération peut conduire à une ſixieme ſolution. Puiſque la partie doit être égale, il faut que l'eſpérance de Pierre compenſe le riſque auquel il s'expoſe. Or, comme chaque coup conſidéré ſéparément peut également amener *croix* ou *pile*, & que le premier coup amenant pile, exclut tous les autres coups, il eſt évident que la probabilité de terminer le jeu au premier coup, eſt auſſi grande que celle de le terminer par l'un de tous les coups ſuivans, pris enſemble. Il faut donc, (NB. dès que l'on joue ſur plus d'un coup,) que l'enjeu $= e$ ſoit plus grand que le prix que Pierre promet ſi pile eſt amené au premier coup. Par ce moïen Pierre aura une probabilité $= \frac{1}{2}$ de gagner l'excédent de l'enjeu ſur le premier prix, ſavoir $e - 1$ Ecus; joint à l'eſpérance plus ou moins reculée qu'aucun coup n'aménera pile. Egalant donc le gain que Pierre peut faire, multiplié par la probabilité de gagner, à la ſomme qu'il peut perdre combinée avec la probabilité de perdre cette ſomme, on aura l'équation ſuivante:

($e -$

$$(e - 1) \times \tfrac{1}{2} + e \times \frac{1}{2^n} = (2^{n-1} - e) \times \frac{1}{2^n}$$

Equation d'où l'on doit tirer la valeur de l'enjeu $e$.

Or il y a ici par la nature du ſujet trois cas à diſtinguer:

1°. lorſque $n = 1$, c. à d. qu'on eſt convenu de ne jouer qu'en un ſeul coup, le premier terme $\frac{e-1}{2}$ n'a plus lieu, car il repréſente ici le cas où Pierre perdroit, où il améneroit pile; cas qui eſt exprimé par le ſecond membre de l'équation $\frac{2^{n-1} - e}{2^n}$. Il faut donc ou ſupprimer $\frac{e-1}{2}$, & alors l'équation donne $e \times \frac{1}{2^n} = (2^{n-1} - e) \times \frac{1}{2^n}$, donc $e = \frac{1}{2}$ Ecu; ou il faut ſupprimer le ſecond membre de l'équation; & l'on aura la ſomme du gain & de la perte, $(e-1)\frac{1}{2} + e \times \frac{1}{2^n} = 0$, ce qui donne également $e = \frac{1}{2}$ Ecu.

2°. Lorſque $n = \infty$, c'eſt à dire que le nombre des coups eſt illimité, le terme $e \times \frac{1}{2^n}$ devient infiniment petit; par conſéquent l'équation donne pour ce cas-ci: $(e - 1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc $e = 2$ Ecus.

3°. Entre ces deux valeurs extremes de l'enjeu, l'équation donnera pour tel nombre déterminé de coups que l'on voudra au deſſus de 1 la formule générale: $e = \frac{2^n}{2^{n-1} + 2}$. Ainſi l'on aura les valeurs de l'enjeu comme ſuit:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nombre des coups - - - | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7 | - - - | $\infty$ |
| Valeur de l'enjeu en Ecus | $\frac{1}{2}$. | 1. | $\frac{4}{3}$. | $\frac{8}{5}$. | $\frac{16}{9}$. | $\frac{32}{17}$. | $\frac{64}{33}$ | - - - | 2. |

XXV. On pourroit objecter contre cette ſolution que, dans le premier membre de l'équation, on fait entrer deux eſpérances de Pierre, dont il ne peut néanmoins jamais réaliſer qu'une; car ſi *pile* vient au premier coup, l'eſpérance $e \times \frac{1}{2^n}$ n'a plus lieu; & ſi celle-ci a lieu, le premier coup n'a pas amené pile. Mais il faut conſidérer que, pour déterminer le plus grand & le plus petit enjeu, nous avons effectivement fait évanouir celle des deux eſpérances qui ne ſauroit ſe réaliſer, en réduiſant l'équation, lorſque $n = 1$ à $e \times \frac{1}{2^n} = (2^{n-1} - e)\frac{1}{2^n}$ & lorſque $n = \infty$ à $(e-1)\frac{1}{2} = (2^{n-1}-e)\frac{1}{2^n}$. Or il ſeroit abſurde qu'entre ces deux cas extremes, l'enjeu fût plus grand, qu'il ne l'eſt lorſque le nombre des coups & des prix eſt cenſé infini; c'eſt pourtant ce qui arriveroit ſi l'on vouloit prendre la valeur moïenne des deux eſpérances, & en former l'équation $\left((e-1)\frac{1}{2} + e \times \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2} = (2^{n-1} - e)\frac{1}{2^n}$, ce qui donneroit $e = (2^{n+1}+\frac{1}{2})\left(\frac{1}{2^{n+1}+12}\right)$, valeur qui excéderoit 2 Ecus, dès que le nombre des coups iroit au delà de 3; quoique même ici l'enjeu le plus fort ne ſeroit que de trois Ecus, pour un nombre infini de coups.

Excepté les deux cas extremes, chacune des deux eſpérances concourt à modifier la valeur de l'enjeu, on n'en ſauroit exclure aucune; mais ces eſpérances elles-mêmes ſont à leur tour déterminées par la valeur de l'enjeu, & varient avec le nombre des coups; comme la table ſuivante l'indique.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre des coups | - - - - | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | $n$ - - | $\infty$ |
| Valeur de l'eſpérance | $\frac{e-1}{2}$ - - | $-\frac{1}{4}$. | 0. | $\frac{1}{8}$. | $\frac{3}{8}$. | $\frac{7}{8}$. | $\frac{2^{n-2}-1}{2^{n-1}+2}$ - - - | $\frac{1}{2}$ |
| Valeur de l'eſpérance | $e \times \frac{1}{2^n}$ - - | $\frac{1}{4}$. | $\frac{1}{4}$. | $\frac{1}{8}$. | $\frac{1}{8}$. | $\frac{1}{8}$. | $\frac{1}{2^{n-1}+2}$ - - - | 0. |

Ces

Ces deux eſpérances ont une valeur égale dans le cas qui donne $2^{n-2} - 1 = 1$, c. à d. lorſqu'on joue en trois coups; mais comme l'eſpérance $e \times \frac{1}{2^n}$ entre doublement dans la détermination de l'enjeu, tandis que l'eſpérance $(e - 1) \times \frac{1}{2}$ n'y entre qu'une fois, il n'y a aucun cas où elles contribuent également à fixer cet enjeu. S'il y avoit un tel cas, ce ſeroit lorſque la valeur de $e$ donnée par chacune de ces eſpérances priſes ſeules, ſeroit la même: il faudroit donc avoir $2^{n-2} = 2^n \times \frac{1}{2^{n-1}+1}$, ce qui ſuppoſeroit $2^{n-1} + 1 = 4$, & par conſéquent $n$ égal au nombre rompu $3\frac{1}{2}$.

XXVI. Au reſte ce probleme n'aiant rien d'intéreſſant que la difficulté qui réſultoit de ſa ſolution, il ſuffit, je crois, d'avoir levé cette difficulté ſans décider entre les différentes ſolutions qu'on pourroit imaginer pour fixer la valeur préciſe de l'enjeu; quoi qu'il en ſoit de celles que je viens de propoſer, il en réſultera au moins que l'illuſtre Auteur des Doutes a eû de très bonnes raiſons de rejetter l'enjeu croiſſant uniformément à l'infini. Je ne voudrois pas néanmoins dire avec lui qu'il eſt *phyſiquement impoſſible* que la même combinaiſon revienne conſtamment plus d'un certain nombre de fois; parce que ſi au coup $t$, par exemple, la probabilité d'amener encore *croix* étoit nulle, il faudroit non ſeulement qu'elle eût diminué ſucceſſivement juſqu'à s'évanouir préciſément à ce coup-là, mais il ſemble qu'il faudroit encore, qu'en prenant un nombre de coups plus grand $t + n$, cette probabilité devînt alors négative, d'où il réſulteroit que l'enjeu décroitroit à meſure que le nombre des coups dont l'on ſeroit convenu excéderoit celui où la probabilité d'amener encore *croix* ſeroit nulle. Or il eſt évident que, s'il n'eſt pas abſolument néceſſaire que l'enjeu augmente avec le nombre des prix, il eſt au moins inconteſtable qu'il ne doit pas diminuer à meſure que ceux-là augmentent.

On peut dire à la vérité que la nature du ſujet n'admet point de probabilité négative; & que l'impoſſibilité phyſique réſulte ici des viciſſitudes attachées au cours ordinaire de la nature. Mais il me ſemble que, dès qu'il eſt queſtion de la ſimple probabilité & de ſon calcul, on ne ſauroit inférer de l'ordre de la nature que ce que j'en ai inféré (art. VIII.), une nouvelle probabilité, ou tout au plus une certitude morale ſur le non-retour des cauſes phyſiques & mécaniques d'un événement toujours poſſible en lui-même, & qui, par cela même qu'il a déjà exiſté une ou pluſieurs fois, ne peut jamais devenir à la rigueur phyſiquement impoſſible. J'avoue qu'il eſt impoſſible phyſiquement que l'état des choſes reſte le même dans un monde où regne un mouvement perpétuel; mais, comme le même événement peut être produit en pluſieurs manieres différentes, il me paroit que tout ce qu'on peut légitimement conclure de l'ordre phyſique, c'eſt qu'il eſt moralement impoſſible, c. à d. infiniment peu probable, qu'un même événement fortuit revienne toujours.

OB-

# OBSERVATIONS
SUR
# L'INFLUENCE RÉCIPROQUE
DE LA
## RAISON SUR LE LANGAGE ET DU LANGAGE SUR LA RAISON.

PAR M. SULZER.

Si l'on trouve de très grandes difficultés dans les recherches ſur l'origine du langage, c'eſt que cette queſtion paroit n'admettre aucun point fixe duquel on puiſſe partir. On croit voir, d'un côté, que le langage ſuppoſe une raiſon cultivée juſqu'à un certain point; pendant que, d'un autre côté, l'on ne conçoit point comment la raiſon auroit pû faire des progrès ſans le ſecours d'une langue. Ces deux facultés paroiſſent être en même tems la cauſe & l'effet l'une de l'autre. C'eſt apparemment cette difficulté, d'abord en apparence inſurmontable, qui a fait croire à de grands Philoſophes que, pour expliquer l'origine du langage, il faut recourir à un miracle. On convient cependant qu'en bonne philoſophie il ne faut point recourir à des cauſes ſurnaturelles, juſqu'à ce que l'inſuffiſance des cauſes naturelles ſoit bien démontrée. Le but de ce Mémoire n'eſt pas de traiter cette matiere dans toute ſon étendue, mais d'y répandre quelque jour, ſi cela m'eſt poſſible, par des obſervations réfléchies ſur l'influence réciproque qu'ont ces deux facultés l'une ſur l'autre.

A n'enviſager le langage qu'en gros, il ne paroit préſenter que des arrangemens fort ſimples; des mots dont chacun pris à part eſt le ſigne d'une idée; des énoncés, ou des phraſes ſimples, qui marquent

des rapports fort ſimples entre ces deux idées; enfin, des propoſitions compoſées de pluſieurs phraſes & qui expriment une ſuite de rapports. Cela eſt parfaitement analogue au calcul algébrique, dans lequel chaque lettre priſe à part marque une quantité, deux lettres jointes ou disjointes, moyennant un ſigne de rapport, font une eſpece d'énoncé ſimple, & enfin, une formule compoſée de pluſieurs lettres, moyennant pluſieurs autres ſignes de rapport, marque une propoſition.

La premiere choſe qui ſe préſente dans les recherches ſur l'origine du langage, ce ſont les mots. *Quelle peut avoir été la marche de l'eſprit pour que l'homme s'aviſât de chercher des ſignes propres à repréſenter des idées, & par quels moyens a-t-il trouvé ces ſignes?* Voilà les deux premieres queſtions ſur leſquelles je ferai quelques obſervations qui, ſi je ne me trompe, ſerviront à faciliter la ſolution de ce probleme.

Il n'eſt pas poſſible de remonter à l'aide de l'hiſtoire juſqu'au crépuſcule de la raiſon, pour y voir les premiers efforts que l'homme a faits pour commencer un langage. Il ne paroit pas même néceſſaire de reprendre les choſes de ſi haut. Ce que fait aujourd'hui l'homme inſtruit, nous fera concevoir ce que faiſoit l'homme brute, privé encore du don de la parole. Les allures de l'eſprit ſont toujours les mêmes; les langues s'enrichiſſent & ſe perfectionnent probablement par les mêmes opérations qui en ont jetté les premiers fondemens. Il s'agit donc de recueillir exactement ce que l'expérience nous fournit ſur ce ſujet.

On connoit l'hiſtoire de cet aveugle-né auquel une heureuſe opération donna la vue depuis qu'il fut parvenu à l'âge de la raiſon. Lorſqu'il vit pour la premiere fois les divers objets qui étoient placés dans ſa chambre, il n'y diſtingua rien. Il ne fut frappé que de l'*enſemble*, qui lui parut tout d'une piece; il la prit pour une ſurface unie, diverſement colorée dans ſes parties. Il ne s'aviſa point d'imaginer que ce qu'il voyoit, fût compoſé de divers objets ſéparés les uns des autres,

tres, ni par conſéquent, de chercher à les nommer. Ce fait nous préſente une image de ce qui ſe paſſe dans l'eſprit, lorſqu'on voit pour la premiere fois des objets abſolument inconnus, & même ce qui s'eſt paſſé dans l'eſprit de l'homme brute. Ses ſens ont été frappés par mille objets, confondus dans une maſſe homogene, dans laquelle il ne ſavoit rien diſtinguer. Or il eſt évident qu'avant que l'on puiſſe s'aviſer de donner un nom à une choſe, il faut la diſtinguer de la maſſe totale des perceptions qu'on a & la regarder comme un objet à part, ſéparé ou diſtingué des autres. C'eſt donc en cela que conſiſte le premier pas que l'homme a du faire pour parvenir à une langue: diſtinguer, dans ſes perceptions, certaines parties comme des êtres ſéparés ou iſolés. Or ce premier pas n'a pû ſe faire qu'après que l'homme s'eſt rendu ces objets familiers; car auſſi longtems qu'un objet nous eſt abſolument nouveau, on a de la peine à y rien diſtinguer. Cette marche de l'eſprit ſe montre partout. Ceux qui entendent parler pour la premiere fois une langue qui leur eſt inconnue, n'y diſtinguent ni ſyllabes ni mots. Tout un diſcours leur paroit un bruit continu, qui n'a point de parties ſéparées; ce n'eſt qu'après avoir ſouvent entendu les mêmes phraſes, qu'on parvient à y diſtinguer les mots. Il en eſt de même de tous les objets nouveaux. Un homme qui n'a jamais vû aucun ouvrage d'Architecture, verroit un mur poſé ſur un ſocle, couronné d'une corniche & orné de pilaſtres, ſans s'aviſer d'y diſtinguer ces choſes-là. Si on lui demandoit ce qu'il voit, il répondroit qu'il voit un mur, & un mur qui eſt tout d'une piece: la nouveauté de l'objet ne lui permettroit pas de remarquer que le ſocle, la corniche & les pilaſtres ſont des parties du mur, que la penſée peut en ſéparer. En général, toute idée ſur laquelle on n'a pas réfléchi, reſte confuſe, c'eſt à dire, telle qu'on n'y diſtingue rien, quoiqu'elle ſoit compoſée de parties qui peuvent être repréſentées à part. Demandez à la plûpart des hommes qui réfléchiſſent peu, ce que ſont certaines choſes qu'ils ont vues mille fois, vous les trouverez fort embaraſſés à répondre. C'eſt que, faute d'avoir diſtingué les parties dont un objet eſt compoſé, il ne ſont pas en état de décrire cet objet, ou de nommer ſes parties, quand même les noms de ces parties leur ſeroient connus.

Ce

Ce premier pas que l'homme avoit à faire pour inventer un langage, étoit plus ou moins difficile, ſelon la nature des objets. Une attention légere ſuffiſoit pour quelques uns; l'eſprit d'obſervation & une réflexion ſoutenue par le génie étoit néceſſaire pour d'autres; enfin, il falloit encore pour certains cas que le hazard concourût avec le génie. Il eſt néceſſaire d'entrer ici dans quelque détail ſur ces opérations de l'eſprit.

La vue eſt de tous nos ſens celui qui nous facilite le plus cette premiere opération de l'eſprit par laquelle nous ſéparons certains objets de la maſſe confuſe de nos perceptions. C'eſt le ſeul des ſens qui nous laiſſe appercevoir bien vîte que les objets dont il excite la ſenſation ſont hors de nous. Tous les autres nous cachent l'objet de la ſenſation, & ne nous font appercevoir que l'effet qu'il fait ſur nos organes. La viſion ſe fait par des impreſſions ſi foibles qu'on ne ſent point l'action de la lumiere ſur l'œil; l'attention y eſt entierement dirigée vers l'objet, & non vers l'organe qui ſent, comme dans les autres ſenſations. D'ailleurs, la ſenſation de la vue eſt en elle-même moins homogene que celles des autres ſens. Les couleurs ſe diſtinguent infiniment mieux les unes des autres que les ſons, ou les odeurs; & nous voyons, outre les couleurs, les formes des corps & leur mouvement. Il eſt donc probable que les objets viſibles ont été les premiers que l'homme a diſtingués & dont il s'eſt formé des idées claires. Un homme voyant pour la premiere fois la ſcene de la Nature étalée à ſes regards, y a vu un tableau plat, diverſement coloré dans ſes parties. Mais, outre les couleurs, il y a diſtingué les formes, & voyant bientôt que quelques parties qu'il avoit commencé à diſtinguer, changeoient de place, il lui a été facile de les regarder comme des parties ſéparées. L'oiſeau qui d'abord ſembloit faire partie de l'arbre ſur lequel il étoit perché, s'envola & fit même entendre un ſon. Très peu d'attention ſuffiſoit pour former de cet oiſeau une idée détachée de la maſſe de la perception totale de la ſcene viſible. C'eſt ainſi qu'avec un léger effort, l'homme parvint à acquérir des idées ſur les choſes viſibles.

Il fal-

Il falloit plus qu'une ſimple attention pour ſaiſir les idées des propriétés & des accidens des corps; l'eſprit d'obſervation & de comparaiſon étoit néceſſaire pour cela. On ſent bien que l'homme brute, abandonné à ſoi-même, ne développe cette qualité que dans des occaſions extraordinaires. Ce ſont ordinairement les ſollicitations du beſoin qui rendent l'homme ingénieux, en le forçant de diriger toute ſon attention ſur l'objet de ſes deſirs. C'eſt cette attention ſoutenue qui rend les objets familiers. Il eſt probable que l'homme preſſé par la ſoif, & ne trouvant rien qui le ſoulageât qu'après nombre de tentatives inutiles, apprit par là à diſtinguer clairement l'eau de toutes les autres matieres ſenſibles, en la regardant comme l'élément propre à le ſoulager dans un beſoin auſſi preſſant.

Un grand nombre d'idées eſt probablement dû au hazard. La plûpart des idées *rélatives* me paroiſſent dans ce cas: on ne les auroit peut-être jamais formées, ſi l'expérience n'avoit amené l'obſervation de leurs *corrélatifs*. On n'auroit, par exemple, jamais formé l'idée de la *ſolidité*, ſi on n'avoit jamais ſenti des matieres fluides. Il eſt même très probable qu'il exiſte bien des propriétés générales des corps dont nous n'avons aucune idée, par la ſeule raiſon que leur contraire n'a jamais été obſervé. Nous ſommes à bien des égards dans le cas de cette Dame, qui ne ſe doutoit point d'un grand défaut qu'avoit ſon époux, faute d'avoir fréquenté d'autres hommes qui en fuſſent exempts. Nous ſentons bien des choſes ſans le ſavoir, parce que la ſenſation ne ceſſe jamais. C'eſt ainſi que tout le long de la journée, on peut entendre un bruit aſſez fort dont on ne s'apperçoit point à moins qu'on ne ſe ſoit bouché les oreilles pendant quelques momens.

C'eſt donc par les divers moyens dont je viens de parler que l'homme parvint peu à peu à débrouiller le cahos de ſes perceptions, & à prendre une connoiſſance claire de quelques idées en particulier; opération qui devoit néceſſairement précéder l'invention des mots, vû que l'on ne peut s'aviſer de nommer que les choſes dont on a l'idée claire. On voit par là, pour le remarquer en paſſant, que le nombre

des mots dans une langue ne peut jamais ſurpaſſer le nombre des idées claires qu'ont eu tous les individus enſemble de la Nation qui parle cette langue. Et comme il eſt probable que le nombre des idées claires ne ſurpaſſe pas beaucoup celui des mots, il s'enſuit que le nombre des mots d'une langue, joint au nombre de leurs ſignifications dérivées, eſt la ſomme de toutes les idées claires que poſſede la Nation qui parle cette langue.

De ce que nous venons d'obſerver, on peut encore tirer cette conſéquence; que celui qui invente un terme nouveau, ou qui emploie un mot déjà connu dans une nouvelle ſignification, a enrichi le fond de nos connoiſſances par une idée neuve. Cela ſuppoſé, il ne ſeroit pas impoſſible de déterminer de tems en tems le progrès qu'aura fait une Nation dans les connoiſſances depuis une certaine époque Il n'y auroit qu'à charger des Littérateurs philoſophes de lire tous les ouvrages qu'on y met au jour, pour en extraire tous les termes nouveaux & tous les mots pris dans un nouveau ſens, pour leſquels il n'y auroit point de vrais ſynonymes dans la langue. Ces termes prouveroient que l'eſprit s'eſt enrichi d'autant d'idées neuves. Mais je rentre dans ma route.

Après avoir fait voir comment l'homme a pû parvenir à fixer certaines idées, il s'agit de voir comment il a pû trouver des ſons qui puiſſent ſervir de ſignes pour exciter les mêmes idées dans l'eſprit des autres. Dans la langue, ces ſignes ne ſont que des ſons; & on ne voit pas d'abord comment un ſon peut être un ſigne intelligible d'une idée qui ne paroit avoir rien de commun avec ce ſon. Pour concevoir clairement la marche de l'eſprit dans cette invention, il faut commencer par obſerver qu'il y a quantité d'objets dans la nature qui s'annoncent par des ſons. Après que l'homme eut diſtingué ces objets & qu'il s'en fut formé les idées, il ne pouvoit plus rencontrer de grandes difficultés à les déſigner; il n'avoit qu'à imiter les mêmes ſons par leſquels ces objets s'annoncent. Car on voit que les organes de la voix ſont aſſez flexibles dans l'homme, & qu'il imite ſans difficulté un grand nombre de ſons variés.

Il eſt

Il eſt très probable que les premiers mots dans toutes les langues n'ont été que des ſons imités. On en voit encore les traces dans les langues formées, malgré les grands changemens que ces langues ont ſubis depuis leur origine. Cependant ces ſons naturels n'étant point articulés, ils pouvoient être imités de pluſieurs manieres; & le même ſon naturel pouvoit faire naître plus d'un mot, ſelon le degré de fineſſe des organes de celui qui les imitoit. C'eſt ce qui a produit la diverſité des langues. L'aboyement d'un chien, par exemple, pouvoit être imité par les uns en prononcant avec force la ſyllabe *hou*, pendant que d'autres croyoient l'imiter par le ſon *haou*. Le cri du canard parut aux uns pouvoir être rendu par le mot *ana*, aux autres par le ſon *ant*; & c'eſt delà que vient la double dénomination de cet animal, nommé *anas* en latin & *ant* ou *ent* en allemand. Ajoûtons à cela, que les ſons naturels mêmes varient, & occaſionnent par là une diverſité dans les imitations. On ſçait que le bruit du tonnerre reſſemble tantôt au ſon de la ſyllabe *ton*, tantôt à celui de la ſyllabe *bron*, de ſorte que le mot grec βροντη, *brontai*, pouvoit être le ſigne du tonnerre, tout comme le mot latin *tonitru*, ou le françois *tonnerre*. On peut faire la même remarque ſur le cri du taureau, (qui tantôt reſſemble au mot grec βους (*bous*), tantôt au mot allemand *ochs*,) & d'un grand nombre d'autres ſons naturels.

Il me ſemble donc que l'invention des mots par leſquels s'expriment des choſes qui dans la nature s'annoncent par des ſons, n'étoit pas fort difficile, & ne ſurpaſſoit pas les forces de l'homme brute. Or ces premiers élémens d'un vocabulaire une fois poſés, on conçoit comment ils ont pu ſervir à donner une plus grande étendue au premier langage. Toutefois le plus grand nombre de nos idées n'ayant aucun rapport apparent avec le ſon, on peut demander comment l'homme s'eſt aviſé de ſe ſervir d'un ſon pour déſigner une choſe qui n'a aucun rapport immédiat au ſon. C'eſt ce que je vais examiner.

Nous voyons que ceux qui découvrent ou conçoivent des idées neuves, ne créent jamais de ſons pour les exprimer; car ils prennent

un mot déjà connu ſoit dans leur langue, ſoit dans une autre, & l'altérent un peu, ou lui donnent un ſens nouveau. A' plus forte raiſon pouvons-nous ſuppoſer que les premiers hommes, qui n'avoient pas la facilité qu'on auroit aujourd'hui de marquer par des définitions, ou par des deſcriptions, le ſens des termes nouveaux, n'ont jamais pu s'aviſer d'exprimer une choſe par un ſigne purement arbitraire. Il faut certainement qu'ils ayent eu des raiſons priſes dans la nature pour donner tel nom à telle choſe. La difficulté de cette queſtion conſiſte à trouver la liaiſon naturelle entre les ſons & les choſes *non-ſonores*. Il eſt infiniment plus facile de ſentir comment les choſes ſe ſont paſſées que de décrire clairement la marche de l'eſprit dans ces opérations. Quiconque voudra réfléchir ſur les métaphores, & même ſur tous les tropes qui, dans toutes les langues du monde, ſont le plus grand nombre des termes, verra combien l'eſprit de l'homme eſt ingénieux à trouver des reſſemblances, & quelle eſt l'étendue de cette faculté qui produit l'aſſociation des idées. Ce talent eſt inné dans l'homme les peuples les plus groſſiers & les plus proches de l'état brute, les hommes même qui ſont nés ſourds & muets, le poſſedent. Une attention un peu réfléchie ſuffit pour le mettre en uſage. Il étoit donc auſſi l'appanage de l'homme avant que ſon langage fût formé. Et c'eſt ce talent commun à tous les hommes qui a donné au langage, très pauvre dans ſes commencemens, cette étendue qui l'a rendu propre à exprimer les choſes les plus éloignées, non ſeulement du ſens de l'ouïe, mais de toute matiere.

C'eſt l'imagination qui donne un corps, ou une forme matérielle, à chaque perception claire. Telle eſt la nature de notre eſprit, qu'il fait des efforts continuels pour rendre ſes perceptions claires & pour y imprimer des marques propres à les rappeller dans la mémoire. Or, rien n'étant plus clair que nos ſenſations, & ſurtout celles qui ſont produites par la viſion, nous rapportons aux ſens, & ſurtout à la viſion, toutes les perceptions intellectuelles. On comprend par là comment l'homme a pu trouver de l'analogie entre les objets qui, dans ſon pre-

premier langage, avoient des noms, & d'autres qui ſemblent d'abord être hors de toute liaiſon avec les ſons; & comment un petit nombre de ſons naturels qu'il a imités, a pû donner naiſſance à un langage qui exprime des choſes non-ſenſibles. Le ſon que rendent preſque tous les chiens quand ils ſont irrités, pouvoit ſe rendre par les ſyllabes *orr*, *irr*, ou *err*; la colere de l'homme a une analogie manifeſte avec cette paſſion du chien qu'on pouvoit exprimer par les ſyllabes ſusdites; d'où ſont nés très naturellement les mots ὀργὴ, *ira*, *irrité*, qui marquent la paſſion de la colere dans l'homme. De là il n'y a eu qu'un pas aſſez facile à faire pour employer le même mot ὀργὴ à déſigner en général toute paſſion impétueuſe. Une telle marche de l'eſprit exclut entierement les applications purement arbitraires d'un terme à une ſignification neuve.

Si l'on avoit conſervé les premiers termes radicaux des langues, je crois qu'on pourroit faire voir exactement la marche que l'eſprit a ſuivie pour arriver juſqu'aux ſignifications les plus éloignées du premier ſens. Mais, comme le plus grand nombre de ces termes nous manque, vû que les premiers noms ne ſont plus connoiſſables ſous les formes qu'on leur a fait prendre après une ſuite d'altérations qu'ils ont éprouvées, il eſt très rarement poſſible de découvrir les liens qui uniſſent enſemble les diverſes ſignifications d'un même terme. Ainſi il eſt facile de voir comment cet être actif qui fait notre eſſence a reçu dans la langue françoiſe le nom d'*ame*. C'eſt que le même être ſe nommoit *animus* ou *anima* en latin, que le même mot ſervoit auparavant à exprimer l'*haleine*, & que cela venoit de ce que, en Grec, le mot ἄνεμος ſignifie le vent. Les liaiſons de ces ſignifications ſont viſibles; mais, faute de ſavoir l'origine de ce dernier mot, nous ignorons comment on s'aviſa de donner au vent le nom d'ἄνεμος. Si la langue latine s'étoit perdue, on n'auroit rien compris du tout à la ſignification du mot *ame*. C'eſt juſtement ce qui eſt arrivé à l'égard d'un très grand nombre de mots qui, de quelques langues abſolument perdues, ont été reçus dans d'autres langues.

Remarquons ici que l'hiſtoire étymologique des langues ſeroit ſans contredit la meilleure hiſtoire des progrès de l'eſprit humain. Rien ne ſeroit plus précieux pour un Philoſophe que cette hiſtoire. Il y verroit chaque pas que l'homme a fait pour arriver peu à peu à la raiſon & aux connoiſſances; il y découvriroit les premiers traits de l'eſprit & du génie, les germes du jugement, les premieres découvertes de la raiſon naiſſante. Il exiſte un morceau précieux dans ce genre dans le Recueil des pieces qui ont concouru pour le prix que l'Académie donna en 1759. L'Auteur de cette piece, qui n'eſt qu'un fragment d'un grand traité ſur l'origine des langues, a gardé l'*incognito*, malgré les ſollicitations de l'Académie, qui ſouhaitoit de le connoître, & qui l'auroit encouragé à pouſſer plus loin ſes profondes recherches. Il ſeroit à ſouhaiter qu'on recueillît tout ce qui nous reſte de plus certain ſur la généalogie des mots. Car les langues s'alterent ſi conſidérablement par la ſucceſſion du tems, qu'on riſque de perdre à la fin toutes les origines des mots. On ſent bien que je ne parle point ici des travaux des étymologiſtes ordinaires, qui pour la plûpart ſont très frivoles. Les étymologies que j'eſtime, ſont celles qui nous feroient voir les progrès de l'eſprit humain conformément aux obſervations que je viens de faire ſur la formation ſucceſſive des langues.

Je viens de montrer ce que l'eſprit & le génie de l'homme brute ont fait pour arriver aux élémens d'une langue; je dois maintenant examiner les avantages que l'eſprit a pu tirer du langage, pour faire de plus grands progrès vers la raiſon cultivée. Mais, comme je n'ai parlé juſqu'ici que de l'invention des noms, je ne regarde encore la langue que comme une *Nomenclature*, comme une ſimple liſte de mots. Je ne parlerai pas même du premier avantage que l'homme tira de ſon langage, celui de communiquer à d'autres quelques unes de ſes idées. Cela eſt aſſez évident de ſoi-même. Je me propoſe d'examiner en quoi conſiſte l'avantage que donnent les noms impoſés aux choſes, rélativement au progrès que l'homme brute devoit faire pour arriver à une raiſon cultivée. Je me répreſente deux hommes

dont

dont le génie & l'expérience ſoient les mêmes, qui ayent le même nombre d'idées claires, avec cette différence entr'eux que l'un poſſede la faculté de les déſigner par des noms, que l'autre en ſoit privé; & j'examinerai quel ſeroit l'avantage que celui-là auroit ſur celui-ci.

D'abord, je trouve que les noms aſſurent la poſſeſſion des idées claires dont un grand nombre s'effaceroit de l'eſprit ſans leur ſecours. La mémoire eſt une faculté fort mécanique; il ſemble que l'eſprit ne ſe rappelle rien que par le ſecours de quelque ſenſation liée à l'idée qu'elle reproduit. L'hiſtoire d'un enfant ſauvage trouvé dans les bois, où probablement il avoit été expoſé dès ſa premiere enfance, nous apprend que la mémoire manque abſolument à l'homme qui ne peut fixer ſes idées par des ſignes. On a beaucoup plus de facilité à ſe rappeller des idées ſenſibles que des idées abſtraites. Sans les mots qui donnent un corps aux idées, on ne ſe retraceroit que celles des choſes ſenſibles, qui ſe diſtinguent bien d'elles-mêmes, comme celles d'un arbre, d'un animal & d'autres choſes ſemblables; toutes les autres idées s'effaceroient de l'eſprit ſans le ſecours des mots. Les tons, ſurtout quand ils ſont bien articulés, ſont des ſenſations qu'on ſe rappelle avec aſſez de facilité. Toutes les fois donc que nous voyons une choſe déſignée par un mot, ce mot nous revient en même tems, & nous rappelle que cet objet eſt un être dont nous avons déjà eu l'idée; ce qui nous engage à répéter, quoique très rapidement, l'opération par laquelle nous ſommes parvenus la premiere fois à former l'idée claire de cet objet. D'un autre côté, les ſons qui ont déjà frappé l'oreille, reviennent de tems en tems, ſoit qu'on les entende réellement, ſoit que quelque ſon analogue nous les rappelle; alors l'idée qu'on leur avoit aſſociée revient auſſi. Chacun ſait par ſa propre expérience combien il eſt difficile de ſe rappeller les idées que l'on ne ſait pas encore exprimer; & ceux qui liſent les ouvrages des Philoſophes modernes avec l'attention qui eſt néceſſaire pour remarquer les progrès inſenſibles de l'eſprit humain, auront obſervé que les idées neuves que les inventeurs préſentent de tems en tems, ne prennent dans l'eſprit du public & ne ſe répan-

pandent qu'après qu'on a trouvé des termes propres à les fixer. C'eſt une choſe très digne d'être remarquée que la lenteur avec laquelle des branches entieres de nos connoiſſances s'étendent, avant qu'on ſoit parvenu à établir le langage propre à ces ſortes de vérités. Des connoiſſances très importantes, clairement développées dans les écrits des Génies inventeurs, reſtent quelquefois des demi-ſiecles, en quelque maniere cachés ou indéchiffrables juſqu'à ce qu'un autre Génie vienne former & établir le langage requis pour cela. Alors ce qui étoit comme enſéveli dans des mines eſt produit au grand jour & mis à la portée de tout le monde. C'eſt le ſervice qu'a rendu le célebre *Wolff* aux vérités que *Leibnitz* avoit vues & propoſées.

Cette obſervation mérite d'être miſe dans un plus grand jour. Suppoſons pour cet effet qu'un grand Architecte entreprenne de répandre la ſcience & le goût de ſon art chez un peuple auquel cet art fût encore inconnu. Que cet Architecte parle de bâtimens avec toute la clarté imaginable, mais ſans ſe ſervir des termes de l'art & des expreſſions propres aux Architectes; qu'il ſupplée au défaut de ces termes par des deſcriptions, & même par de bonnes définitions; il eſt certain qu'il avancera avec une lenteur extreme. Mais qu'au lieu de cette méthode, il commence à rendre familier à ſes éleves le langage de ſon art; alors il parviendra en peu de tems à leur en communiquer auſſi la ſcience & le goût. Faiſons encore attention à ce qui nous arrive lorſque nous nous mettons à étudier une ſcience nouvelle pour nous. Quelque lumineux que ſoit l'Auteur que nous avons choiſi pour guide, quelques nettes & préciſes que ſoyent ſes définitions; nous ne ſaiſiſſons les choſes qu'après que le langage propre à ce genre de connoiſſance nous eſt devenu familier. Alors tout d'un coup la clarté du jour ſuccede au long & ténébreux crépuſcule où nous étions plongés auparavant. Cela prouve ſuffiſamment combien la mémoire & l'imagination gagnent par les noms.

J'ajoute encore une autre obſervation. C'eſt que ſouvent un concours fortuit de pluſieurs circonſtances nous fait appercevoir une idée

idée neuve & importante. Dans ce cas on eſt preſque ſûr de la perdre bientôt après, ſi l'on ne prend pas la précaution de la marquer par quelque ſigne. Pour faire revenir la même idée, il faudroit le même concours de circonſtances, ce qui n'arrive preſque jamais. A-t-on un mot propre pour nous en rappeller les principales, alors, à l'aide de ce mot, elles reviennent toutes, & amenent de nouveau cette idée que nous aurions été fâchés de perdre. Voilà en quoi conſiſte le premier avantage du langage.

J'obſerve, en ſecond lieu, que les mots abregent conſidérablement toutes les opérations de l'eſprit, en prenant ſouvent la place des idées qu'ils repréſentent, & cela ſans aucun danger, pourvu qu'on n'en abuſe pas. Dans une foule de cas, les mots ont le même avantage que donnent dans le calcul les caracteres. On ſait qu'il ſeroit impoſſible de trouver, par le raiſonnement, le réſultat d'un grand nombre de calculs, c'eſt à dire que ſi, au lieu de caracteres, on vouloit toujours raiſonner d'après les idées, ſouvent on ne parviendroit point à la derniere concluſion que l'on cherche. Dans le calcul on opere ſimplement ſur les caracteres, & l'on ſe contente de les traduire, ou de leur ſubſtituer les idées mêmes, lorſque moyennant le mécaniſme du calcul les formules ſont réduites à une certaine ſimplicité. C'eſt ainſi que fort ſouvent on peut raiſonner par les mots, ou ſignes ſeuls, ſans ſe rendre compte à tout moment de leur ſignification; ce qui abrege conſidérablement le raiſonnement & le rend clair en l'abrégeant. Cette obſervation a été faite par pluſieurs Philoſophes; & M. *Lambert* l'ayant très bien développée dans ſon *Organon*, je puis me diſpenſer d'en parler plus au long. C'eſt donc en cela que conſiſte le ſecond avantage du langage, avantage qui eſt très important.

Un troiſieme avantage réſulte de ce que les mots conduiſent à l'obſervation ou à la réflexion ſur les choſes mêmes & fortifient par là l'eſprit d'invention. Les mots, ou termes propres à un certain genre, forment pour ce genre ce que les Anciens nommoient les *Topiques*, à l'aide deſquels on peut étendre les connoiſſances de ces objets. Ceux

qui, en fait de peinture, poſſedent tous les termes d'art, ſont mieux en état que d'autres de juger ſi un tableau eſt conforme ou non à toutes les regles de l'art. On conçoit ſans grande difficulté, comment les termes ſeuls les conduiſent dans l'examen d'un morceau de peinture. Cela me diſpenſe d'entrer dans un détail qui ne pourroit être qu'ennuyeux, mais qu'il eſt utile d'avoir devant les yeux pour ſaiſir l'avantage des termes d'art. Ceux auxquels les termes de l'*Ontologie*, qui expriment les qualités & les rélations communes aux êtres en général, ſont familiers, ont beaucoup plus de facilité d'analyſer les matieres philoſophiques, que ceux qui ignorent ces termes. Pluſieurs Philoſophes qui affectent un mépris ſouverain pour l'Ontologie, ignorent combien ils doivent à cette ſcience pour ſa nomenclature ſeule. Une ſcience ne peut jamais pécher par un trop grand nombre de termes; pourvû qu'à chaque terme réponde une notion réelle. Ces mots *pourquoi? quand? comment? par qui? pour qui? rélation*, *eſſence*, *accident*, etc. occaſionnent ſouvent des recherches qu'on auroit négligées, ſi la mémoire n'avoit pas fourni ces mots, & ſi ces mots n'avoient pas rappellé les idées qu'ils expriment. C'eſt ainſi que le célebre *Linné* a conſidérablement étendu la Botanique, par cela ſeul qu'il y a introduit un grand nombre de termes pour déſigner les formes, les figures, les ſituations & les proportions des parties dans les plantes. Muni de la connoiſſance de ces termes, un Botaniſte peut infiniment mieux décrire une plante, pour connoître le genre & l'eſpece auxquels elle appartient, qu'on ne le pouvoit auparavant. Un très grand nombre de plantes décrites par *Théophraſte*, *Dioſcoride* & d'autres Anciens, nous reſte entierement inconnu par la ſeule raiſon que la nomenclature de la Botanique manquoit dans ces tems-là. La connoiſſance exacte & approfondie de quelque ſujet que ce ſoit dépend donc, en grande partie, de la richeſſe de la langue dans laquelle on penſe. Le degré d'étendue, de clarté & de préciſion de nos connoiſſances eſt toujours égal à celui dans lequel nous ſavons les communiquer. Tout homme qui, faute de termes & d'expreſſions, ne ſait pas s'expliquer clairement & nettement, ne penſe pas non plus avec clarté & netteté.

Car

Car, ſans le ſecours des mots, nous n'avons qu'une connoiſſance *intuitive* des choſes, nous ne ſentons que confuſément ce qui leur appartient. Les mots qui déſignent les parties d'une penſée ou d'une idée, la débrouillent & nous mettent en état de la développer exactement.

Cela mérite une conſidération particuliere; car c'eſt par cet endroit qu'une langue bien cultivée fournit une partie des avantages qu'un grand Philoſophe a ſouhaité de procurer aux Sciences par une eſpece de langue univerſelle & philoſophique. Ces avantages conſiſtent en ce qu'une langue ſuffiſamment riche peut ſervir, comme de calcul, pour déterminer exactement ce qu'on ne peut eſtimer qu'à peu près, lorſque cette richeſſe lui manque. Comme un Mécaniſte qui n'eſt point calculateur connoit à peu près, par eſtimation, l'effet que doit produire une machine, au lieu que le Géometre qui ſait déterminer & marquer par des ſignes juſqu'aux moindres minuties de toutes les quantités qui entrent comme cauſe ou effet dans l'action de la machine, en détermine très exactement l'effet total; de même un homme de génie dont la langue eſt pauvre, ſent quelquefois les choſes par une eſpece d'eſtimation, tandis qu'un Philoſophe qui poſſede une langue riche détermine très exactement ce que l'autre n'avoit vu qu'à peu près. Il y a mille choſes dont nous n'avons que des connoiſſances très imparfaites par le ſeul défaut des termes. Qui eſt-ce qui eſt capable de décrire exactement une phyſionomie? L'œil ſeul, combien de choſes n'annonce-t-il pas, ſans que perſonne puiſſe décrire les modifications de cet organe qui produiſent ces expreſſions? Comment décririez-vous à un autre la forme & l'apparence de l'œil vif, ou de l'œil languiſſant; de l'œil qui marque le déſir, la confiance, la crainte, l'embarras? Or tout cela ſe ſent, & perſonne n'eſt capable de l'exprimer. Je ne crois pourtant pas que cela ſoit impoſſible; il y a cent ans qu'on auroit douté qu'il fût poſſible de décrire une plante au point de la faire d'abord connoître à celui qui la verroit pour la premiere fois. Je ſuis dans l'opinion que, ſi le génie de l'homme avoit fait autant d'efforts pour connoître exactement les phyſionomies, & pour nommer toutes les

fications du viſage & de ſes parties, qu'on en a faits pour décrire les plantes, on décriroit aujourd'hui les phyſionomies avec la même exactitude qu'on décrit les plantes. Or c'eſt par cette facilité de décrire les choſes exactement, que le raiſonnement peut atteindre à cette évidence & à cette certitude qu'on admire dans les Mathématiques.

Car la véritable raiſon de l'évidence que l'on regarde ſouvent comme un privilege excluſif de cette ſcience, vient de ce qu'il n'entre abſolument aucune idée dans les raiſonnemens des Géometres qui ne ſoit exprimée par un ſigne, ſoit mot, ſoit caractere. Moyennant cela, on peut être toujours ſûr de n'avoir rien négligé & d'avoir eu égard à tout ce qui influe ſur les concluſions. Une équation analytique, par exemple, a deux membres que le Géometre juge être égaux, ſi vous en doutez, il peut vous en convaincre en développant les termes de chaque membre; & ce développement eſt toujours poſſible, parceque la plus petite quantité qui entre dans la compoſition des termes peut être marquée par ſon ſigne. Or, par tout où le Philoſophe a le même avantage que le Géometre, (ce qui arrive néanmoins rarement,) ſes raiſonnemens ſont auſſi évidens & auſſi ſûrs que ceux du Géometre.

On voit par là de quelle importance eſt la richeſſe d'une langue pour l'avancement & la certitude des connoiſſances, & que c'eſt avancer ces connoiſſances & leur certitude que d'inventer des mots. Cela ſera plus évident pour ceux qui voudront réfléchir ſur l'obſervation ſuivante.

Pluſieurs grands Géometres qui ont travaillé avant la découverte du calcul infinitéſimal, poſſédoient à peu près les connoiſſances qui, jointes à la pratique de ce calcul, ont produit de ſi grandes découvertes dans les Mathématiques. Il ne leur manquoit que les ſignes & *l'algorithme* du calcul, ou cette eſpece de langue par laquelle ils auroient exprimé diſtinctement les mêmes idées qu'ils avoient ſenties. N'ayant point tenté, ou n'ayant peut-être pas réuſſi à trouver une méthode convenable pour marquer leurs idées, mille vérités très importantes leur

leur ont échapé. La même choſe eſt arrivée à pluſieurs des anciens Philoſophes, qui ont poſſédé implicitement tout ce qu'il falloit pour parvenir à la certitude de diverſes vérités métaphyſiques, ſans y arriver, faute de ſavoir pourſuivre le raiſonnement par la privation des termes propres à fixer leurs idées confuſes. Plus on réfléchit ſur l'effet du langage, mieux on voit, que la parole eſt à la raiſon & aux connoiſſances en général ce que l'analyſe eſt aux Mathématiques. Cette analogie paroit encore plus clairement dans les parties de l'analyſe où cette belle ſcience eſt encore défectueuſe. On ſait que la ſolution de pluſieurs problemes n'a pu réuſſir juſqu'ici que par cette raiſon ſeule que la langue analytique eſt imparfaite, & qu'il reſte des formules ou des quantités complexes qu'on ne peut développer faute de termes, ou de ſignes. Pluſieurs découvertes de calcul ne ſont au fond que des manieres neuves de déſigner les choſes connues auparavant. Souvent même une maniere neuve d'exprimer ou de caractériſer des choſes pour leſquelles on avoit déjà eu des caracteres moins parfaits, amene de très belles découvertes. Par la même raiſon, une maniere plus heureuſe d'exprimer une penſée, peut occaſionner ou même opérer de nouvelles découvertes.

Les remarques que je viens de faire, s'étendent ſur tous les mots en général, quand même ils ne ſeroient que des ſignes purement arbitraires des notions qui leur répondent. Mais il y a une claſſe de mots qui méritent une attention particuliere, & deſquels l'influence ſur la raiſon eſt encore plus importante. Ce ſont les termes qui, par leur ſignification primitive, deviennent des ſignes naturels des idées qu'ils expriment.

J'entends par ſignes naturels, les termes qui expriment des reſſemblances réelles ou métaphyſiques entre deux objets, dont l'un répond au ſens propre du mot, l'autre à ſon ſens figuré. Tel eſt, par exemple, le mot d'*éblouir*, qui, dans le ſens propre, marque un trop grand effet de la lumiere, par lequel la viſion eſt troublée, & dans le ſens figuré une trop grande force dans la perception. Telles ſont en géné-

ral toutes les expreſſions métaphoriques. Nous allons conſidérer les avantages qu'on en tire pour la culture de l'eſprit.

Il y a dans nos perceptions un nombre infini d'idées très obſcures que l'on ſent ſans pouvoir les démêler. Les hommes de génie, doués d'une grande pénétration, ont moins de ces idées que les autres; les efforts qu'ils font pour les rendre claires, leur découvrent des reſſemblances entre ces idées & d'autres plus faciles à être ſaiſies. De là naiſſent les expreſſions métaphoriques, par le moyen deſquelles les idées obſcures deviennent claires à des hommes d'un moindre génie. Car, dès qu'on nous avertit qu'une choſe dont nous n'avons pû nous former une idée juſte, reſſemble à une autre choſe que nous connoiſſons mieux, nous nous efforçons à découvrir cette reſſemblance; nous la découvrons peu à peu, & par là notre idée obſcure ſe change en idée claire. C'eſt là le premier avantage qu'on tire des métaphores. Nous voyons des hommes couchés par terre; leurs attitudes nous font appercevoir qu'ils ſont très fatigués; chaque membre exprime la laſſitude qui les accable; mais nous ne démêlons point en quoi conſiſte cette expreſſion. *Virgile* qui avoit vû des gens dans ce cas, dit que leurs corps avoient été *verſés ſur l'herbe*, *fuſi per herbam.* Cette métaphore très heureuſe répand une grande lumiere ſur ce tableau; chaque membre de ces hommes ſi fatigués nous paroit exactement deſſiné.

Une telle métaphore produit un effet ſemblable à celui que font les figures dans la Géometrie. Cette ſcience ſeroit encore dans l'enfance ſans le ſecours des figures, qui aident l'eſprit à fixer avec exactitude & netteté des idées qui ſans cela reſteroient ſi confuſes qu'on n'en tireroit aucun parti. C'eſt ainſi que la métaphore nous aide à fixer les idées qui, ſans ce ſecours, reſteroient confondues dans la maſſe de nos perceptions, & qu'elle rend viſible & palpable ce qui paroit imperceptible à l'eſprit. Pour comprendre toute l'importance de cet avantage de la métaphore, il faut conſidérer que les eſprits les plus pénétrans ſentent à chaque inſtant une infinité de choſes qu'ils ne démêlent pas, & que par conſéquent il y a dans l'eſprit de l'homme un nombre

infini

infini d'idées obſcures qui mettent des bornes au progrès de ſes connoiſſances. Chaque métaphore heureuſe recule ces bornes en tirant de l'obſcurité une de ces idées, qui avoit été inutile juſqu'alors.

Il arrive même ſouvent que ces métaphores conduiſent à des découvertes importantes. Nous en voyons un exemple très frappant dans la théorie des idées de *Leibnitz*. Ce grand homme, en développant ce qu'il y avoit de confus dans ces expreſſions métaphoriques d'idées *claires*, *obſcures*, *confuſes* & *diſtinctes*, jetta les fondemens d'une Logique vraiment utile, & ouvrit en même tems une carriere toute nouvelle qui a fourni depuis à la Pſychologie un très grand nombre de vérités importantes. Il y a longtems que les Orateurs ont reconnu cet avantage des métaphores, puiſqu'ils ont recommandé comme une regle très importante pour l'invention des argumens, la réduction des termes métaphoriques à leur ſignification primitive. Il eſt certain que ſouvent le ſens primitif d'un mot fait découvrir une image dont on tire des éclairciſſemens très conſidérables, qu'on auroit cherchés en vain par toute autre voie. Je voudrois qu'un Philoſophe profitât de la vogue exceſſive où ſont les Dictionnaires, pour en donner un des métaphores les plus riches. Un tel ouvrage bien exécuté feroit un vrai tréſor & ſerviroit à avancer très conſidérablement les connoiſſances philoſophiques en tout genre. Il eſt du moins évident que les métaphores d'une langue renferment toutes les vérités qu'on a entrevues ſans les pouvoir développer. Or il eſt inconteſtable que tout homme ſent infiniment plus de vérités qu'il ne peut en démontrer. Car, comme il y a des idées qu'on ne ſaiſit que par intuition, il y a auſſi des raiſonnemens intuitifs, ou implicites. Souvent on ſent la certitude d'une concluſion ſans pouvoir développer les prémiſſes d'où elle réſulte. Cela arrive dans deux cas; ou, lorſque les notions qui entrent dans un tel raiſonnement ſont trop ſimples pour être développées ou lorſque leur nombre eſt trop grand pour être ſaiſi avec clarté par un ſeul acte de l'eſprit. Ces vérités ne peuvent donc être démontrées aux autres; mais une image heureuſe peut les leur faire ſentir. Si, par exemple,

on

on ne réuſſiſſoit pas à convaincre un homme par un raiſonnement développé, qu'il y a un Dieu, auteur & conſervateur de l'ordre de la Nature, on pourroit lui faire ſentir cette vérité en parvenant à lui faire voir une reſſemblance réelle entre le cours de la Nature & un vaiſſeau gouverné par un bon pilote. Dès qu'on apperçoit cette reſſemblance, on n'a plus beſoin de raiſonnement pour être convaincu de la plus ſublime de toutes les vérités.

Ces remarques font voir, que les progrès de la raiſon dépendent beaucoup de la perfection de la partie métaphorique des langues. Le Philoſophe augmente le fond de nos connoiſſances par des raiſonnemens démonſtratifs, & le Bel-eſprit en recule les bornes par l'invention de métaphores heureuſes. L'imagination eſt quelquefois auſſi profonde que l'entendement le plus pénétrant. C'eſt à elle que l'on doit ces expreſſions heureuſes qui, des ténebres même, font ſortir des éclats de lumiere. L'homme d'eſprit voit les reſſemblances les plus fines & les plus profondément cachées; & ſon heureux génie trouve les moyens de les exprimer. Les écrits des meilleurs Poëtes anciens & modernes & ceux des Beaux-eſprits philoſophes renferment des tréſors dans ce genre. Celui qui voudroit ſe donner la peine de les en tirer, rendroit un très grand ſervice à la Philoſophie. Un tel ouvrage renfermeroit les vérités les plus utiles ſous la forme la plus propre à faire impreſſion. Souvent donc l'invention d'un terme ou d'une image peut valoir une découverte. C'eſt une raiſon de plus d'encourager les Beaux-eſprits. Le Philoſophe cherche toujours la vérité & la manque ſouvent; le Bel-eſprit la trouve ſouvent ſans la chercher.

Le ſuccès de ce travail dépend en grande partie de la connoiſſance des productions de la Nature & de celles des Arts. Car c'eſt l'analogie entre le monde intellectuel & le monde viſible qui fournit ces expreſſions heureuſes. Nous avons en cela un grand avantage ſur les Anciens; la connoiſſance de la Nature eſt infiniment plus étendue & plus approfondie qu'elle ne l'étoit de leur tems, & les Arts fourniſſent un très grand nombre de productions qui leur étoient inconnues. On

n'a

n'a pas assez profité de cet avantage. Il semble du moins que, si les langues modernes de l'Europe avoient tiré des découvertes tout le profit possible, elles auroient dû s'enrichir au point qu'en fait de Morale & de Philosophie, on sentiroit & on exprimeroit mille idées inconnues aux Anciens. Ce n'est pas que je prétende qu'on n'ait rien profité du tout à cet égard. Je conviens qu'on peint beaucoup mieux aujourd'hui les sentimens du cœur que ne le pouvoient faire les Anciens; mais cet avantage ne me paroit pas proportionné aux progrès qu'on a faits dans presque tous les arts & toutes les sciences. Je crois que mille idées nous échappent encore, qu'il seroit possible de fixer par des métaphores que fourniroient des termes déjà connus & employés, pour exprimer des choses visibles, analogues à ces objets intellectuels qui nous échappent encore. J'ai observé souvent que des gens qui exercent des arts mécaniques employent des métaphores très heureuses, tirées des termes techniques de leur art, mais inconnues aux personnes d'une condition plus relevée. Les Philosophes & les Beaux-esprits devroient recueillir ces termes, les ennoblir & leur donner des significations plus générales; la Philosophie en tireroit certainement un profit considérable.

Dans toutes les remarques que j'ai proposées jusqu'ici sur les langues, je ne les ai envisagées que comme des dictionnaires des mots: il me reste à les considérer entant que discours ou instrumens propres à exprimer les changemens qui arrivent aux êtres & les rapports qu'il y a entr'eux. Il est probable que la nécessité seule a produit les premieres tentatives pour exprimer par des mots une chose arrivée. Je m'imagine que les premiers hommes ont eu longtems des idées & des mots pour exprimer certaines choses, avant que de penser à distinguer plusieurs modifications. En voyant, par exemple, un animal, dont ils s'étoient formé l'idée, & auquel ils avoient même donné un nom, la même idée & le même nom leur revenoit, soit que cet animal fût couché ou sur pied, qu'il se tînt tranquille ou qu'il marchât; ils n'auront pas d'abord séparé les idées de ces diverses modifications de l'idée de l'animal même. Il n'y a que l'habitude de voir ces objets, ou quelque

événement intéreſſant, qui ait pû les engager à faire ce pas. C'eſt ce qui nous arrive encore avec tous les objets nouveaux. Nous les voyons longtems avant que de diſtinguer pluſieurs de leurs modifications. Un homme qui a toujours vécu dans l'enceinte d'une ville verra un champ couvert de diverſes eſpeces d'herbes, ſans faire la moindre attention à pluſieurs choſes qu'un Botaniſte ou un Cultivateur y obſerve au premier coup d'œil.

Je crois donc que des cas extraordinaires ont engagé les hommes à diſtinguer les modifications des êtres. Un loup, par exemple, aura déchiré une brebis: le berger vouloit inſtruire ſes camarades de cet événement; il voyoit fort bien que les mots de *loup* & de *brebis* ne ſuffiſoient pas pour le leur annoncer. En ſe rappellant vivement la ſcene, il voyoit les deux animaux, mais il diſtinguoit de plus l'action de l'un & la ſouffrance de l'autre; il cherche à les exprimer. Suppoſons qu'il ait trouvé un terme pour exprimer l'action de *dévorer*. Ces trois mots *loup*, *brebis*, *dévorer*, étant donnés, il s'agiſſoit de les énoncer de façon à faire comprendre ce qui eſt arrivé. Il eſt viſible que ces trois mots pris dans les cas abſolus ont pû ſuffire pour déterminer le ſens de la phraſe que *le loup a dévoré la brebis*; car la partie ſouffrante étoit aſſez déterminée par la nature même du ſujet. Mais tous les cas ne ſont pas auſſi ſimples que celui-ci. Il ſert cependant à nous faire comprendre qu'il y a eu des cas où des noms joints enſemble, ſans autres modifications, ont pu exprimer une phraſe. Il falloit après cela des cas d'une autre nature pour faire comprendre à ces hommes, que de telles phraſes étoient inſuffiſantes pour s'exprimer ſans équivoque. Ces cas pouvoient fort facilement arriver. Suppoſons, par exemple, qu'un homme, preſſé par la faim & voulant déclarer ce beſoin, ait dit à ſon camarade *moi manger*. Ces deux mots pouvoient dire qu'il a mangé ou qu'il deſire de manger. On ſent de quelle importance il étoit d'ôter l'équivoque de ſa phraſe. La néceſſité qui rend ingénieux lui aura fait tenter mille moyens pour y réuſſir. Changement d'accent, inverſion, terminaiſon, ſon auxiliaire, rien n'aura été négli-

négligé pour ſe tirer d'embarras. Voilà les premieres tentatives pour ſe procurer une Grammaire. Ce n'eſt ſûrement pas par théorie ou par ſpéculation que les hommes ſont parvenus à modifier les mots pour exprimer les modifications dans les choſes; c'eſt la néceſſité ſeule qui les y a forcés.

Mais comment l'homme a-t-il trouvé ces modifications des mots? J'avoue qu'il me paroit extrêmement difficile d'expliquer cela. C'eſt ſans doute le hazard qui y a contribué le plus. Auſſi voyons-nous que les uns ont réuſſi d'une façon & les autres d'une autre, ce qui conſtitue les différences grammaticales dans les diverſes langues. C'eſt donc moins la raiſon que le hazard qui a commencé la Grammaire. Mais c'eſt la raiſon & une raiſon très cultivée qui l'a perfectionnée.

Ces obſervations nous découvrent aſſez clairement la marche que l'homme a ſuivie pour parvenir aux élémens du diſcours, ou à ces phraſes ſimples qui n'expriment qu'une ſeule propoſition. Il eſt probable que les langues qui enſuite ont été les mieux cultivées, ſont reſtées très longtems dans ce premier état: il y a même des nations dont la langue n'eſt point ſortie encore de cette enfance. (*). Quand on réfléchit ſur la diſtance prodigieuſe qu'il y a entre une langue qui n'eſt compoſée que de phraſes ſimples & une langue cultivée qui a ſes périodes compoſées, on a de la peine à concevoir, comment l'homme a pu franchir le pas pour arriver de l'une à l'autre.

Repréſentons-nous un homme à moitié ſauvage encore, qui n'a que des monoſyllabes dans ſa langue, ſans prépoſitions, ſans conjonctions, ſans modes pour les verbes; ſuppoſons, dis-je, qu'un tel



(*) On conſerve dans la Bibliotheque de l'Abbaye de St. Gal en Suiſſe, pluſieurs traductions allemandes d'Auteurs grecs & latins: ces traductions ſont du VII ſiecle; elles ont cela de particulier que les mots allemands ſe ſuccedent dans le même ordre qui regne dans les originaux. On voit à peu près la même choſe dans la traduction gothique des Evangiles, connue ſous le nom de *Codex argenteus*, qui eſt du III ſiecle. Cela prouve que ces langues n'avoient pas encore, dans ce tems-là, de conſtruction qui leur fût propre.

homme cherche à raconter qu'il a couru après un lievre, qu'il auroit pris s'il n'étoit pas tombé au moment qu'il alloit l'attraper. Il lui faut un nombre d'énoncés, ou de propoſitions ſimples, pour raconter ce fait: comme par exemple, *j'ai couru après le lievre, j'étendois le bras, je voulois le prendre, je ſuis tombé, je ne l'ai point pris.* Que l'on compare ce long diſcours, à la phraſe qu'une langue formée fourniroit pour exprimer la même choſe, & l'on comprendra combien de pas il a fallu faire pour arriver de l'une à l'autre.

Cependant ce premier langage monoſyllabique avoit un avantage très conſidérable ſur celui qui ne ſeroit compoſé que de noms. Il pouvoit ſuffire pour former des raiſonnemens exacts, qui ne ſe font preſque que par des énoncés ſimples. La raiſon pouvoit faire des progrès conſidérables, moyennant une telle langue: ces progrès rendirent l'homme capable de la perfectionner peu à peu; mais l'ouvrage devoit naturellement être long & difficile.

La perfection grammaticale d'une langue étant l'ouvrage de la raiſon & du génie, elle peut ſervir d'échelle pour meſurer le degré de raiſon & de génie des peuples. Si par exemple, nous n'avions, point d'autre monument pour conſtater l'heureux génie des Grecs, leur langue ſeule ſuffiroit pour cela. Quand une langue eſt, généralement parlant, inſuffiſante pour rendre dans une traduction les fineſſes d'une autre langue, c'eſt une marque ſûre que le peuple pour lequel on traduit, a l'eſprit moins cultivé que l'autre.

Si c'eſt la raiſon & le génie qui ont perfectionné les langues; elles, de leur côté, rendent les plus grands ſervices à la raiſon & au génie. On peut diſtinguer trois périodes, ou trois âges, dans les langues. Le premier période eſt celui où la langue n'a que des noms, & des verbes à l'infinitif, qui au fond ne ſont que des noms: le ſecond période eſt celui où elle a, outre les noms, des énoncés ſimples,

ou

ou des propoſitions qui ne renferment qu'un ſeul ſujet avec un attribut; le troiſieme enfin, où elle a des propoſitions complexes. Dans le premier période de la langue, l'homme ne peut avoir que des connoiſſances intuitives; le moindre raiſonnement eſt impoſſible alors: dans le ſecond, il peut former des raiſonnemens exacts, mais ils ont la forme & l'aridité des démonſtrations de Géométrie; l'homme peut raconter des faits; mais il lui faut cent phraſes pour un récit que Tacite auroit renfermé dans deux lignes. Aucun réſumé, aucune réunion d'un nombre d'idées ſous un ſeul point de vue, n'a lieu dans cette langue; car cela n'eſt poſſible que lorſque la langue eſt bien perfectionnée. On peut comparer ces trois périodes des langues aux trois périodes de la Peinture. Au commencement, on ne deſſinoit que des figures iſolées; puis on joignoit pluſieurs figures pour exprimer une action; mais cette action étoit repréſentée ſans ordonnance & ſans grouppes, comme nous le voyons dans les tableaux hiéroglyphiques des anciens Egyptiens. Enfin on eut le génie de donner de l'ordonnance au tableau. Une belle période du diſcours reſſemble à un tableau d'une belle ordonnance. Un diſcours découſu, où les phraſes ſimples ſe ſuccedent, eſt un tableau d'hiéroglyphes. Ces tableaux hiéroglyphiques ſervoient à inſtruire la poſtérité des événemens du tems paſſé. Cette inſtruction pourtant étoit lente & pénible, elle ne fourniſſoit que les ſquéletes des faits. Les langues groſſieres ſont dans le même cas. On ne ſaiſit qu'en gros & froidement les choſes dites dans une telle langue; il n'y a rien qui pique l'eſprit, ou qui l'engage à des efforts. Un diſcours prononcé dans une langue bien cultivée eſt pour l'auditeur un exercice continuel de toutes les facultés de l'ame. Il faut de la pénétration, de l'eſprit, du génie, une attention réfléchie, quelquefois des ſentimens, pour bien ſaiſir le tout. C'eſt donc une des occupations les plus utiles que de lire les ouvrages les mieux écrits dans les langues bien cultivées. En général, apprendre une de ces langues, c'eſt apprendre à penſer, à raiſonner; c'eſt ſe former le goût & étendre

ſon génie. Ceux donc qui perfectionnent les langues & l'éloquence, ne ſervent pas moins bien les hommes, que ceux qui découvrent des vérités. Ceux-ci augmentent les richeſſes de l'eſprit, & ceux-là les préſentent de la façon la plus avantageuſe ; & en même tems fortifient toutes les facultés de l'ame, ſans leſquelles les connoiſſances nous ſont très inutiles. Il eſt donc difficile de dire ſi c'eſt aux découvertes des Philoſophes, ou aux travaux des Beaux-eſprits que les hommes ont le plus d'obligation : mais il eſt viſible que les uns & les autres ſont néceſſaires pour les progrès de la raiſon.

# MÉMOIRES
DE
# L'ACADÉMIE ROYALE
DES
# SCIENCES
ET
# BELLES-LETTRES.

---

*CLASSE*
*DE BELLES-LETTRES.*

DE LA

# VRAIE NATURE DU BEAU

## EN GÉNÉRAL.

PAR MR. DE CATT.

Avant de rechercher la vraie nature du beau & ſa différence d'avec le bon, il convient de fixer la ſignification de ces mots. Ce qui eſt du reſſort de l'odorat & du goût peut être *bon*, & n'eſt jamais *beau*. Ce qui eſt du reſſort du tact n'eſt ni *beau* ni *bon*. (*) Dans le ſens propre on appelle *beau* ce qui frappe les yeux & les oreilles; j'en appelle à l'uſage conſtant: on dit une *bonne* odeur, une *bonne* ſaveur, une chaleur *agréable*, une ſurface *douce:* on ne dit point une *belle* ſurface, une *belle* chaleur, une *belle* ſaveur, une *belle* odeur; & ſi dans quelques langues, (en Anglois, par ex.) on ajoûte à ces qualités une épithete qui ſemble indiquer la beauté, (**) c'eſt que cette épithete eſt

(*) Il eſt vrai qu'après avoir tâté un lit ou un drap, on dit dans la converſation, voilà un *bon lit*, un *bon drap*: mais cette expreſſion n'eſt qu'une conſéquence; le tact en fournit une prémiſſe & l'expérience fournit l'autre: les prémiſſes ſont; ce lit eſt mollement élaſtique, ce drap eſt *doux* au toucher; or un lit qui eſt mollement élaſtique, eſt commode pour coucher; un drap qui eſt doux au toucher, eſt de bon uſage. Donc etc.

(**) *Fine*, on dit *a fine flavour*, à ce qu'aſſure le Dictionnaire Encyclopédique: j'en doute, au moins je ne me rappelle pas de l'avoir lû;. & ſûrement cet exemple ne ſe

eſt un mot qui indique en général l'excellence, & par figure la *beauté*, laquelle eſt particulierement & proprement déſignée par un autre terme.(*)

Je n'ignore pas qu'on fait auſſi uſâge du mot *beau* pour qualifier ce qui touche le cœur & ce qui éclaire ou frappe l'entendement. On dit une *belle* action, une *belle* réponſe, un *beau* théorême; mais je penſe que ces expreſſions ſont toutes figurées, puiſque les mots ont d'abord été inventés pour exprimer les choſes matérielles, & que ce n'eſt que par la ſuite qu'ils ont été uſités pour les choſes intellectuelles.

*Lorſque nous trouvons*, dit le célebre Monteſquieu, *du plaiſir à voir une choſe avec une utilité pour nous*, (j'entens pour le genre-humain,) *nous diſons qu'elle eſt bonne: lorſque nous trouvons du plaiſir à la voir ſans que nous y démêlions une utilité préſente, nous diſons qu'elle eſt belle.*

En effet tous les objets de la vue qui peuvent être bons ou beaux, ne ſont *bons* qu'autant qu'ils ſont utiles, & ne ſont *beaux* qu'autant qu'on les conſidere indépendamment de l'utilité. La couleur d'un homme eſt *bonne* quand elle indique une ſanté robuſte, & alors elle peut être belle; elle peut être belle ſans être bonne, comme il arrive dans quelques maladies qui laiſſent au moins pour quelque tems un teint frais, clair, & vermeil.

Une maiſon eſt belle, ſi elle flate la vue; elle eſt bonne, ſi elle eſt ſolide & commode. On n'appelle jamais *bons* les édifices où la ſolidité & la commodité ſont ſuppoſées; on dit qu'un Palais, un Temple, un théatre eſt *beau*, on ne dit pas qu'il eſt bon; ou ſi l'on dit qu'un théatre eſt *bon* ou *mauvais*, on ajoûte quelque choſe, *pour les acteurs*, par exemple; & l'on veut dire alors, qu'il eſt favorable ou contraire à la voix, eſpece de commodité qu'on ne ſauroit ſuppoſer parce

ne ſe trouve ni dans le Dictionnaire de Boyer, ni dans celui de Ludwig, ni dans l'Abrége du Dictionnaire de Johnſon. Ce dernier donne pour onzieme ſens du mot *fine beautiful with dignity*, ce qui ne convient pas à une odeur.

(*) *Beauti beautifull.*

parce qu'elle eſt rare. L'Architecture eſt bonne ſi elle eſt conforme aux modeles que la Grece nous a laiſſés, parce que cette architecture a juſqu'à l'apparence de la ſolidité. Par la raiſon contraire l'Architecture gothique peut être belle, elle n'eſt jamais bonne.

La beauté peut ſe trouver dans les payſages, dans les fleurs, dans les tableaux, la bonté ne s'y trouve jamais; celle-ci n'eſt pas toujours déterminée par l'utilité dans ce qui eſt du reſſort des autres ſens. Les odeurs ſont bonnes ou mauvaiſes, & toujours inutiles; les ragoûts des Apicius modernes ſont bons quoique nuiſibles. Dans le moral l'utile accompagne le bon, & ne le conſtitue pas. Une bonne action eſt toujours utile; cependant elle eſt bonne, non parce qu'elle eſt utile, mais parce qu'elle eſt conforme à la nature des choſes; un degré de perfection de plus la rend *belle:* car une belle action eſt toujours bonne, mais une bonne action n'eſt pas toujours belle.

Après avoir fixé le ſens du mot *beau*, ſuivant l'uſage au moins de notre langue, il faut déterminer la nature du *beau*. Ce terme eſt un de ceux *que nous appliquons à une infinité d'Etres; mais quelque différence qu'il y ait entre ces Etres, il faut ou que nous faſſions une fauſſe explication du terme beau, ou qu'il y ait dans tous ces Etres une qualité dont le terme beau eſt le ſigne.* (*) Que pouvons-nous faire pour découvrir cette qualité commune à tant d'objets différents? Nous ne pouvons commencer nos recherches que par nous-mêmes.

Pouvons-nous conjecturer ſi les Etres ſenſibles différens des hommes connoiſſent la beauté, & deviner ce qui ſe paſſe en eux? Quand nous le pourrions, quel avantage en retirerions-nous? Si l'état de leur ame dans cette occaſion eſt différent de l'état de la nôtre, cette différence pourroit, il eſt vrai, répandre quelque jour ſur l'idée que nous avons de la beauté, mais toujours il faudroit connoître l'état de notre ame auſſi bien que celui des autres Etres; & ſi ces deux états ſe reſſemblent, il faut conſidérer le nôtre que nous connoiſſons par



(*) *Dict. Encyclop.* Art. *Beau*, pag. 176. v. 1. f. 3.

ſentiment, & non celui des autres Etres que nous entrevoyons par conjecture. Examinons donc les hommes.

Horace admire un tableau de Pauſias, & Davus un combat de gladiateurs groſſierement deſſiné avec du charbon (*): l'état de leur ame eſt ſemblable, mais différent de celui dans lequel ſe trouve l'ame d'Horace invité ſubitement à ſouper chez Mécénas, (**) ou l'ame de Davus attiré par le fumet d'un morceau friand. (*.*)

Ainſi la perception du beau excite en nous un ſentiment différent de tout autre; c'eſt par ce ſentiment que nous diſtinguons le beau & ſes degrés, comme nous apprenons par les ſenſations à connoître le ſon & la lumiere, & à diſtinguer leurs modifications. Suivons donc, pour expliquer la nature du beau, la même route que nous ſuivons pour développer la nature du ſon & de la lumiere: gardons-nous ſoigneuſement de confondre un certain état de l'ame avec l'objet qui l'occaſionne, & l'un & l'autre avec l'organe qui tranſmet au cerveau l'impreſſion de l'objet.

Nous avons obſervé que la perception du beau mettoit toujours l'ame du ſpectateur dans un état différent de tout autre; cet état eſt toujours agréable, quoique le plaiſir qui l'accompagne ſoit quelquefois doux & tranquille, quelquefois vif, animé, & fortifié par la ſurpriſe ou par l'admiration.

Il eſt naturel de penſer que le plaiſir qui a fait naître le mot de *beauté*, a été fort ſenſible; c'eſt ce qui me perſuade que c'eſt à la vue plutôt qu'à l'ouïe que les hommes doivent la premiere idée de la beauté. L'impreſſion du beau viſible me ſemble plus frappante & plus générale que celle du beau muſical. Les plantes, les animaux, la Terre, le Ciel, toute la Nature nous offre à chaque inſtant le beau viſible. Le beau muſical eſt plus rare; les hommes, il eſt vrai, ont un penchant inné

(*) *Horat.* Sat. VII. Lib. II. v. 85-90.
(**) v. 32 & 33.
(*.*) v. 92.

inné pour l'harmonie; ils auront trouvé du plaiſir à écouter les Oiſeaux, à entonner des chanſons groſſierement ſonores: mais qu'il y a de diſtance entre ce plaiſir ébauché, pour ainſi dire, & le plaiſir délicat qui accompagne la perception du beau! Le Ciel parſemé d'étoiles, un payſage gracieuſement diverſifié, ont d'abord tranſmis par les yeux à l'eſprit des hommes une ſenſation délicieuſe; & les hommes ont imaginé le mot *beau* pour l'exprimer. Enſuite une voix extraordinairement douce & flexible, une mélodie plus recherchée, mais facile à diſtinguer, a excité en eux une autre ſenſation agréable; & dès lors ils ont appliqué au plaiſir occaſionné par l'ouïe le mot inventé pour indiquer celui qu'ils avoient reçu par la vue. Il ſemble que le célebre Monteſquieu ait été du même ſentiment; il ſe ſert des objets viſibles pour expliquer la différence qui ſépare le beau du bon. (*) Un état déterminé de l'ame eſt donc néceſſaire pour conſtituer la beauté; mais les qualités capables d'occaſionner cet état réſident dans l'objet.

Au lieu de dire avec Virgile, *procumbit humi bos*, ou bien, *quadrupedante putrem ſonitu quatit ungula campum*, dites avec l'Abbé Desfontaines, *le Taureau s'abat & tombe ſans vie*, ou *toute la Campagne retentit de la marche de cette ſuperbe Cavalerie:* vous direz la même choſe que Virgile, mais vous aurez fait évanouir toute la beauté; vous aurez, comme on a dit, tué un Poëte. Préſentez à Créſus Eſope & Rhodope en même tems; la figure du premier lui déplaira, & celle de la ſeconde lui paroîtra agréable. Il y a donc, ſoit dans les objets mêmes, ſoit dans les circonſtances qui les accompagnent, quelque choſe qui les rend beaux ou laids. Les circonſtances augmentent ou diminuent la force de ces qualités, & vont même juſqu'à changer l'état de l'ame.

Horace trouve groſſiers & mépriſables les crayons que Davus admire. Quand je ſuis gai, une muſique gaie me plait; elle m'ennuie & me fatigue lorſque je ſuis triſte. Scipion reſpecte la belle Eſpagnole; ſon action eſt belle pour nous; elle ſeroit peut-être abſur-



(*) *Dict. Encyclop.* Art. *Goût.*

de pour un Africain ardent, & indifférente pour un Lapon froid. Nous trouvons une beauté fiere & ſublime dans la fameuſe réponſe du vieux Horace; un Sauvage n'y trouveroit que l'expreſſion naturelle d'un ſentiment ordinaire, au moins ſi l'on doit ajoûter foi à ce qu'on rapporte de leur courage dans les combats, de leur mépris pour la douleur, & de leur fermeté à l'approche de la mort. L'intrigue d'Héraclius eſt belle pour un Académicien, & laide pour le peuple. Donc cet état de l'ame qui conſtitue le beau dépend d'un rapport déterminé entre l'objet & la conſtitution de l'ame, ſoit naturelle, ſoit habituelle, ſoit accidentelle; & la conſtitution accidentelle de l'ame varie avec celle de l'organe.

Avec une vue plus perçante nous verrions une ébauche groſſiere dans ce qui nous paroît actuellement une miniature très-fine; avec une vue plus confuſe nous admirerions comme une miniature ce que nous regardons comme une ébauche: les inſtrumens d'optique mettent la choſe hors de doute; ils nous aſſurent qu'avec d'autres yeux nous aurions une autre architecture & une autre peinture; & ils nous donnent lieu de juger qu'avec d'autres oreilles il nous faudroit une autre muſique, une autre poéſie, & une autre éloquence: il en réſulte que le beau, ſoit viſible, ſoit muſical, conſiſte dans un rapport déterminé entre la conſtitution de l'ame qui l'apperçoit, l'objet auquel on attribue la beauté, & l'organe qui reçoit & tranſmet l'impreſſion des objets.

Le rapport entre la conſtitution de l'ame & les qualités de l'objet ſuffit pour le beau moral & pour le beau purement intellectuel. La beauté d'une propoſition ne dépend point des termes qui l'énoncent, ni la beauté d'une action de celle des acteurs; mais la littérature admet ſouvent une eſpece de *beau mixte*, pour ainſi dire, qui dépend en partie de la choſe même, en partie de l'expreſſion. *Ma Mere*, dit Alexandre à Siſigambis qui avoit pris Epheſtion pour Alexandre, *ma mere, vous ne vous êtes pas trompée, c'eſt un autre Alexandre.* Cette réponſe eſt belle en elle-même; noyez-la dans un déluge de paroles,

elle

elle ceſſera de l'être quant à l'expreſſion, quoiqu'elle conſerve la beauté de la penſée, ou plutôt du ſentiment.

La littérature reconnoît ainſi des beautés qui dépendent non de l'objet, mais du rapport de l'expreſſion avec l'objet. Le Taureau frappé qui tombe, la Cavalerie qui galoppe, n'ont rien de beau; mais les expreſſions pittoreſques & imitatives dont Virgile ſe ſert ſont belles; & l'expreſſion fait en littérature une partie eſſentielle de la choſe, puiſque c'eſt par l'expreſſion que toutes les ſciences tiennent à la littérature. (*)

On peut donc dire en général que le *beau* dans l'acception commune de ce terme, eſt ce qui excite en nous une eſpece déterminée de ſentiments agréables; & qu'il réſulte d'un rapport fixe qui ſe trouve entre la conſtitution de l'ame, celle de l'organe, & les qualités de l'objet. La notion préciſe, la véritable idée du *beau* eſt celle-ci: le beau eſt ce qui nous occaſionne cette ſenſation agréable que nous éprouvons à la préſence de ce que nous appellons beau; comme la notion préciſe, la véritable idée du rouge eſt celle-ci: le rouge eſt une propriété de la lumiere qui nous occaſionne cette ſenſation déterminée que nous éprouvons à la préſence de ce que nous appellons rouge.

Si l'on connoît ſi peu une choſe dont on parle tant, c'eſt parce qu'on ne s'eſt pas encore tout à fait délivré de l'erreur que les Anciens ont commiſe, en regardant comme des qualités poſitives, les qualités relatives de notre ame. St. Auguſtin demande: *cela eſt-il beau parce qu'il plait, ou cela plait-il parce qu'il eſt beau?* Il répond: *ſans difficulté, cela plait parce qu'il eſt beau.* Il regardoit donc la beauté comme une qualité poſitive, réellement exiſtante dans les objets; & c'eſt ainſi que l'enviſagent tous les Modernes qui aſſurent *qu'une choſe nous plait parce qu'elle eſt belle.* J'aimerois autant qu'à la queſtion: l'écarlate paroît-elle rouge parce qu'elle l'eſt, ou eſt-elle rouge parce qu'elle le

(*) Voyez 2ème Mémoire.

(**) *Dict. Encyclop.* Art. *Goût*, pag. 762. v. 1. S. 3.

le paroît? on répondît: ſans difficulté, l'écarlate paroît rouge parce qu'elle l'eſt. Il faut répondre le contraire au ſujet de la beauté comme au ſujet des couleurs, ſi l'on veut ſe conformer à la vérité; & ſi St. Auguſtin avoit répondu: cela eſt beau parce qu'il plaît, toute la diſpute étoit finie.

*Mais*, dit-on, *la régularité, l'ordre, la proportion, la ſymétrie ſont eſſentiellement préférables à l'irrégularité, au déſordre & à la diſproportion* (*): *La ſimilitude, l'égalité, la convenance des parties réduit tout à une eſpece d'unité qui contente la raiſon* (**); *& puiſqu'il n'y a point de vraie unité dans les corps, il faut avouer qu'il y a au deſſus de nos eſprits une certaine unité originale, ſouveraine, éternelle & parfaite, qui eſt la regle eſſentielle du beau; & qu'il y en a un eſſentiel, néceſſaire, & indépendant de toute inſtitution; & c'eſt celui dont l'idée, comme parle encore St. Auguſtin, forme l'art du Créateur.* (*,*)

Je réplique: eſt-ce le beau qui contente la raiſon? n'eſt-ce pas le vrai? admettons-nous une propoſition de morale, de phyſique, de mathématique, ſans en avoir exactement peſé les preuves à la balance de la raiſon? Que nous ſommes à blâmer! Nous riſquons à tout moment de prendre le faux pour le vrai. Sommes-nous obligés de recourir à l'examen pour juger des beautés d'une production de la Nature ou de l'art? Que nous ſommes à plaindre! Nous ne les ſentirons jamais. Nous diſtinguerons par le raiſonnement auſſitôt les couleurs que la beauté. L'unique uſage de la raiſon pour ce qui regarde le beau, eſt de décider ſi ce qui nous ſemble beau, paroîtra tel à la plus grande & à la plus ſaine partie des hommes.

Les idées de régularité, d'ordre, de proportion, de ſymétrie, ſont, comme toutes les autres idées, éternelles, invariables, & eſſentiellement différentes de toute autre, & à plus forte raiſon des idées

(*) P. André. *Traité du Beau* pag. 8.

(**) Id. pag. 12.

(*,*) Id. pag. 12 & 13.

idées contraires. Mais que veut-on dire, lorſqu'on aſſure que les premieres ſont eſſentiellement préférables aux dernieres? Peut-on entendre autre choſe, ſi ce n'eſt qu'il eſt impoſſible de concevoir un Etre intelligent qui dans toute occaſion n'approuve l'ordre, la régularité, la proportion, & ne déſapprouve toujours l'irrégularité, le déſordre & la diſproportion? Si c'eſt ce qu'on affirme, où en eſt la preuve? car on ne ſauroit nous donner une aſſertion pour un axiome. L'idée d'être intelligent & celle de la préférence accordée au déſordre, ſi elles ſont contradictoires, ne le ſont pas auſſi manifeſtement que celles d'être & de n'être pas dans le même tems. Mais pourquoi ſe jetter dans la Métaphyſique, lorſque nous avons en nous-mêmes les preuves que nous cherchons?

Nous ſommes frappés de la beauté d'un Ciel parſemé d'étoiles, quoique les étoiles y ſoient placées ſans ordre, ſans propórtion, ſans ſymétrie; nous préférons ſouvent l'irrégularité d'un bois à la régularité d'un boſquet: l'ordre de l'art nous fatigue à la longue, & nous force à reconnoître que le déſordre de la nature lui eſt préférable; & même dans les ouvrages des hommes,

*Souvent un beau déſordre eſt un effet de l'art.*

*La Géométrie naturelle m'a mis comme aux autres hommes un compas dans les yeux pour juger de l'élégance d'une figure ou de la perfection d'un Ouvrage; elle n'a pas oublié de m'apprendre les premiers principes du bon ſens.* (*)

Mais cette Géométrie ne me dit pas que cette élégance & cette perfection ſoient *d'un beau eſſentiel & indépendant de toute inſtitution;* mais ces principes m'apprennent que le mot *beauté* ajoûte quelque choſe aux mots *ordre*, *proportion*, *ſymétrie;* que ce quelque choſe eſt une ſenſation agréable d'une nature particuliere; que les *rapports* (**) *géométriques des ſons*, *des intervalles qui les ſéparent*, *des tons qui en réſul-*

(*) P. *André* p. 8. (**) Ib. p. 123.

*réſultent, & des accords que la Muſique en compoſe*, ſont la baſe des regles que ſuit un bon Compoſiteur; mais que le plaiſir ne conſiſte pas dans la connoiſſance de ces rapports qui ſont inconnus à la plûpart des Amateurs, & qui ne ſe laiſſent pas ſentir à l'oreille la plus fine du Géometre le plus profond; que ces rapports auſſi bien *que cet ordre primitif que les ſens ne connoiſſent point, mais que la raiſon ne peut ignorer; que cet ordre qui apprécie chaque Etre ſuivant ſon rang eſſentiel; que ces rapports & cet ordre, dis-je, ſont éternels, immuables, indépendants de toute inſtitution, même divine* (*), comme les idées des choſes; & que cet ordre eſt *bon;* mais ces principes ne diſent pas qu'il eſt *beau;* ils m'enſeignent plutôt qu'il n'y a aucun rapport entre l'*eſpece d'unité* qu'on obſerve dans les beaux objets, & l'*unité originale, ſouveraine, éternelle*, & parfaite; & qu'il ne faut jamais parler ſans s'entendre.

Quel eſt le ſens de la queſtion: *y-a-t-il un beau indépendant de toute inſtitution même divine?* Veut-on dire: les objets que nous trouvons beaux ont des qualités que n'ont point les objets que nous trouvons laids; & Dieu même ne peut pas faire que ces qualités ſe trouvent dans les objets, & que ceux-ci ceſſent de paroître beaux à des hommes faits comme nous le ſommes? Dans ce ſens, la propoſition eſt indubitable, elle ſe réduit à celle-ci: ce qui eſt, eſt ce qu'il eſt, & ne peut pas être autre choſe pendant qu'il reſte le même.

Veut-on dire: Dieu ne peut pas créer des Etres penſants qui trouvent laids ces mêmes objets que tous les hommes trouvent beaux? Nous avons prouvé le contraire. Enfin veut-on dire: Dieu par ſa nature & néceſſairement trouve beaux certains objets? Cette propoſition me ſemble téméraire, d'autant plus qu'on ne ſauroit, ſans tomber dans un Anthropomorphiſme groſſier, attribuer à Dieu des ſentiments ſemblables à ceux que nous éprouvons.

Je conclus, ſans être Pyrrhonien, *que tout ce qui plait, eſt beau par rapport à ceux qui le jugent tel; & par conſéquent que, dès-là qu'il ceſſe*

(*) Ib. pag. 42.

*ceſſe de plaire, il ceſſe d'être beau pour eux ;* & que l'aptitude à exciter en nous une eſpece déterminée de plaiſir, eſt *la qualité dont le terme beau eſt le ſigne.* Elle ſe trouve dans tous les Etres que nous appellons beaux : elle n'eſt pas du nombre de celles qui conſtituent leur différence ſpécifique : c'eſt celle dont la préſence les rend tous beaux, dont l'intenſité différente les rend plus ou moins beaux, dont l'abſence les fait ceſſer d'être beaux, qui ne peut changer de nature ſans faire changer le beau d'eſpece, & dont la qualité contraire rendroit les objets les plus beaux déſagréables & laids ; celle, en un mot, par qui la beauté commence, augmente, varie à l'infini, décline & diſparoît. (*)

(*) Les caracteres de la qualité qui conſtitue le *beau*, ſont tirés du Dict. Encycl. art. *Beau* pag. 176. v. 1. L'Auteur, au lieu d'*intenſité*, dit *fréquence* ou *rareté* : mais il me ſemble qu'une qualité eſt ſuſceptible de plus ou de moins d'intenſité différente de degrés, non de fréquence & de rareté.

Ce que j'ai dit au ſujet du bon & du beau ſe rapporte à mes définitions & à l'uſage le plus commun des langues vivantes, & ſurtout de la langue françoiſe. Il en étoit autrement de la langue grecque, ſi l'on en juge par deux paſſages qui ſe trouvent dans les choſes mémorables de Socrate écrites par Xenophon Livre 3. & 4 On demande (Livre 3) à Socrate s'il connoît quelque bonne choſe ; il répond : *s'agit-il de quelque choſe qui ſoit bonne contre la fievre, le mal des yeux, la faim ?* Socrate ici confond le *bon* avec l'*utile*, & il l'avoue (Livre 14. Traduction de Chaperonien pag. 213 & 214. Edition de l'Honoré à Amſterdam 1745) où il conclut que ce qui eſt *profitable eſt un bien.* Socrate dit expreſſément (Liv. 3. pag. 139.) *que le bon & le beau* ne ſont *pas différens* ; que *les choſes qui ſont belles ſont bonnes auſſi en même tems* ; & (pag. 214) que tout *ce qui a quelque uſage eſt réputé beau, eu égard à la choſe à quoi cet uſage ſe rapporte.*

# DISCOURS
## SUR LA
# SENSIBILITÉ POUR AUTRUI.(*)

PAR M. TOUSSAINT.

La ſenſibilité dont je veux parler n'eſt pas cette perfection dans les organes, qui fait qu'un homme eſt aiſément affecté par les plus légeres cauſes externes. C'eſt à la vérité un don heureux de la Nature: plus on eſt ſenſible, plus on exiſte. La femme de Loth convertie en ſel, & la fille de Pénée métamorphoſée en laurier, ne perdirent leur exiſtence que par l'extinction qui ſe fit en elles de toute ſenſibilité. Mais ce n'eſt pas cette diſpoſition à ſentir vivement pour ſoi-même qui manque à la plûpart des hommes; elle n'eſt au contraire que trop commune & trop forte; c'eſt préciſément à la modérer qu'il faut apporter ſes ſoins.

Je veux parler au contraire de cette ſenſibilité pour les autres qui nous fait partager les ſentimens dont nous les voyons affectés. Souvent la premiere nuit à celle-ci: à force d'être ſenſible pour ſoi-même, on ne l'eſt point pour les autres; ou bien on l'eſt ſi foiblement qu'on reſte dans l'inaction par rapport à eux.

Comme la ſenſibilité conſidérée par rapport à nous-mêmes a deux objets, le plaiſir & la peine: il faut que celle qui nous intéreſſe pour les autres ait les mêmes par rapport à eux. Ce n'eſt pas aſſez de pleurer avec ceux qui pleurent: il faut rire avec ceux qui ſont dans la joie. Des deux devoirs qu'elle nous impoſe c'eſt le plus agréable, & ce

(*) Prononcé dans la ſéance publique du 4 Juin 1767.

ce n'eſt pourtant pas le plus facile à remplir. Je ne ſai pourquoi nous nous affectons plus ſenſiblement de la peine d'autrui que de ſes plaiſirs.

Ne ſeroit-ce pas que la crainte du mal étant plus active ſur nous que le goût du plaiſir, le ſpectacle de l'un ou de l'autre porté hors de nous y garde la même proportion, dans un degré plus foible d'intenſité? La peine des autres nous émeut encore un peu l'ame, à peu près comme feroit une ſcene de douleur repréſentée ſur la toile: mais leur félicité n'eſt plus un objet aſſez touchant pour nous remuer; elle ne fait guere que nous amuſer, comme pourroit faire un Tableau de Teniers ou de Boucher. Il faut même, pour qu'elle produiſe ce léger effet, qu'elle trouve des cœurs humains & bienveillans; car elle feroit le tourment d'une ame envieuſe. La peine d'autrui nous affecte, parce qu'elle nous rappelle la ſenſation douloureuſe qu'elle nous cauſeroit ſi nous la ſouffrions en perſonne. Le naufrage ou la chûte de quelqu'un nous fait frémir par un retour ſur nous-mêmes: mais le plaiſir qu'un autre reſſent ne nous laiſſe ſouvent qu'un vuide dans l'ame, à quoi ſe joint plus ſouvent encore le regret de ne pas jouir du même bonheur.

Je voudrois que la félicité de nos ſemblables en fût auſſi une pour nous; je voudrois même que notre imagination, qui aime les objets rians, fît des excurſions dans tous les endroits où nous connoiſſons des heureux; qu'elle favourât bien toute la douceur de ces ſpectacles charmans, & revînt nous les peindre en couleurs gaies. Ce ſeroit ſans doute pour de belles ames une ſource féconde de plaiſirs.

Et ne croyez pas que ces joies excitées par la vûe du bonheur d'autrui ſoient des chimeres tirées des régions fantaſtiques d'une métaphyſique alembiquée: vous les éprouvez s'il arrive à votre fils, à votre amie ou à votre ami, quelque événement agréable.

J'ai vû la tendre Eugénie conduire à l'Autel de l'hymen Aglaé ſa fille unique, toute brillante de jeuneſſe & de beauté. Sur le front virginal de celle-ci, où l'albâtre & le carmin fondus enſemble formoient une tendre rougeur, on liſoit tout à la fois, les douces allar-

mes d'une pudeur inquiete, & les feux décens d'un amour honnête. Pour Eugénie, on voyoit éclater dans ſes traits une ſérénité ſans nuage, une ſatisfaction pure & ſans mêlange. Tout ce que ſentoit ſa fille, (à cet embarras près qu'éprouve une beauté novice au moment d'être abandonnée à un Epoux,) elle le ſentoit elle-même. Le mariage d'Aglaé lui rappelloit l'image du ſien, & lui en retraçoit toutes les ſcenes galantes. On eût dit que rajeunie par quelque charme ſecret elle fût revenue à l'âge heureux où elles ſe paſſerent, tant l'acquiſition d'un gendre aimable avoit répandu ſur ſon viſage, de fraîcheur & d'enjouement.

Etendez donc la ſphere de votre affection au de-là du cercle étroit de vos proches: & le reflet du bonheur d'autrui viendra de plus loin apporter à votre ame ſenſible des plaiſirs touchans.

C'eſt cette ſenſibilité active, celle qui nous intéreſſe pour les autres, que j'ai deſſein de réveiller dans les ames: c'eſt celle-là qu'il faut accroître aux dépens de l'autre, qui ramene à nous toutes nos ſenſations. Quoi qu'il puiſſe en coûter pour ſoulager autrui, on doit s'oublier ſoi-même ſi le mal dont il gémit eſt plus cuiſant que l'effort qu'il faudroit faire pour le ſoulager. Il faut ſavoir riſquer une égratignure pour ſauver à un autre un coup de poignard.

Je me propoſe, premierement, de montrer quels ſont les vices de l'ame qui en repouſſent la ſenſibilité? ſecondement, d'examiner par quels moyens on pourroit l'y réveiller & l'y maintenir?

## PREMIERE PARTIE.

Pour remplir mon premier objet, je partage en claſſes les hommes inſenſibles, à raiſon des cauſes qui produiſent en eux cette inſenſibilité.

La premiere, qui eſt de beaucoup la plus nombreuſe, embraſſe toutes ces ames vaines chez qui le ſentiment ne ſert qu'à les avertir de ce qui les touche, ſans les porter jamais à s'intéreſſer aux autres.

Ce

Ce ſont des eſpeces d'Egoïſtes qui regardent tout ce qui eſt hors d'eux-mêmes comme n'exiſtant pas, ou qui du moins trouvent leurs ſemblables d'une ſi petite conſéquence en comparaiſon d'eux, qu'autant vaudroit qu'ils en méconnuſſent l'exiſtence. Vous jugez bien que des hommes tombés dans cette ivreſſe ne s'inquietent pas ſi quelqu'un dans le monde ſouffre de douleur ou de beſoin, comme vous ne vous inquietéz pas vous-même ſi parmi les mites ou les pucerons quelques uns ſont incommodés ou à jeun.

Cette claſſe eſt de toutes les conditions: il y a tant de gens qui ſont vains ſans ſavoir pourquoi! En voici une qui eſt reſtrainte à un des ordres de l'Etat.

Il y a, dans la plûpart des pays policés, un ordre d'hommes qui ſe croit l'élite du genre humain, parce que de vieux titres atteſtent que quelques-uns de leurs ancêtres ont autrefois ſervi l'Etat utilement. Si par malheur on n'a pas mis dans ces têtes-là, dès leur enfance, quelques grains de Philoſophie ou de raiſon, ce qu'on y met fort rarement, leur cavité vuide ſe remplit de vent: elles ſe bouffiſſent, elles ſe bourſoufflent. Ces êtres ſoi-diſants diſtingués par le haſard de leur naiſſance, que la coquetterie des meres a ſouvent rendu équivoque, ſe ſignalent encore par un mépris inſultant pour quiconque ne porte pas un de ces noms fameux qu'ils traînent. Quoique mortifiés de temps à autres par des diſgraces, par des taches, par des flétriſſures, ils ne rabattent rien pour cela de leur faſtidieuſe arrogance; ils ſont aſſez grands Seigneurs pour n'avoir pas beſoin d'être gens de bien. Ils ſemblent être perſuadés que la ſublimité de leur rang couvrira de ſon ombre leurs lâchetés & leurs baſſeſſes.

Ils auront beau vous ſavoir inſtruit de cent forfaits qui les deshonorent, ils viendront encore avec autant d'imprudence que d'impudence, vous outrager en face par leurs faſtueux dédains. Affublés de titres & de dignités, qu'ils aviliſſent, ils croyent ſtupidement que les honneurs ſuppléent à l'honneur.

La

La ſaine partie de la Nobleſſe, celle qui tient de ſes peres, outre la naiſſance, des ſentimens magnanimes; & de ſon éducation, des manieres douces & obligeantes, ne me ſaura pas mauvais gré de ma ſortie contre cette ivraie qui la fait rougir: on voit bien que ce n'eſt pas le corps que j'attaque, mais ceux de ſes membres qui ſont gangrenés. Je veux par ce tableau qu'on ſente la néceſſité d'une bonne éducation; article qu'on néglige trop, & qui eſt pourtant ce qui établit la différence entre un galant homme & un ſauvage. Il n'y a pas plus de vices innés que de vertus innées: il y en a plutôt moins; car l'homme apporte dans ce monde plus de goût pour la vertu que de penchant pour le vice: ou, s'il y a des vices nés avec l'homme, ce ſont au moins des phénomenes rares. Il eſt bon qu'on ſoit perſuadé de cette vérité: l'opinion contraire endort les gens dans leur dépravation & les rend irréformables.

Mais, pour revenir à ces Nobles tarés, dont la conduite dément l'origine, & en faire l'application à mon ſujet; c'eſt chez eux que ſe trouve portée à ſon comble cette eſtime excluſive de ſoi-même qui produit l'inſenſibilité pour autrui; eſtime de ſoi-même d'autant plus déraiſonnable qu'elle ne porte ſur aucun mérite perſonnel. Il vaudroit mieux encore qu'un homme fût vain d'une qualité qu'il auroit, ou ſeulement qu'il croiroit avoir; parce qu'au moins les parties en quoi il reconnoîtroit n'être pas éminent, le pourroient rendre juſqu'à un certain point modeſte & traitable. Mais dès qu'une fois un homme a l'eſprit aſſez gâté pour s'eſtimer outre meſure à propos de rien, c'eſt un travers qui ne peut plus être ni redreſſé ni diſſimulé.

Une ſeconde eſpece d'hommes à qui l'inſenſibilité pour autrui eſt encore toute naturelle, ce ſont les hommes nouveaux, les parvenus, ces enfans gâtés de la Fortune, qui ayant enfilé adroitement quelqu'un des ſentiers ſecrets qui menent à l'opulence, & aux grands emplois, y ſont arrivés ſi-vîte & ſi-tôt, qu'ils en ſont les premiers ſurpris: mais leur étonnement ne dure pas, ils préſument, puiſqu'ils ont fait leur chemin, qu'ils le devoient faire. Ils ne ſe connoiſſoient pas des

talens

talens ſupérieurs: mais c'étoit apparemment la modeſtie qui les leur cachoit. A préſent ils jugent d'eux-mêmes par leurs ſuccès: ils rougiſſent du néant dont ils ſont ſortis, & en rougiſſent de ſi bonne foi qu'ils voudroient le cacher à tout l'univers. Pour y réuſſir ils commencent par ſe le diſſimuler à eux-mêmes; ſemblables à de certains animaux qui, quand ils ſe ſont blottis, la queue en dehors, derriere une motte ou dans un trou, ſe croyent à couvert, parce qu'ils ne voyent plus leur ennemi. Leur grande crainte eſt d'être reconnus par ceux dont ils ont été les égaux; & leur premier ſoin eſt de s'en tenir éloignés. Ils voudroient bien que ces gens-là n'exiſtaſſent pas: c'eſt être fort loin de prendre part aux circonſtances bonnes ou mauvaiſes qui accompagnent leur exiſtence. Ils ſont d'ailleurs dans une extaſe qui ne leur laiſſe goûter que les raviſſements de la jouiſſance. Jupiter dans les bras d'Alcmene laiſſoit ſans doute à Mercure le ſoin du monde. De plus ils ſont orgueilleux à leur maniere; & leur maniere eſt de l'être à l'excès. Or j'ai déjà obſervé que l'orgueil étouffe la ſenſibilité: il n'y a ſorte d'indignités qu'il ne faſſe commettre. On a raiſon dans les moralités pieuſes d'en faire la ſource de tous les péchés. La férocité, toute barbare qu'elle eſt, n'en engendre pas tant: mais elle a de commun avec l'orgueil qu'elle produit auſſi l'inſenſibilité pour autrui.

Repréſentez-vous ces foudres de guerre dont l'imagination échauffée par les Furies ne ſe repaiſſoit que de batailles, de ſieges, d'attaques, de dévaſtations; qui meſuroient leur grandeur à la quantité du ſang qu'ils avoient verſé, au nombre des villes qu'ils avoient priſes ou incendiées, des provinces qu'ils avoient conquiſes ou ravagées; ces barbares endurcis contre les cris des bleſſés & des mourans, inſtrumens funeſtes de famine, de peſte & de carnage; brigands décorés du titre de Princes, aſſaſſins plutôt que guerriers: penſez-vous qu'il y eût dans la nature quelque ſituation aſſez touchante pour les attendrir? Ou croyez-vous que leurs cœurs farouches fuſſent propres à ſe laiſſer égayer par une fête champêtre, à goûter les joies pures de l'innocence & de la vertu? Affreuſement dénaturés, il ne leur reſtoit

de l'homme que ce qu'il a de commun avec les bêtes, des ſenſations impérieuſes, qu'ils contentoient à tout prix; inſuſceptibles d'idées morales, foulant aux piés l'honnêteté, la juſtice, le droit naturel. Puiſſe cet horrible tableau n'être applicable qu'aux ſiecles paſſés!

Une autre claſſe de gens inſenſibles ce ſont les petites ames, qui n'éprouvent auſſi qu'en petit les ſentimens qui remuent puiſſamment les autres. On n'imagineroit pas qu'un caractere qui eſt l'antipode de la féroeité pût produire à peu près le même effet par rapport à la ſenſibilité. Cependant c'eſt une choſe démontrée que tout ce qui s'appelle ſentiment gliſſe ſur les ames frivoles. Il n'y a que leur ſuperficie qui ſoit ſenſible, & elle ne l'eſt qu'au chatouillement; il ſemble qu'elles n'ayent été formées que pour le plaiſir, & même pour le plus léger: elles n'ont jamais éprouvé en aucun genre une impreſſion forte ou profonde.

Parmi ces différentes claſſes d'hommes inſenſibles, les uns affichent l'inſenſibilité, & en font trophée; tels ſont les ſuperbes & les féroces: d'autres jouent l'attendriſſement; la ſenſibilité vient quelquefois figurer ſur leurs levres, mais elle ne pénetre pas juſqu'à leur cœur.

„Eh bien oui, dit Apathine, dont la ſœur eſt près de périr d'u„ne eſquinancie qui la ſuffoque, ma ſœur eſt dans un état qui m'arra„che des larmes. Peut-être voudroit-on que je reſtaſſe auprès d'el„le: mais cela eſt plus fort que moi, je ſouffre trop de la voir ſouf„frir; j'ai quitté la place, je n'y tenois pas; & ſi Philidor dont vous „connoiſſez les prévenances, ne m'eût emmenée faire un tour ſur la „chauſſée, j'en aurois, à l'heure que je vous parle, une migraine af„freuſe. C'eſt mon foible à moi, je ne puis pas reſter auprès d'un „malade. Ceux qui ne ſentent rien ſont bien heureux.“ Maxime horrible, que je ne pardonnerois pas à un Cannibal.

Cléobule voit par la portiere de ſon char doré un malheureux dont tous les membres ſont briſés d'une chute qu'il vient de faire de ſoixante piés de haut. Un cercle de petit peuple l'entoure; ils s'empreſſent

ſent à le ſecourir; inutilement peut-être, mais au moins ils s'empreſſent. „Comment, dit Cléobule, cette canaille-là a-t-elle la dureté „de ſoutenir un pareil ſpectacle? Je n'ai fait que l'entrevoir en rou„lant; & j'en friſſonne. Il y a des gens qui ont un cœur de fer;“ & là-deſſus il fait doubler le pas à ſes courſiers.

Alfrid apprend à Lyſimon la ruine totale d'un de ſes amis de jeuneſſe, qui de millionaire qu'il étoit eſt tombé dans la plus affreuſe diſette. „Il eſt, lui dit-il, ſeul & tourmenté par la gravelle & la „goutte dans une chambre nue, de huit piés en quarré, où perſonne „ne s'informe de ſa ſituation ni de ſes beſoins. Si vous l'y alliez viſi„ter, vous lui ſembleriez un Ange deſcendu du Ciel pour le ſoulager.“

„Voilà, répond Alfrid à Lyſimon, comme penſent & parlent „ceux qui n'ont point de délicateſſe. Vous iriez apparemment ainſi „de but en blanc, voir un ami malheureux, ſans vous inquiéter s'il „pourra ſoutenir votre vue, & ſi vous pourrez ſoutenir la ſienne. Eh „bien, Lyſimon, je ne ſuis pas, moi, de ces officieux indiſcrets qui „vont jouir cruellement de l'humiliation d'un galant-homme, & le mor„tifier par l'étalage accablant de leur opulence: je croirois lui porter le „coup de la mort. Comment a-t-on le front de paroître riche devant „un homme ruiné! Allez-y vous-même, ſi vous voulez, vous êtes le „maître; pour moi, c'eſt la derniere choſe que je ferois.

Voilà tous gens affectans de beaux ſentimens, qui ſous l'ombre d'avoir le cœur tendre ont les procédés très-durs.

Je ne mets pas au nombre des hommes inſenſibles ces mortels dévoués au malheur, en qui l'extrême accablement a émouſſé tout ſentiment pour autrui: c'eſt une paralyſie momentanée qui affecte leur ame; ce n'eſt pas là un vice, c'eſt une maladie. Vous devez-vous attendre que quelqu'un qui eſt abîmé dans la douleur partage vos plaiſirs ou vos maux? Pour vos plaiſirs, il n'a garde d'y prendre part: le contraſte d'un homme heureux ajoûte un ſurcroît d'amertume à celui qui ſouffre. Quant à vos peines, le moyen qu'il y compatiſſe? Sa

ſenſibilité eſt épuiſée pour lui-même: quelles qu'elles ſoient, votre ſort lui paroîtra encore digne d'envie.

Vous avez connu ce brave Commandeur, autrefois la terreur des Muſulmans, & les délices des Sociétés: à préſent chargé de chaînes, il paſſe ſes jours près d'Andrinople à porter des briques pour un maître dur & inhumain, qui l'accable d'opprobres, & l'excede de violences. Renfermé le ſoir dans un affreux bagne, il y mange, en ſanglottant, un peu de pain noir, que les chiens ne daignent pas lui diſputer; & couché la nuit ſur une natte ſale & dure, il y appelle à grands cris la Mort, qui lui refuſe ſon fatal ſecours. Voudriez-vous qu'en cet état il ſe tourmentât de ce que vous aurez eu deux accès de fievre?

Ce beau vers que Virgile met dans la bouche de Didon

*Non ignara mali miſeris ſuccurrere diſco,*

Mes malheurs m'ont appris à ſentir ceux des autres,

ne doit s'entendre que des malheurs qu'on a éprouvés, mais non pas de ceux qu'on éprouve actuellement, ſurtout s'ils ſont extrêmes. Il eſt avantageux à tous égards d'avoir été malheureux, mais il eſt fâcheux de l'être.

J'y mettrois preſque (au nombre des hommes inſenſibles) une eſpece équivoque, qui a le premier mouvement du ſentiment, mais qui, par la crainte de ſentir trop vivement, ſe hâte de ſe diſtraire, & écarte avec ſoin de ſon idée tous les objets fâcheux ou attriſtans.

Agathias entend des cris de douleur qui lui déchirent l'ame: il eſt né ſenſible, il a les nerfs délicats; il craint que l'objet vû de près ne l'affecte plus péniblement encore; il s'éloigne précipitamment. Funeſte effet de la molleſſe! Que n'étoit-il un peu moins ſenſible ou plutôt que ne l'étoit-il un peu davantage! S'il eût ſuivi cette voix plaintive dont les éclats touchans imploroient fortement ſon aide, il eût arraché un malheureux au fer de ſes aſſaſſins.

Me-

Mélite ne peut pas voir couler le ſang, ni regarder une bleſſure: c'eſt la vérité, ce n'eſt pas une ſimagrée de jolie femme: mais elle s'eſt trop livrée à cette répugnance naturelle; il la falloit combattre, elle l'auroit vaincue, & ſauroit à préſent fermer une plaie & la bander.

Je veux pour un moment admettre comme ſinceres les excuſes de ces hommes puſillanimes qui craignent que la peine d'autrui ne leur cauſe une douleur trop vive. Mais cette douleur, il ne faut pas qu'ils cherchent à ſe l'épargner: c'eſt préciſément l'aiguillon que la Nature a imaginé, & dont ils ont plus beſoin que d'autres, pour les exciter à la bienfaiſance. C'eſt par la douleur qu'elle nous avertit de ſonger à nous conſerver. S'il ne nous étoit jamais arrivé de connoître par épreuve la ſouffrance de la brûlure, nous nous précipiterions dans les flammes auſſi légerement qu'une mouche ou un papillon.

C'eſt auſſi par la douleur que nous cauſe la ſouffrance des autres qu'elle nous avertit du ſecours que nous leur devons. Nous la trahiſſons, nous contrarions notre inſtinct, ſi nous réſiſtons à cette impulſion bienfaiſante.

La Nature nous veut humains, mais non pas foibles; car ce n'eſt pas la foibleſſe qui engendre l'humanité: on ne ſauroit croire au contraire combien elle a fait commettre de cruautés. C'étoit, dit M. de Voltaire, par foibleſſe que Charles IX fuſilloit de ſa fenêtre ſes propres Sujets. Ce fut par foibleſſe qu'Henri III fit aſſaſſiner le Duc de Guiſe; & Louis le *Juſte* le Maréchal d'Ancre. Ce fut par foibleſſe que le Parlement de Paris, qui n'avoit pas été appellé à l'aſſaſſinat de Concini, fit brûler ſa malheureuſe Veuve.

## SECONDE PARTIE.

J'ai ſpécifié les cauſes de l'inſenſibilité: je paſſe aux remedes; j'indiquerai même un préſervatif.

Si les hommes naiſſoient avec le vice de l'inſenſibilité, il ne ſeroit gueres vraiſemblable qu'on les en pût guérir; on ne refond point la

Nature; on ne fait que pallier ou mitiger les défauts qu'on tient d'elle. Mais ce n'eſt point de la Nature qu'on tient l'amour exceſſif de ſoi-même, l'orgueil, l'ivreſſe du bonheur, la férocité dans le caractere, & le goût pour les choſes frivoles, d'où j'ai dit que réſultoit l'inſenſibilité. Ce ſont tous défauts qu'on puiſe dans l'éducation, dans les uſages, les mœurs du pays, la forme du gouvernement, les ſuggeſtions, les mauvais conſeils, & l'exemple. Il n'y a peut-être pas un homme ſur cent mille qui ſoit né aſſez décidément vicieux pour qu'avec des ſoins & de la culture on n'eût pas pû en faire un modele de vertu. Et ce qu'enſeigne la Théologie ſur la dépravation cauſée par un péché d'origine ne nous force point à croire que tel ou tel vice en particulier ſoit une ſuite de ce péché; car, comme on le ſuppoſe commun à tous les hommes, ſi les vices qui regnent parmi eux en étoient des ſuites, tous les individus de l'eſpece humaine auroient les mêmes, portés dans tous au même degré d'intenſité, ce que l'expérience dément, les vices & les travers des hommes différant autant que les traits de leurs viſages. Il eſt donc conſtant, auſſi bien dans le ſyſteme du Chriſtianiſme, que dans l'ordre civil, que les hommes qui ſe trouvent être méchants ne le ſont point de naiſſance; qu'ils ne le deviennent communément que par des cauſes accidentelles auxquelles on auroit pû parer; & que même, lorſque le germe d'un vice a commencé à percer, on auroit pû l'étouffer dabord.

Prenons pour exemple d'un avantageux qui ne ſent rien pour les autres, parce qu'il rapporte tout à lui, l'orgueilleux Philautès, cet homme doſé d'un amour propre ſi exceſſif, qu'il imagine bonnement que toutes les créatures, même celles de ſon eſpece, ont été faites pour ſa plus grande commodité. Il diroit volontiers, ma Lune, mon Soleil, mes hommes. Tout ce qui le gêne ou le contrarie lui paroît de trop dans la Nature; il s'en irrite, il s'en aigrit; & ne pardonne leur exiſtence qu'à ceux qui rampent humblement à ſes piés. Des rivaux, des concurrens, des compétiteurs ſont pour lui des Etres dont il ne peut digérer l'idée: avec les perfections éminentes qu'il ſe connoît, eſt-

eſt-ce qu'il y a quelque choſe dans le monde qu'on doive lui conteſter? Il donne ſes prétenſions pour des droits, & ſes mécontentemens pour des griefs. La maiſon d'un voiſin borne ſa vue: il croit que le voiſin a tort de laiſſer cette maiſon ſur pié. Il voudroit aggrandir ſon parc: dès-lors les payſans n'ont rien de mieux à faire que de venir mettre leurs terres à ſa merci. Il prend pour ſon domaine tout ce qui l'entoure, en quelque lieu qu'il ſe tranſporte; ainſi qu'une planete, dans ſon cours, garde autour d'elle un tourbillon d'air qui ne la quitte pas. Il étend même ſon atmoſphere fort loin.

Eh bien, l'homme inſtruit par la Nature n'eſt point fait comme Philautès. Il ſait qu'il manque de tout, qu'il a beſoin de tout le monde, que perſonne ne lui doit rien; qu'il n'acquiert des droits aux bons offices de ſes ſemblables que par ceux qu'il leur rend lui-même; que la ſociété humaine eſt un commerce, d'où chacun ne retire qu'à proportion de ce qu'il y met. Qui donc a pû étouffer dans ſon ame ces principes ſages & raiſonnables qui ont dû s'y trouver comme dans toute autre ame? O richeſſes pernicieuſes, poiſon des mœurs! vous les infectez avant que l'homme ſache penſer. Philautès étoit né dans le ſein de la fortune; & tout ce qui l'a entouré, proſterné devant l'idole, l'a enivré d'un encens mortel, d'une mixtion fumeuſe de louanges, de cajoleries, de prévenances & d'adulations. Parens, Gouverneurs, Domeſtiques, tout s'eſt ligué pour le déifier. Qu'en réſulte-t-il? Qu'il eſt indigne même du nom d'homme.

Si au lieu d'efforts redoublés pour éteindre en lui les ſages inſpirations de la droite raiſon, on eût employé des ſoins ordinaires pour les cultiver & les mettre à profit: Philautès n'étoit pas pire qu'un autre: il ſeroit l'ami des hommes, il prendroit part à leurs plaiſirs, compatiroit à leurs peines, & ſe tiendroit pour très-honoré de mériter par ſa bienfaiſance leur eſtime & leur amour.

Pour ces Nobles à principes ignobles, qui ſe repoſent ſur les titres de leurs maiſons, comme ſur un oreiller commode, où leur faſtueuſe

tueuſe indolence dans une molle inaction ſe croit acquittée par les exploits de leurs peres, de tous les devoirs de la ſociété; on ne mettra pas ſans doute leurs chimeres orgueilleuſes ſur le compte de la Nature. La Nature ſongeoit-elle à créer des Nobles; ou du moins la Nature approuvoit-elle que le mérite du pere fût imputé au fils?

Dans les premiers ſiecles du monde, c'étoit uniquement par les ſervices rendus à la patrie ou au genre humain qu'on acquéroit la nobleſſe, ou la célébrité, ce qui alors étoit la même choſe. Le fils d'un Héros, s'il n'avoit pas hérité de l'héroïſme de ſon pere, retomboit dans l'obſcurité; on ne brilloit que de ſon propre luſtre. Aucun charme, aucune illuſion, ne pourra faire entrer dans une tête ſaine qu'un nain iſſu d'un coloſſe en ſoit plus grand. L'inſtinct dans les eſprits les plus ſimples repouſſe cette abſurdité.

L'orgueil d'un Noble n'eſt donc qu'une extravagance ſuggérée par des corrupteurs. Il falloit au contraire lui inculquer que ſon origine groſſiſſoit & multiplioit ſes devoirs; que plus elle étoit illuſtre, plus il ſeroit avili s'il y dérogeoit; que ſes parchemins n'autoriſent point la licence dans la conduite, le mépris des loix & de la magiſtrature, l'oppreſſion, la violence, & le débordement des mœurs. Avec de pareilles maximes, gravées profondément dans ſon ame, un Noble n'en ſeroit que plus porté à la bienfaiſance.

Ce ne ſont pas là ſans doute les leçons qu'on a données au jeune Phorbas, ce petit Être deſtitué de toutes qualités morales, qui guindé ſur le dos d'un courſier où il paſſe ſa vie, pour n'être pas au niveau du commun peuple, qui marche à pié, porte ſans ceſſe le nez au vent, qui évite l'été les promenades publiques, parce que la roture qu'il appelle canaille ſe promene auſſi; qui pourtant, lâche paraſite, va flairer les tables d'hôtes, où il ne paye ſon écot que par de froides bouffonneries; qui trompe au jeu, qui même ailleurs filoute quand il peut; qui déchire l'honneur des abſents, parce que l'honneur lui fait ombrage; qui quelquefois même inſulte aux préſents; mais qui, dès qu'ils froncent

cent le ſourcil, leur demande humblement quartier; tour à tour hautain & rampant, glorieux & lâche, audacieux & poltron.

Cependant, qui le croiroit? Il y avoit dans la trempe de cette ame de quoi faire un honnête homme, peut-être même un homme aimable. Pour lui dénaturer le cœur, il a fallu lui gâter l'eſprit. Dans les pervers c'eſt le plus ſouvent par la tête que la dépravation a commencé.

Chryſalde eſt devenu riche en une campagne, aux dépens de 200 mille hommes. On diroit que ce qu'il a ſouſtrait en quantité & en qualité à leurs vivres & à leurs médicamens, converti pour lui en ſucs nourriciers, ait contribué à lui former une corpulence énorme & une face monſtrueuſement large. Bientôt ſa peau ne ſuffira pas à contenir ſon embonpoint; & ſon embonpoint ſemble s'accroître par l'enflure de ſa vanité: il en eſt bourſouflé comme un balon. On enfonceroit la pointe d'un dard dans ſes chairs pleines & rebondies ſans qu'il en ſentît la piquure. Il eſt dans le moral comme dans le phyſique: ſon ame perdue dans la graiſſe, pourvû qu'on ne touche point à ſes coffres, eſt inacceſſible au ſentiment; bien moins encore éprouveroit-il quelque ſenſibiliré pour autrui; il a fait ſes preuves de dureté. Cependant, tout dur qu'il eſt, qu'on l'eût prémuni de bonne heure contre l'amour exceſſif du gain, qui eſt ſon vice favori, c'eût été un homme tout auſſi ſenſible qu'un autre. On feroit des Saints de tous les gens en place ſi on leur ôtoit la ſoif de l'or: de mille excès qu'on leur voit commettre, dit M. Marmontel dans ſon Béliſaire, à peine y en a-t-il un qui ne ſoit pas le crime de l'avarice.

A ſon portrait vous reconnoitrez certain Commandant farouche & hautain, dont la voix eſt un tonnerre toujours grondant. Tous les ſons qui ſortent de ſon goſier rauque ſont des menaces, des juremens, ou des arrêts meurtriers. La clémence eſt pour lui un mot vuide de ſens; il n'a jamais pardonné. Que dis-je pardonné? il n'a jamais puni modérément. C'eſt un Bourreau paré du titre de Général, qui

châtie, je ne dirai pas de ſang-froid, mais avec joie & complaiſance. Les cris douloureux, l'affoibliſſement, la défaillance même du patient n'effleurent pas ſon cœur durci: il tient ferme même au moment où le malheureux ſuccombe ſous les coups. Vous aurez peut-être peine à imaginer qu'un pareil homme ne ſoit pas né méchant: mais vous le pourrez concevoir ſi l'on vous apprend par qui & comment il a été élevé. Les valets du logis ont commencé ſon éducation, & les Sergens du corps qu'il commande y ont mis la derniere main. Un Mentor prudent n'en auroit pas fait aiſément un galant-homme: mais il auroit peut-être empêché qu'il ne fût un monſtre. Il n'y a point de métamorphoſe de mal en bien que ne puiſſe opérer ſur un ſujet pris dès l'enfance, la direction d'un guide ſage & intelligent: il n'y en a pas non plus d'impoſſible, de bien en mal, à des pervers qui s'emparent des premieres années d'un enfant bien-né.

Je ne ſais même ſi, en prenant au ſortir du berceau la jeune Nugatine, à qui la Nature ſemble avoir donné pour cervelle un fluide exalté qui s'évapore comme l'eſprit de vin, on n'auroit pas pû en faire une tête ſolide & un cœur ſenſible. Par une ſuite naturelle de ſon éducation, elle aime la danſe, les petits jeux, les ſpectacles gais; elle chanſonne, rit, folâtre, fait des mievreries & déraiſonne du matin au ſoir. Amuſez-la, vous ſerez ſon Dieu. N'allez pourtant pas vous aviſer de l'aimer: cela tourne au ſérieux: vous voudriez peut-être du retour. Une paſſion en regle n'eſt pas ſon fait. Vous la pourrez en revanche contrarier, plaiſanter, lutiner; elle entend raillerie. Gardez-vous ſeulement de lui donner des conſeils, ou de lui faire des remontrances: les vapeurs la gagneroient auſſitôt. Avec toute ſa gaieté elle ne laiſſe pas d'avoir des momens d'humeur; nul n'y eſt plus ſujet que les perſonnes gaies. Si vous ne les tenez pas ſans ceſſe dans l'étourdiſſement d'une joie extravagante, elles retombent au fond d'elles-mêmes, attriſtées & anéanties; ſemblables au volant, qui n'a de jeu & d'activité que tandis qu'il eſt en l'air. Vous voyez bien que Nugatine, avec ce ton de légereté, n'a pas une ame faite pour s'occuper du

du malheur ou de la félicité d'autrui. On en a fait mille épreuves: rien ne lui va juſqu'au fond du cœur. Elle a perdu, Pere, Mere, Tante, & je ne ſai combien d'autres parens: elle n'a paru s'en appercevoir que par les ſoins qu'elle a donnés à ſes ajuſtements de deuil. Comme le noir lui alloit! elle en étoit extaſiée. Contez-lui des peſtes, des meurtres, des aſſaſſinats, des maſſacres, des inondations, des incendies; ajoutez-y, ſi vous voulez, le tremblement de Terre de Lisbonne & celui de Conſtantinople, avec toutes les ſcenes d'horreur imaginables; elle vous répondra, Robes, Rubans, Coëffures, ou ſe récriera ſur la beauté de l'Opéra comique qu'elle vit hier.

Les ſoi-diſants hommes, connus ſous le nom de Petits-maîtres, n'ont pas plus de ſolidité: notre ſexe a ſes *Nugatins:* ce ſont des poupées de forme maſculine, qu'il ſemble que la Nature, comme pour ſe jouer, ait animées exprès d'une ame ſenſible de la plus petite eſpece.

Mais ces poupées auroient été des hommes ſi l'on eût voulu; & ces hommes nés à Lacédémone auroient été des Spartiates. Je ne ſaurois trop le redire, il n'y a aucun pli, bon ou mauvais, qu'on ne puiſſe faire prendre à l'ame dans l'âge où elle eſt encore ſouple & flexible. On auroit donc pû, dans l'enfance, empêcher d'éclorre les vices qui s'oppoſent à la ſenſibilité pour autrui: mais, comme ce n'eſt pas aſſez pour faire réuſſir une plante, que d'en écarter le cailloutage & les ronces, mais qu'il faut de plus préparer la terre qui en contient les germes; on doit de même accoûtumer l'ame de bonne heure à la ſenſibilité; & voici, je crois, la maniere de le faire avec ſuccès.

Sans aller fouiller pour cet effet au fond de la Métaphyſique, ſuivons ſimplement la Nature: elle nous met ſur la voie. De tous les animaux qu'elle a créés, on diroit que l'homme ſoit celui qu'elle abandonne le plus dans les premiers temps qui ſuivent ſa naiſſance. C'eſt alors une créature aveugle, infirme, nue & ſans ſoutien. Il a mille beſoins auxquels il ne ſauroit pourvoir par lui-même. Il a tous les élémens à redouter & ne ſait ſe garantir des injures d'aucun; tous les

dangers à craindre, & ne les peut ni prévoir, ni connoître, ni éviter. L'animal qui eſt le Roi de tous les autres, ſeroit-il donc celui que le Créateur auroit le plus négligé? Et Dieu auroit-il pris moins de ſoin de ſon image, que d'un volatile, ou même d'un inſecte, qui en naiſſant connoît ſes beſoins, les cherche & ſe les procure?

Vous me prévenez, Meſſieurs, & vous ſentez que la Providence a bien mieux pourvû aux beſoins de l'homme naiſſant, en le confiant à des Pere & Mere intelligens, qu'il n'a pourvû à ceux du poulet, en lui donnant des piés, un bec & de l'inſtinct. De toutes les enfances celle de l'homme eſt la plus longue, parce que l'enfance eſt le temps des leçons, & qu'il en faut beaucoup à l'homme. De toutes les croiſſances celle de l'homme eſt la plus lente, parce que c'eſt pendant la croiſſance ſeule qu'on le forme avec ſuccès aux divers exercices du corps; & ces exercices ſont ſans nombre. Or, tant que dure cette période de croiſſance, l'enfant eſt, ou doit être, ſous l'aîle de ſes parens: c'eſt là l'âge où tous les inſtans du jeune éleve ſont marqués par autant de bienfaits de leur part; ce ſont ſes Dieux viſibles; & c'eſt de ce commerce perpétuel de bons offices & de reconnoiſſance que commence à naître la ſenſibilité. La reconnoiſſance engendre un amour tendre, on s'intéreſſe pour la perſonne aimée; ce ſentiment croît avec la raiſon; & le fils majeur eſt plus attaché à ſon Pere que l'enfant impubere. Si ce fils a des freres ou des ſœurs, nouvelle matiere à la ſenſibilité: c'eſt la main droite qui aide à la gauche, c'eſt un membre qui ſeconde l'autre, tous les évenemens domeſtiques leur ſont communs. Tous ces rameaux ſemblent être entés ſur le même tronc; & les tendreſſes du ſang, comme une ſeve active & abondante, circulent de la tige aux branches, & d'une branche à une autre.

Une nouvelle eſpece de ſenſibilité ſe développe encore dans l'homme lorſqu'il devient ſuſceptible des impreſſions de la beauté: toutes les facultés de ſon ame acquierent une augmentation d'énergie; le deſir de plaire à l'objet aimé lui fait opérer des prodiges. L'amour a peut-être autant produit d'actions béroïques que la manie de la gloire:

re: il fait plus, il humaniſe les hommes, les plie aux complaiſances, aux égards, aux attentions, leur apprend à ſe vaincre eux-mêmes; c'eſt enfin lui qui à tous égards les perfectionne, & leur donne la derniere main.

Le jeune époux, devenu pere, éprouve encore en cette qualité des ſentiments dont il n'avoit pas eu d'idée.

L'enfance, le mariage & la paternité ſont les trois ſtages qu'il faut remplir pour avoir fait ſon cours entier de ſenſibilité: mais auſſi quand on l'a fait avec profit, on a l'ame beaucoup plus acceſſible à la commiſération, au plaiſir de voir des heureux & à celui d'en faire; on ne ſent plus de volupté auſſi touchante que celle-là. Comme on regorge, pour ainſi dire, de ſentimens tendres, on en verſe la ſurabondance ſur tous les objets dont on eſt environné: on voit dans toute l'eſpece humaine, comme une extenſion de ſa propre famille; des peres dans ſes bienfaiteurs, ſes ſupérieurs, ſes Rois, ſes maîtres; des freres dans tous ſes égaux: des enfans dans toute la partie de l'eſpece humaine à qui l'on doit des ſecours, du ſupport & de la protection. Au contraire, partout où manqueront ces tendreſſes fondamentales, ſur quoi porte toute eſpece de ſenſibilité, vous ne trouverez, en quelque circonſtance que ce puiſſe être, que froideur, dédains & dureté.

# DE L'INFLUENCE DES BELLES-LETTRES SUR LA PHILOSOPHIE.

PAR M. BITAUBÉ. (*)

Les Savans ne ſe contentent pas de témoigner de l'indifférence & du mépris pour les connoiſſances qu'ils n'ont pas cultivées: afin de s'affranchir entierement de ce travail, & comme s'ils croyoient par-là légitimer leur mépris, ils jugent encore que ces connoiſſances ſont nuiſibles à leur genre d'études. Ainſi ils démentent ce principe qui, dans ce ſiécle, ſemble démontré, & qu'eux-mêmes ne révoquent point en doute, c'eſt que, ſemblables à l'Univers, les Sciences humaines ne forment qu'un ſeul Tout, dont les parties intimément liées, gravitent, ſi je puis ainſi parler, l'une vers l'autre, s'éclairent mutuellement, & malgré la diſtance preſqu'infinie de pluſieurs d'entr'elles, concourent à l'harmonie générale. Quel ſeroit donc le lien que l'on dit unir les Sciences, s'il étoit vrai que l'une retardât les progrès de l'autre, & que, rivales en quelque ſorte, on dût balancer leur pouvoir, & régler leurs limites? Mais, afin de pourſuivre le parallele commencé, n'en ſeroit-il pas ici comme des Cometes, dont la courſe a longtems paru irréguliere, juſqu'à ce qu'enfin on les ait vues aſſujetties à des loix, & faiſant partie du ſiſtême univerſel?

Pour appliquer ces réflexions à des cas particuliers, on a accuſé la Philoſophie de nuire aux Belles-Lettres. L'objet de ce Diſcours n'eſt point de diſcuter cette aſſertion: pour la détruire il ne faudroit peut-être que conſidérer l'ordre chronologique qu'elles ont eu en Fran-

(*) Lû dans l'Aſſemblée publique du 29 Janvier, 1767.

France, où l'on a fait cette imputation à la Philoſophie: l'eſprit philoſophique n'y eſt devenu général, qu'après que les Belles-Lettres y ont été portées à leur perfection; dès-lors les grands Génies s'étant ſaiſis du beau dans tous les genres, une certaine timidité s'emparant de ceux qui veulent marcher ſur leurs pas, & l'imitation rétréciſſant l'eſprit, il n'eſt pas étonnant que l'on apperçoive dans les Lettres une décadence ſenſible; il n'eſt pas plus étonnant que l'on ſe tourne de tous côtés pour en chercher la cauſe, & que voulant en quelque ſorte ſe diſſimuler ſa foibleſſe, on la rejette ſur les progrès mêmes que l'on a faits dans des genres différens.

D'une autre part, le Philoſophe, comme pour venger cette eſpece d'injure, accuſe les Belles-Lettres de nuire à la Philoſophie.

Deſtiné par état à cultiver les Lettres, mais partagé par goût entr'elles & la Philoſophie, je voudrois pouvoir les réconcilier, & n'avoir pas à me défier d'elles réciproquement.

Pour cet effet, commençons par jetter un coup d'œil philoſophique ſur les progrès & ſur les écarts de l'eſprit humain; bien loin que les Lettres ayent jamais nui à la Philoſophie, nous la verrons en tirer une grande utilité; à meſure que nous tracerons cette hiſtoire, ce principe s'établira avec plus d'évidence, & ne ſera qu'une induction naturelle des faits. Enſuite nous propoſerons un petit nombre de raiſonnemens propres à préſenter la même vérité ſous un nouveau jour.

Je remonte juſqu'au berceau de nos connoiſſances, à ce période où les Langues commencent à ſe former avec les ſociétés. La tradition tranſmet à la poſtérité le nom de ſes peres & leurs actions les plus importantes. Mais juſque-là rien n'eſt encore aſſés frappant pour réveiller le génie. Il faut des révolutions, & elles ne tardent guère à naître. Un peuple voiſin vient fondre ſur cette ſociété naiſſante; on combat; tout eſt propre à enflammer la valeur; les premiers ſentimens de la nature regnent avec d'autant plus d'empire qu'ils ne ſont point partagés par des intérêts fort différens; on fait des prodiges pour défendre

fendre ſa femme, ſes enfans, ſa patrie: les Annales s'enrichiſſent d'évenemens remarquables, & commencent à mériter le nom d'*Hiſtoire*. Je n'examine point ſi elle eſt contenue en vers ou en proſe; quand ce ſeroit en vers, ce n'eſt point là encore de la poéſie. *L'Hiſtoire* eſt donc probablement le premier pas de l'eſprit humain; mais il en fait bientôt un ſecond. La Langue ſe débrouillant d'un chaos barbare, attend & excite les génies qui la doivent mettre en œuvre: l'imagination eſt frappée des exploits conſacrés par l'Hiſtoire: la Poéſie nait, & l'on voit alors comme une création nouvelle; la nature ſemble reproduite par l'imitation; une foule d'idées neuves & frappantes s'élancent en quelque ſorte du néant; toutes les images qui s'étoient peintes à l'eſprit, tous les ſentimens qu'avoit éprouvé le cœur, réveillés à la fois par des images plus grandes & par des ſentimens plus intéreſſans, ſe raſſemblent, ſi je puis ainſi dire, autour d'eux & contribuent à les embellir. Ainſi, pour le remarquer en paſſant, c'eſt à des révolutions que la Poéſie doit ſon origine, &, comme l'expérience & la raiſon nous apprennent que la guerre, ce fléau qui doit accompagner le genre humain juſqu'à ſa ruine & la précipiter, ne tarda point à troubler les ſociétés naiſſantes, c'eſt la guerre qui enfanta la Poéſie, ſource preſqu'également noble & honteuſe! La Muſe des Herſes & de beaucoup d'autres peuples fut d'abord martiale. Les premiers chants d'Homere furent guerriers, & cette origine que j'attribue à la Poéſie explique & excuſe peut-être les combats éternels qu'il ſe plait à détailler.

La Poéſie étant née ne connut bientôt aucunes limites, & la nature entiere fut l'objet de ſes chants. L'Hiſtoire & la Poéſie, en un mot les Belles-Lettres, ſont donc, pour ainſi dire, le premier rayon que jette l'eſprit humain; c'eſt ſa premiere Philoſophie. Sans approfondir la nature on commence à la connoître; au ſein des images les plus riantes ou des tableaux les plus terribles, naiſſent les grands traits de la Morale, & même des notions Métaphyſiques; les idées du juſte & de l'injuſte, de notre ame & de la Divinité ſont tracées par le pinceau du Poëte avec des couleurs quelquefois confuſes, mais ſouvent auſſi très-

vives

vives; les rélations de pere, d'époux, de fils & d'ami, & les devoirs qu'elles impoſent, y ſont caractériſées, enſorte que c'eſt avec raiſon qu'Horace a dit en parlant d'Homere:

*Qui, quid ſit pulchrum, quid turpe, quid utile, quid non,*
*Planius ac melius Chryſippo & Crantore dicit.*

Ainſi, dans l'ordre où ſe développent nos facultés, la Poéſie n'eſt pas ſeulement un paſſage qui nous conduit à la Philoſophie; elle en jette encore les premiers fondemens: avant que celle-là ſe ſoit perfectionnée, les Poëtes furent longtems les ſeuls Philoſophes: ils inſtruiſoient les Nations: Orphée étoit le chantre de la ſageſſe: on ſait quels furent les triomphes de l'Apologue, triomphes que n'a remporté aucun traité de Morale: Socrate, ce pere de la Philoſophie, employoit l'Apologue, ou du moins l'imitoit en converſant familierement avec les hommes, & en les conduiſant à la vérité par des voies indirectes. Les Lettres, dès leur naiſſance, furent donc d'une grande utilité à la Philoſophie: mais le ſervice le plus important qu'elles lui rendirent, c'eſt de perfectionner le langage, qui eſt l'inſtrument de nos connoiſſances.

Ici je ſerai peut-être arrêté par le Philoſophe; il niera que les Lettres ayent contribué à la véritable perfection des Langues, & il ſe plaira même à leur en imputer les défauts. Diſcutons en peu de mots cette matiere.

Depuis longtems les Philoſophes, comme pour ſe juſtifier de leurs erreurs, rejettent ſur l'imperfection du langage l'abus qu'ils en font. Dans ces derniers tems ils ſe ſont fort occupés du projet d'une langue philoſophique; mais avec quelque timidité que l'on doive juger les grands-hommes qui l'ont propoſé, j'oſe croire que ce projet eſt à peu près ſemblable à celui du grand-œuvre.

La premiere difficulté ſeroit de former cette langue. Qui ſeroit le Légiſlateur? chacun ne ſe croiroit-il point en droit d'attacher à tel ſigne telle idée qu'il lui plairoit? Au lieu que l'uſage eſt ici, juſqu'à un certain point, le maître du Philoſophe comme des autres hom-

mes; on aime mieux ſuivre les loix même du vulgaire que celles de ſes égaux ou de ceux auxquels on ſe croit ſupérieur; les ſignes ont en grande partie un ſens déterminé, ou lorſqu'ils ſont vagues, il eſt au pouvoir du Philoſophe de les fixer. Je ne parle pas de la prodigieuſe multiplication des ſignes d'une langue, dont on écarteroit, ſans doute, tous les ſens métaphoriques, & où les plus petites ſubdiviſions des idées recevroient un nom; ce ſeroit hériſſer d'épines l'entrée de la Philoſophie, & ſemblables en quelque ſorte aux Lettrés Chinois, nous paſſerions une partie conſidérable de notre carriere à apprendre la langue des Philoſophes. Ce projet, quelque ingénieux qu'il ſoit, n'eſt-il pas un des abus qui réſultent de l'application de la Géométrie à la Métaphyſique? Les Géometres ont un petit nombre de ſignes à cauſe de la ſimplicité de leur objet. Il ne pourroit pas en être de même de la langue philoſophique, & quels que fuſſent les ſignes de cette langue, qu'ils euſſent quelque conformité ou non avec les caracteres algébriques, il faudroit toujours les multiplier infiniment; ils deviendroient très compoſés ainſi que les objets de la nature, & de cela ſeul réſulteroient de grands inconvéniens; car autant il eſt aiſé d'attacher un ſens fixe à un petit nombre de ſignes qui repréſentent des objets ſimples, autant il eſt difficile de parvenir, dans le cas contraire, au même but.

Après la formation d'une telle langue la ſeconde difficulté ſeroit qu'elle ſe maintînt. C'eſt le propre de toutes les langues d'être ſujettes à s'altérer, & je ne crois pas que celle des Philoſophes eût un autre ſort. Attacheroient-ils conſtamment aux ſignes les mêmes idées? Dans la diſpute n'abuſeroient-ils pas des mots ſans le ſavoir, & quelquefois de deſſein prémédité? L'uſage qu'ils ont toujours fait & qu'ils font encore des langues vulgaires ne prouve-t-il pas mon aſſertion? Peuvent-ils parvenir à fixer ſeulement un certain nombre de termes? Chacun d'entre ceux qui bâtiſſent de nouveaux ſiſtêmes, comme s'il ne vouloit pas ſe ſervir des matériaux de ſes prédéceſſeurs, ne donne-t-il pas de nouvelles définitions, & n'invente-t-il pas des mots? Si l'on peut établir qu'ayant formé une langue, les Philoſophes ne diſputeroient

roient plus, je croirai mes objections fauſſes; mais quelque bonne opinion que l'on ait d'eux ainſi que de la langue philoſophique, j'ai lieu de penſer que perſonne n'avancera cette propoſition.

J'en conclus que l'imperfection du langage eſt un mal attaché à la nature de l'eſprit humain, & que la plûpart de nos diſputes viennent encore moins de cette imperfection que de notre ignorance. Les Philoſophes qui voudroient inventer une autre langue, imitent ces Médecins imbus de leur art, qui ayant à guérir un mal déſeſpéré, preſcrivent de nouvelles recettes, auſſi infructueuſes que les précédentes. L'inſtrument de nos connoiſſances eſt imparfait ſans doute; mais il s'agit de voir ſi cette imperfection ne dérive pas elle-même des bornes de notre eſprit. Sans cela les Philoſophes ne parviendroient-ils pas à corriger les langues qui exiſtent?

Cependant, malgré l'imperfection de ces langues, ne peut-on pas dire qu'on y voit un eſprit très-philoſophique? Il y a une Philoſophie naturelle qui a guidé les hommes dans la formation du langage, Philoſophie dont la marche eſt peut-être plus ſure que celle de la Science qui en porte le nom: on a raiſonné fort juſte avant l'invention de la Logique. Si les Métaphyſiciens avoient formé une langue, il eſt plus que probable qu'ils auroient répandu beaucoup de confuſion dans les idées: il y auroit autant de langues que de ſiſtêmes différens; car ce n'eſt pas proprement parler le même idiôme que de ne point attacher aux termes la même ſignification. Au lieu que les beſoins formant le langage, cet édifice s'acheve plus lentement, & n'en eſt que plus ſolide. J'en appelle au témoignage de pluſieurs Philoſophes eux-mêmes, qui frappés de la difficulté prodigieuſe de créer les langues telles qu'on les voit exiſter, n'ont pu concevoir qu'elles fuſſent l'ouvrage de l'homme ſeul, & tandis que, dans beaucoup d'autres cas, ils rejettoient l'intervention de la Divinité, ici ils y ont eu recours. Selon eux les langues ne ſont donc pas auſſi imparfaites que pluſieurs le prétendent.

Mais ne ſeroit-il pas permis ici de retorquer contre les Philoſophes le reproche qu'ils font au vulgaire & aux Littérateurs? Si ceux-ci n'ont pas donné aux langues toute la perfection dont elles ſont ſuſceptibles, la Philoſophie, qui venant après les Belles-Lettres eût dû corriger ce déſordre, ne l'a-t-elle pas au contraire augmenté? Ce n'eſt point le peuple ni les Littérateurs (ſurtout lorſque les Lettres ne font que de naître) qui définiſſent le tems, l'eſpace, l'infini, l'éternité, la matiere, l'ame, & tant d'autres ſujets ſur leſquels on trouve autant de définitions différentes qu'il y a de Sectes, définitions qui n'ont pas peu contribué à obſcurcir le langage: ce n'eſt pas le peuple ni les Littérateurs qui ont inventé de ces mots barbares, vuides de ſens & qui ſans doute n'ont pas enrichi les langues: le peuple & les Littérateurs diſputent moins que les Philoſophes, &, par conſéquent, ils ont moins contribué qu'eux à l'incertitude du langage.

Enfin, en ſuppoſant même que les Lettres n'ayent pas amélioré les langues autant que le voudroit le Philoſophe, on ne peut renverſer l'ordre de la nature; chés tous les peuples la culture de l'imagination & de la mémoire précede celle de la raiſon; les Lettres ont donc rendu à la Philoſophie les ſervices qu'elle avoit droit d'en attendre. Mais tout juge impartial conviendra de l'importance de ces ſervices. Comme ce ſont les beſoins qui forment les langues, elles devoient être encore aſſés informes dans l'origine des Lettres; celles-ci acheverent de les perfectionner, de même qu'un grand Muſicien améliore l'inſtrument qu'il touche; elles leur donnerent la richeſſe, la force, l'élégance, la clarté, la fineſſe, la préciſion, la variété des tours, qualités qui ſont en partie l'ouvrage du jugement, & qui le ſecondant à leur tour hâterent la naiſſance de la Philoſophie.

J'ai conduit l'hiſtoire de l'eſprit humain juſqu'à la création des Belles-Lettres. Je ne prétends pas qu'elles ſoient portées tout d'un coup à leur perfection; ce ſeroit peu connoître la marche de la nature: le génie, ignorant encore le frein des loix, étoit ſemblable à un courſier indomté, qui tantôt parcourt en cadence de riantes prairies, fend

avec

avec agilité le criſtal des eaux, ou franchit les montagnes ombragées de verdure & de fleurs; mais tantôt s'égare dans des plaines ſablonneuſes, ou s'élançant ſur d'arides rochers, roule dans les précipices qui les bordent. Cependant l'eſprit humain, exercé par les Lettres, porte ſes vues plus loin; non-content de connoître pour ſentir, il veut ſentir pour connoître; il veut approfondir la nature. La Philoſophie paroit ſur la Terre; mais elle eſt bien plus informe dans ſon origine que les Belles-Lettres. La route qui de l'imagination & de la mémoire mene à la raiſon, eſt des plus longues; la raiſon ne ſait longtems qu'imaginer; l'homme accoutumé à feindre & à raſſembler promptement ſes idées, ne peut les décompoſer lentement, & obſerve la nature avec la même rapidité qu'il l'a ſentie; il crée des ſiſtêmes auſſi facilement qu'il enfantoit des images; il tient encore en main le pinceau, avec cette différence qu'auparavant il peignoit la nature, & que maintenant il en défigure les traits. Mais il ne faut pas en accuſer les Lettres; c'eſt plutôt l'effet de la foibleſſe de l'eſprit humain, plus fait pour imaginer que pour raiſonner avec juſteſſe.

Cependant cette inquiette avidité de l'eſprit qui cherche le vrai, cette inſtabilité naturelle à des idées qui n'ont aucun fondement certain, font rapidement s'élever & ſe détruire de nombreux ſiſtêmes; chaque ſiecle taxe l'autre d'ignorance, & ne s'attend pas à recevoir le même traitement; du ſein de ces ténebres ſortent néanmoins quelques traits de lumiere; la raiſon s'améliore. Alors la Philoſophie eſt à ſon tour la bienfaitrice des Lettres; non-ſeulement elle les enrichit des connoiſſances qu'elle a puiſées dans la nature, mais encore en étudiant les Lettres, elle les perfectionne; le génie reçoit des loix, & le *Goût* commence à naître. Je dis qu'il *commence à naître*, car la Philoſophie, qui enfantoit avec tant de témérité des ſiſtêmes pour expliquer l'énigme de la nature, prend ici une marche bien plus timide; elle ne ſait, ſi je puis ainſi parler, que ſuivre le génie à la trace, & étant ſon hiſtorien plutôt que ſon légiſlateur, les regles qu'elle lui impoſe elle les tire de lui-même. Cette marche étoit ſage, & ce ne fut pas

ſans utilité pour la Philoſophie que les Lettres lui ouvrirent une carriere d'obſervations, où il lui fut moins permis de créer des ſiſtêmes précaires. Cependant, comme ſi c'eût été ſa deſtinée, elle en bâtit un, où, tandis que d'un côté elle ſe montroit trop indulgente envers les premiers écarts du génie, de l'autre, en voulant que l'on ne s'écartât point des modeles qu'elle avoit choiſis, elle lui donnoit de trop fortes entraves; lui impoſer de telles loix, c'étoit n'en pas connoître aſſés la nature. Et voilà peut-être le ſeul tort réel que la Philoſophie ait fait aux Belles-Lettres. La liberté eſt l'ame du génie: comment prendroit-il tout l'eſſor dont il eſt capable, ſi, à chaque inſtant, on arrête ſon vol, & qu'on lui préſente des modeles? Il eſt à préſumer que Virgile, déja ſi grand, l'eût été encore plus, s'il ſe fût moins aſſervi à ſuivre les traces d'Homere. Quelque obligation que l'on ait à Racine d'avoir embelli les Anciens, ſi, après les avoir étudiés, il s'étoit plus livré à ſon propre génie, peut-être ſe fût-il effacé lui-même. On dit que les Leures compoſent une République; mais on y voit trop ſouvent régner le Deſpotiſme: qu'un nouveau genre y paroiſſe, auſſi-tôt on s'arme contre lui; au lieu d'en couronner l'inventeur, il eſt traduit devant un Tribunal, où on le juge d'après les écrits des Anciens; on l'appelle innovateur: ainſi les regles deſtinées à guider le génie, ſemblent faites ſouvent pour l'épouvanter, & pour l'égarer dans ſa route. Mais pourſuivons l'hiſtoire philoſophique de l'eſprit humain.

Les Lettres & la Philoſophie ont longtems été iſolées, ou leur influence étoit ſi foible qu'on pouvoit à peine s'en appercevoir; mais lorſque la Philoſophie a fait des Lettres l'objet de ſes obſervations, elles ſe ſont prêtées des ſecours mutuels, & on les a vu réunies. Le Poëte & l'Hiſtorien ſe montrerent ſouvent Philoſophes, & ceux-ci apprirent des premiers à mieux exprimer leurs penſées. Les plus belles maximes de la Morale, en paſſant dans les écrits des Poëtes & des Orateurs, furent plus généralement connues, ſe graverent dans la mémoire, & toucherent mieux les cœurs; la Poéſie étoit d'autant plus ſure d'inſtruire qu'elle ſembloit n'avoir d'autre but que l'amuſement.

Les

Les ſiſtêmes des Philoſophes furent embellis de tous les charmes de la Poéſie, & c'étoit la réunion la plus ſenſible de la Philoſophie & des Lettres. Ici l'on me conteſtera peut-être l'utilité de ces dernieres; on dira que ces ſiſtêmes étant faux, la Poéſie, à cet égard, n'a pas été d'un grand ſecours à la raiſon. Je réponds à cela que ce n'eſt point la faute des Belles-Lettres ſi la Philoſophie ne leur a pas fourni des ſiſtêmes plus vrais, que tout n'y eſt pas également faux, & qu'enfin cela n'a pas retardé les progrès de la vérité, puiſque, malgré ces poëmes, il exiſtoit dans le même tems des Sectes différentes, & que depuis il s'en eſt élevé de nouvelles; il ſemble que ce ſoit le deſtin des erreurs de la Philoſophie, comme de toutes les autres erreurs, d'être long-tems accréditées.

Juſqu'à préſent nos regards ont été principalement tournés ſur les beaux ſiecles d'Athenes & de Rome, & nous y avons vu les Lettres aſſociées à la Philoſophie. La Scene va changer maintenant. La tirannie a triomphé: déja l'éloquence, cette fiere protectrice de la liberté, a pris le langage de la flatterie: dès-lors elle touchoit à ſa décadence. Avant de diſparoître on la vit cependant jetter une vive lumiere. L'oppreſſion fit éclater dans quelques grandes ames le ſentiment de la liberté: Tacite & Juvenal écrivirent; & ils dôrent ſans doute aux horreurs dont ils furent témoins la force de leur pinceau: mais enfin les révolutions, ſuites ordinaires de la tirannie, étoufferent les Lettres, & l'on vit la Science ſe réfugier en Egypte, où avoit été ſon berceau; les Philoſophes accoururent dans Alexandrie. Là tout annonçoit à la Philoſophie les jours les plus brillans. Sur les débris de toutes les ſectes s'éleva celle des *Eclectiques*, qui tandis que les autres ſectes étoient diviſées, & conſumoient le tems en d'éternelles diſputes, ſongea à réunir les étincelles de vérité, qui étoient éparſes entr'elles. Ainſi, pendant que le deſpotiſme opprimoit le gouvernement, la liberté philoſophique s'introduiſoit dans les eſprits. Cependant, comme s'ils ne pouvoient ſecouer entierement le joug, ils emprunterent de Platon la plûpart de leurs principes, & porterent le nom de *Plato-*

*niciens modernes.* Ces tems ſembloient d'autant plus favorables à la Philoſophie, qu'elle faiſoit alors l'étude principale de tous les Savans. Depuis longtems on ne cultivoit plus les Lettres avec ardeur, & quoique Trajan les eût en quelque ſorte fait revivre, il ne fut point imité en cela des Empereurs qui le ſuivirent. Le plus ſavant d'entr'eux, Marc-Antonin, ne favoriſoit guere que les Philoſophes, & particulierement les Stoïciens; à leur exemple il mépriſoit toute autre étude que celle de la Philoſophie. Il paroit donc qu'elle devoit faire d'autant plus de progrès, que ſe frayant une route moins erronée, la vérité étoit ſon unique but, & que tous à l'envi s'appliquoient à cette ſcience; on croiroit que plus il eſt d'hommes qui approfondiſſent les mêmes objets, plus ils devroient réuſſir. Cependant, malgré des circonſtances ſi favorables, la Philoſophie ſe corrompt. Tandis qu'elle ſe propoſe de concilier non-ſeulement tous les ſiſtêmes des Philoſophes, mais encore toutes les Religions, elle produit une ſecte plus abſurde qu'aucune des ſectes qui l'ont précédée, & tombe dans une ſuperſtition plus déplorable que celle où elle voudroit remédier. Elle eſt infectée de la *Théurgie* & de la *miſticité;* c'eſt d'elle que vint le fanatiſme, qui, parmi tant de maux qu'il enfanta, remplit les déſerts & enfin les villes de cloîtres & de ſolitaires. Les Philoſophes ne croiroient point que l'origine de tant d'abus de la Religion, contre leſquels ils s'élevent aujourd'hui, ſe trouvât dans une Philoſophie déréglée; car *Ammonius-Sacca* qui, après l'établiſſement de la ſecte des Eclectiques, en fut le chef principal, paroit, juſqu'à la fin de ſa vie, n'avoir eu que l'extérieur du Chriſtianiſme. Mais d'où peut venir cette ſoudaine révolution de la Philoſophie? Pourquoi, ſi favoriſée en apparence, dépérit-elle dans les lieux qui la virent naître? Je vois que dans le même tems on négligeoit beaucoup la culture des Lettres. Je ne prétends pas que ce ſoit la ſeule cauſe de cette révolution; mais j'oſe avancer qu'elle y eut une grande influence. Pour éviter les redites, je ne m'arrête pas à prouver une aſſertion, qu'établira avec aſſés de force la ſuite de ce Diſcours.

De-

Depuis le ſecond ſiecle la décadence des Lettres fut toujours plus ſenſible. Les écrits de Longin, de Dion-Caſſius, & d'un petit nombre d'autres auteurs furent les dernieres étincelles du bon gout. Pluſieurs cauſes acheverent de l'éteindre. Au ſein de la Philoſophie des Platoniciens modernes nâquit une ſecte, qui, prévoyant peu le tort qu'elle feroit à la Religion, jugea que la culture des Lettres y étoit funeſte: cette Secte devenoit de jour en jour plus nombreuſe; les ſolitaires & tous les partiſans de la vie miſtique l'accréditoient; ce ſexe, qui ſemble plus fait pour inſpirer les arts que pour les détruire, mais dont la ſenſibilité dégénere aiſément en foibleſſe, ſuivoit les impreſſions de ces fanatiques, & ce parti étoit encore fortifié de perſonnes d'un rang conſidérable. Les Lettres, dans cette conjuration, euſſent vainement cherché un aſile à l'ombre du trône Impérial; la plûpart des Empereurs, loin de les protéger, ſembloient avoir formé le deſſein de les anéantir; l'œil ſombre de la Tirannie, comme celui de la Superſtition, redoute la lumiere des Lettres. Les guerres civiles leur porterent de nouveaux coups, & enfin ces torrens de Barbares qui ſe précipitant les uns ſur les autres inonderent toute l'Europe, les entraînerent dans la ruine générale. Alors le genre humain, ſorti de la barbarie par les progrès les plus lents, parut tombé pour jamais dans un état bien plus déplorable; car le faux ſavoir produit des effets bien plus fâcheux que l'ignorance totale; la Superſtition, du conſentement des peuples ſéduits, établit ſon trône ſur des fondemens qui ſemblent inébranlables, & s'éleve juſqu'aux plus grands excès du Deſpotiſme. Cependant les Lettres, que l'on eût cru toucher à leur plus bas période, alloient toujours en déclinant; au lieu d'étudier les bons auteurs on liſoit les vies des Saints; la haine que l'on portoit à la Littérature s'enracinoit avec l'ignorance; les Papes qui pour s'agrandir en avoient profité, l'entretenoient, & l'on dit que *Grégoire* ſurnommé *le Grand*, & auquel la Papauté doit une partie de ſon pouvoir, voulut livrer aux flammes un grand nombre d'anciens auteurs. Enfin au dixieme ſiecle & au commencement de l'onzieme, les Lettres furent entierement négligées; quelques ſectes les avoient haïes auparavant: on fit plus; on les mé-

priſa. *Les Poëtes & les Hiſtoriens étoient diffamés, & ſi quelqu'un étudioit les ouvrages des Anciens, expoſé à la riſée de tout le monde, il étoit cenſé plus lourd que le plomb & la pierre, & plus hébété qu'un âne d'Arcadie.* Ce ſont les propres paroles d'un auteur judicieux du 12^e^ ſiecle. Qu'on juge après cela du ſort des Lettres, qui ont un ſi grand beſoin d'encouragemens, & que l'indifférence ſeule peut anéantir.

Voyons maintenant quel étoit l'état de la Philoſophie. Ces détracteurs de la Littérature portoient le nom de Philoſophes: mais ce n'étoient plus des *Platoniciens modernes.* Cette ſecte, ſi ſage dans ſon origine, décréditée par les erreurs d'Origene, ou plutôt par ſa condamnation, avoit beaucoup dégénéré; on craignoit d'être ſoupçonné d'Origéniſme en ſe déclarant *Eclectique*, tant la Politique concourt à changer la Philoſophie. D'un autre côté les conteſtations qui s'éleverent à l'occaſion des *Neſtoriens* & des *Monophyſites* firent recourir à un Philoſophe qui fût plus propre à la diſpute que Platon; on tourna les yeux ſur Ariſtote: mais l'ignorance des Langues & de la ſaine Critique étoit ſi grande, que les Ecrivains mêmes de ces tems avouent qu'on n'étoit pas en état de bien ſaiſir le ſens de ſes paroles. Cependant les opinions qu'on lui attribuoit devinrent autant de loix. Et je ne puis m'empêcher de faire remarquer ici le ſort ſingulier de la Philoſophie: autant elle fut libre à l'établiſſement de l'Eclectiſme, autant elle fut aſſujettie maintenant; comme les Empires, elle tomba de la Démocratie dans le Deſpotiſme. Bientôt la *Dialectique*, qui embraſſoit la *Logique* & la *Métaphyſique*, parut la ſeule étude digne d'être cultivée; alors on jetta du ridicule ſur les Littérateurs: mais la Philoſophie devint toujours plus ténébreuſe; la Grammaire fut corrompue; les Langues, faites pour s'expliquer, ne ſervirent qu'à exciter des diſcordes; on ne s'entendoit plus; on crioit à Ariſtote, & chacun l'interprêtoit à ſon gré. Enfin, comme ſi l'eſprit humain une fois égaré ne connoiſſoit plus de terme à ſes erreurs, s'éleva la diſpute des *Univerſaux;* on ne ſe borna pas à de longues conteſtations; on prit les armes; les bancs de l'Ecole furent enſanglantés, aveu tacite que faiſoit

ſoit la raiſon de l'impuiſſance où elle étoit tombée; les Philoſophes, tenant des peuples barbares qu'avoit vomi le Nord, vouloient terminer par des combats les querelles philoſophiques.

Quelle fut donc la cauſe de cet aviliſſement de la Philoſophie? On peut en alléguer pluſieurs: mais je crois que dans le tableau qui vient d'être tracé, on a déja vu que la décadence des Lettres y eut beaucoup de part. Depuis l'établiſſement de l'*Eclectiſme* juſqu'à la guerre des Univerſaux, je vois la Philoſophie décheoir à raiſon du peu de culture des Lettres; cette rélation eſt ſi exacte que les ténebres de celle-là s'épaiſſiſſent tout-à-fait lorſque celles-ci ſont entierement négligées. La Philoſophie, quoique mal cultivée, a toujours été en honneur; il ſemble qu'elle auroit dû ſe relever & faire des progrès: pourquoi dégénere-t-elle donc avec des guides tels que Platon & Ariſtote? C'eſt en grande partie parce qu'on les entend mal, & on ne les entend point parce qu'on a négligé leur Langue & la ſaine Critique. L'eſprit humain ayant rarement aſſés de force pour philoſopher par lui-même, & le joug de l'autorité étant le plus dangereux qu'on puiſſe lui impoſer, parce qu'il étouffe le génie, l'*Eclectiſme* favoriſoit les progrès de la raiſon: il eût été mieux ſans doute d'étudier la nature; mais, au défaut de cette étude, en comparant entr'elles les opinions de tous les Philoſophes, l'eſprit pouvoit acquérir un nouveau dégré de force; du moins s'accoutumoit-il à ne pas céder à l'autorité, & cette diſpoſition pouvoit le conduire à prendre pour maître la nature ſeule. Mais les Lettres ne purent décliner ſans que la Philoſophie Eclectique ne s'en reſſentît: pour juger les opinions de tous les Philoſophes il faut les connoître, & c'eſt le travail de la Critique; or dans cette indifférence pour la Littérature, indifférence qui dégénera bientôt en haine & enfin en mépris, la Critique diſparut; le nombre des Philoſophes qu'on étudioit diminua toujours, juſqu'à ce que la pareſſe & l'ignorance firent qu'on ſe borna à la lecture d'un ſeul d'entr'eux; encore ne liſoit-on que la plus petite partie de ſes écrits. Que dut devenir alors la ſecte des Eclectiques? Il étoit naturel que la liberté qui avoit régné dans la Phi-

loſophie ſe convertit en deſpotiſme. Peu inſtruit des opinions des Philoſophes, l'eſprit humain ne put plus les juger, & ſe rétréciſſant toujours plus, il ne jugea plus-même celui qu'il connoiſſoit encore; il lui parut plus commode de ſuivre aveuglément ſes loix; n'ayant qu'un ſeul maître il étoit d'autant plus eſclave, à peu près comme un peuple qui étant enfin aſſujetti après avoir longtems combattu pour la liberté, ſe montre auſſi lâche & rampant qu'on l'avoit vu fier & magnanime. Mais ce n'eſt pas tout: l'ignorance de la Critique augmenta au point que l'on ne comprit pas même le ſeul Philoſophe auquel on s'étoit ſoumis; les oracles qu'on lui faiſoit prononcer étoient plus inintelligibles que ceux de Delphes: comme pour s'épargner la peine de juger, on liſoit préciſément les plus obſcurs d'entre ſes écrits; au lieu de porter les yeux ſur l'original, on l'étudioit dans d'infideles extraits, & de tels diſciples n'étoient pas fort propres à y répandre de la lumiere. Enfin la lecture des bons auteurs étant négligée, la Langue même qu'on parloit ſe corrompit; la clarté, cette premiere loi de la diction, fut impunément violée; on adoptoit ſans examen des mots barbares, qui n'avoient d'autre uſage que ces cris de guerre deſtinés à rallier les troupes, & à les ramener au combat. Tous ces abus dérivoient en partie de la même cauſe, de l'indifférence & du mépris que l'on témoignoit aux Lettres.

Que ſi je tourne les yeux ſur les Arabes, où les Sciences fleuriſſoient tandis que l'Europe étoit plongée dans la barbarie, j'y trouve de nouvelles preuves de mon aſſertion. J'y vois les Lettres précéder les Sciences, y préparer les eſprits, & reſter en honneur. Aucun peuple n'eut autant de Poëtes. Le génie poétique y étoit connu longtems avant le Mahométiſme; les plus eſtimés d'entre leurs anciens poëmes furent dépoſés dans le Temple de la Mecque, hommage qu'aucune autre nation ne rendit aux Lettres. Leurs hiſtoires les plus ſérieuſes ſont remplies de vers, & l'imagination domine tellement dans leur poéſie, que ce ſeroit une raiſon vraiſemblable de les croire peu propres aux Sciences. Cependant elles y réuſſirent. Tandis qu'à l'imitation

tion de Charlemagne, ſes fils faiſoient en leur faveur des efforts aſſés vains, Almamon les tranſplanta facilement dans ſes Etats; il fit traduire en Arabe les meilleurs auteurs Grecs: les Sciences firent de rapides progrès dans un pays dont la Langue, loin d'être corrompue comme ailleurs, étoit arrivée à ſa perfection, & où le flambeau de la Critique les éclairoit. Il me ſemble que ces progrès mis en parallele avec le peu d'utilité des efforts qu'on faiſoit en Europe pour ranimer les Sciences, montrent ſenſiblement l'influence des Lettres à leur égard. Pendant qu'on obſcurciſſoit ici Ariſtote, là on le traduiſoit avec ſuccès; les Arabes profitoient des ſecours que nous avions ſu rendre inutiles. Bientôt ce peuple qui avoit emprunté nos livres, devint notre maître, & nous les expliqua; nous allions dans leurs écoles leur demander ce qu'avoit penſé Ariſtote, que nous avions choiſi pour le Légiſlateur de la raiſon humaine; mais ce n'eſt pas le ſeul ſervice qu'ils nous rendirent, ils nous communiquerent toutes leurs connoiſſances; en étendant leur Empire ils régnoient en même tems ſur les eſprits; leurs conquêtes furent les ſeules peut-être qui contribuerent à l'avancement des Sciences, & on leur en doit en grande partie le renouvellement.

Chez les Grecs du moyen âge les Lettres ne furent pas tout-à-fait ſi négligées que chez les Latins. Auſſi, quoique la Philoſophie n'y parût point avec éclat, elle y fut un peu moins ténébreuſe que dans les autres pays de la Chrétienté. L'autorité y étoit partagée entre Platon & Ariſtote, ce qui affoibliſſoit au moins le joug du Deſpotiſme, dont on accabloit ailleurs la raiſon humaine.

Enfin la renaiſſance du vrai ſavoir commença par celle des Lettres. Déja les foibles efforts qu'on avoit faits en leur faveur avoient influé ſur la Philoſophie. Elle ſe partageoit en trois Sectes. L'une, qui étoit l'ancienne, ne liſoit que d'informes extraits d'Ariſtote. L'autre étudioit, quoique dans des traductions obſcures, quelques écrits d'Ariſtote lui-même. Une troiſieme Secte vouloit philoſopher d'après ſon propre génie, en conſultant néanmoins Ariſtote & Platon; il ſembloit que l'Eclectiſme allât ſe relever de ſes ruines. Mais ce n'étoient

pas là encore les jours brillans de la Philoſophie; les efforts même de l'eſprit humain ne ſervoient qu'à montrer ſa foibleſſe; il ne pouvoit comprendre les maîtres qu'il choiſiſſoit, encore moins philoſopher par lui-même; cependant ces deux dernieres Sectes annonçoient les révolutions qui alloient ſuivre.

Bientôt on s'apperçut qu'on étoit plongé dans la plus profonde ignorance, ce qui étoit un pas conſidérable vers le ſavoir; alors on courut s'inſtruire chés les Arabes.

En général les eſprits étoient préparés à recevoir une plus grande lumiere, mais la barbarie avoit été ſi épaiſſe que cette lumiere pouvoit à peine percer & ſe répandre. Un petit nombre de génies diſtingués, parmi leſquels Roger Bacon tient le premier rang, nourris dans la culture des Lettres, & éclairés par une ſaine critique, mépriſoient les diſputes ſtériles des Philoſophes. Bacon leur diſoit: *Jamais il n'y eut plus d'apparence du Savoir, plus d'application dans tous les genres, plus de Docteurs répandus dans les villes, & même dans les bourgs, & il n'y eut jamais tant d'erreurs; la plûpart deviennent ânes en étudiant des livres mal-traduits.* Il parle de ceux d'Ariſtote. Mais ces avertiſſemens ne ſuffiſoient pas pour réveiller les Lettres & la Critique; dans des maux déſeſpérés il faut une révolution, & elle arriva.

Cette révolution fut due à l'art de l'Imprimerie; ſans elle les progrès de l'eſprit humain, qui s'efforçoit à ſortir de l'ignorance, euſſent été beaucoup plus lents. Mais cet art ayant rendu publics les auteurs Grecs & Latins, qui étoient enſevelis dans les cloîtres, le deſir de les lire devint univerſel. On eut donc des Livres; mais il falloit encore des maîtres pour les expliquer: de Conſtantinople, où les Lettres avoient été moins négligées, ils ſe répandirent dans toutes les villes de l'Europe. Alors on étudia à l'envi les Langues & les Antiquités; la Critique fut reſſuſcitée; les éditions des anciens auteurs ſe multiplierent, & parvinrent en peu de tems à leur perfection.

On

On voit que l'eſprit humain prit ici une marche différente de celle qu'il ſuit quand il eſt abandonné à lui-même: au lieu de créer on étoit gloſſaire ou commentateur; ceux qui traduiſoient les Anciens ſe contentoient de l'interprétation la plus ſervile, & ne ſongeoient pas même à égaler leurs modeles. C'eſt qu'il y a une grande différence entre une nation ignorante qui ſe perfectionne par dégrés, & un mélange de peuples barbares qui ſe ſont égarés par un faux ſavoir, & qui ont corrompu le langage: chés la premiere les facultés de l'eſprit ſe développent naturellement, tandis que chés les derniers elles ſe ſont perverties, & ont beſoin de guide; le génie y eſt éteint dans un cahos de termes obſcurs & d'opinions abſurdes.

Remarquons encore ici combien l'eſprit humain ſe jette facilement dans les extrêmes. Les Lettres, ſur leſquelles tant de prétendus Philoſophes avoient voulu répandre du ridicule, étoient maintenant preſque ſeules en honneur; en devenant érudit on croyoit avoir atteint le plus haut dégré de la Science; ce préjugé n'étoit pas auſſi funeſte que celui qui ſacrifia les Lettres à la Philoſophie; au contraire, il étoit avantageux que l'eſprit ſe détournât des vaines ſubtilités où il s'étoit livré ſi longtems; l'érudition la plus futile y étoit préférable.

Cependant les Lettres firent des progrès continuels. Les Anciens, après avoir été lus par des érudits, le furent enfin par des hommes de génie; l'imagination & le gout commencerent à s'exercer; une noble émulation s'emparant des eſprits, on voulut imiter ceux que l'on commentoit; les Langues modernes ſe perfectionnerent. Déja les Lettres avoient influé ſur la Philoſophie; Platon, en Italie, partageoit le crédit d'Ariſtote, & l'Eclectiſme reparoiſſoit, quoiqu'avec moins d'éclat que dans ſon origine. Mais maintenant cette influence devint plus ſenſible; pluſieurs rougirent des égaremens de l'eſprit humain; la Philoſophie, telle qu'on l'avoit étudiée, leur parut ce qu'elle étoit, un aſſemblage de mots barbares & de diſtinctions arides & inintelligibles; le génie créateur, excité par les Arts, avoit honte que la raiſon eût été ſi longtems aſſervie aux loix d'Ariſtote, & la culture des Lettres ayant con-

contribué à l'adouciſſement des mœurs, on eut peine à comprendre qu'on avoit pu verſer le ſang-humain pour des queſtions d'une ſtérile Philoſophie. *François Bacon*, cet homme univerſel, auſſi grand Ecrivain que Philoſophe, fut un autre *Colomb* à l'égard des Sciences. Il navigea, pour ainſi dire, le premier dans ces mers inconnues, marqua les écueils, traça la route, & annonça de nouvelles découvertes: mais trop ſage pour ſon ſiecle & ſemblable en tout à Colomb, il n'eut pas la réputation qu'il méritoit. *Gaſſendi*, ſi ſavant dans les Lettres, & qui, avant *Deſcartes*, s'éleva contre *Ariſtote*, eut à-peu-près le ſort de *Bacon*, dont il imitoit la ſage timidité. On ſait que *Deſcartes* renverſa le *Péripatétiſme* en y ſubſtituant un ſiſtême non-moins erroné; mais, comme on l'a dit avec raiſon, la Philoſophie étoit dans un état ſi triſte, que pour elle changer d'erreurs, c'étoit faire des progrès. Enfin *Locke* & pluſieurs autres grands Génies ſuivirent la route qu'avoit marqué *Bacon;* ſupérieurs à la Secte des Eclectiques, qui ne cherchoient la vérité que parmi les Philoſophes, ils conſulterent principalement la nature. Cette lumiere a paru plus tard en France: mais après le ſiecle des Beaux-Arts eſt venu enfin le ſiecle de la Philoſophie; jamais on ne cultiva plus les Lettres, & jamais la Philoſophie n'eut plus d'éclat; ce qui la diſtingue aujourd'hui c'eſt qu'ennemie de l'eſprit de ſiſtême parce qu'il égara trop longtems la raiſon, & n'ayant d'autre étendard que celui de la vérité, elle eſt ſortie de ſes anciennes limites, & s'eſt emparée de tous les objets qui ſont du reſſort de l'eſprit humain.

Quoique ce ne ſoit pas proprement mon objet, je ne puis m'empêcher de faire remarquer ici en peu de mots combien les Lettres ont influé ſur la Théologie. Par-là même qu'elles ont contribué au déclin ou aux progrès de la Philoſophie, la Théologie a dû s'en reſſentir. Elle commença donc à ſe corrompre dès le ſecond ſiecle, peu après l'établiſſement de l'Eclectiſme. Depuis ce tems elle s'obſcurcit toujours plus, à meſure que s'épaiſſirent les ténebres de la barbarie. La ſaine Critique étant éteinte, & l'étude même des Peres négligée, le texte de l'Ecriture fut en proie aux plus biſarres interprétations, juſqu'à ce

que

que la Scholaſtique l'infectât entierement. C'eſt l'ignorance des peuples & la férocité des mœurs qui éleverent le tribunal de l'Inquiſition, tribunal ſemblable à celui ſur lequel Milton repréſente la Nuit & le Chaos entretenant l'éternelle anarchie des élémens, ne vivant que par la confuſion & le tumulte, & augmentant par leurs décrets le déſordre auquel ils doivent leur empire.

*. . . . . Where eldeſt Night*
*And Chaos . . . . . hold*
*Eternal Anarchie, amidſt the noiſe*
*Of endleſs warr, and by confuſion ſtand:*
*. . . . . Chaos umpire ſits*
*And by deciſion more embroils the Fray*
*By which he reigns.*

Si, lorſque les Lettres ont été cultivées, on a vu couler encore des torrens de ſang pour des diſputes théologiques, c'étoient d'affreux reſtes de la barbarie. L'art de l'Imprimerie & le renouvellement des Lettres ont précédé la Réformation, & il n'eſt pas douteux qu'ils n'y ayent beaucoup contribué. Wiclef, Zwingle, Luther, Melanchton, Calvin & tous les autres Réformateurs étoient fort verſés dans la Littérature. Léon X, bien différent de Grégoire ſurnommé le Grand, encourageoit les Lettres, &, comme l'a remarqué M. de Voltaire, il donnoit par-là des armes contre lui-même. Tout avoit changé de face: auparavant on quittoit ſes foyers pour aller combattre dans la Terre Sainte; maintenant on couroit s'inſtruire en Italie. La culture des Lettres & d'une ſaine Philoſophie eſt très-propre à inſpirer du dégout pour toutes ces queſtions également puériles & ſeches, qui tiennent encore de la Scholaſtique, & dont il n'a pas été auſſi facile de guérir les Théologiens que les Philoſophes. Ce ſont elles qui engendrent les plus grandes animoſités, parce qu'on ne peut y répandre de la lumiere, & que plus on les diſcute, plus on les embrouille, comme on augmente quelquefois l'extrême confuſion d'un écheveau de ſoie fort déliée, en s'obſtinant à la démêler. Le mépris de ces queſtions futiles termineroit bien des diſputes, & cela ſeul adouciroit les mœurs.

J'ai fait en abrégé l'Hiſtoire philoſophique de l'eſprit humain. Souvent quand on veut établir un principe, on l'étaye d'abord de ſes raiſonnemens, & l'on tâche enſuite d'y plier l'Hiſtoire. J'ai pris une route oppoſée. Conſultant l'expérience, j'ai mis ſous les yeux un tableau fidele de nos progrès & de nos écarts, afin que mes raiſonnemens ne fuſſent qu'une induction des faits, & qu'on pût la tirer ſoi-même. Or l'hiſtoire de tous les ſiecles montre la grande influence que les Lettres ont ſur la Philoſophie. Je vois cette influence lorſque les Sciences naîſſent, lorſqu'elles déclinent, & lorſqu'elles ſe renouvellent: je la vois chés toutes les Nations, chés les Grecs comme chés les Romains, chés les Arabes comme chés les peuples modernes: tout concourt donc à établir cette aſſertion. Il ne me reſte plus qu'à l'appuyer d'un petit nombre de raiſonnemens, qui n'ont pu entrer dans le corps de cette Hiſtoire philoſophique.

Les Belles-Lettres ſont principalement compoſées de l'Hiſtoire, de la Poéſie & de l'Eloquence: voyons comment, ſous ces divers points de vue, elles peuvent influer ſur la Philoſophie.

Quant à l'Hiſtoire, il eſt inconteſtable que toutes ſes branches concourent à guider les pas du Philoſophe; c'eſt le plus grand flambeau de la Morale & même de la Métaphyſique; la Philoſophie lui doit la plus grande partie des progrès qu'elle a faits aujourd'hui. Les Moraliſtes qui n'ont conſulté que le raiſonnement, ſont demeurés dans un cercle fort étroit; ceux qui ont étudié l'Hiſtoire, ont mieux remonté aux premiers principes de la Morale; ils ont vu le tableau entier de l'homme, tandis que les autres Moraliſtes en ont à peine vu le buſte: ici chaqu'un me prévenant ſans doute, nomme Monteſquieu & ceux qui ont ſuivi ſes traces.

De quelle utilité n'eſt pas, en particulier, l'Hiſtoire de la Philoſophie? S'il eſt certain qu'avant d'arriver au vrai les hommes s'égarent en différentes manieres, il eſt très-bon de connoître les erreurs de ceux qui nous ont précédés; nous les appercevons en autrui, tandis

que nous y ſerions peut-être tombés nous-mêmes: ainſi les erreurs concourent à l'établiſſement de la vérité. Ce n'eſt pas tout: l'édifice des Sciences, ſemblable à ces piramides d'Egypte, que pluſieurs générations travailloient à élever, ſont l'ouvrage de l'humanité entiere: nous ſommes pauvres de notre propre fonds: il eſt tel homme ſur les pas duquel doit ſe trouver une vérité nouvelle par la combinaiſon des vérités anciennes; s'il néglige de s'en inſtruire, il manque des termes de comparaiſon; pour perfectionner les travaux d'autrui il faut les connoître. Enfin il eſt des vérités qui ſont tombées dans l'oubli, & qu'on eſt obligé de redire ou de mieux développer. Leibnitz avouoit les obligations qu'il avoit aux anciens Philoſophes.

J'ai déja fait ſentir en pluſieurs occaſions combien la Poéſie & l'Eloquence influent ſur la Philoſophie; on a vu qu'elles ont perfectionné le langage, que le Génie créateur, allumé par les Arts, ne ſe contient point dans leurs limites, mais que ſemblable à l'Aſtre qui eſt la ſource de la vie & qui éclaire plus d'un globe, il répand, juſques dans l'Empire des Sciences, ſa lumiere & ſa chaleur; je n'ajouterai plus qu'un petit nombre de conſidérations. Le Gout, ce ſentiment rapide & délicat qui nous fait ſaiſir le beau, nous diſpoſe, juſqu'à un certain point, à trouver le vrai; car ce qu'on appelle *beauté poétique* eſt en grande partie la vérité des images & des ſentimens. Le gout n'eſt que le jugement fort exercé. Ce que j'avance ici eſt confirmé par l'Hiſtoire; on a vu que dès la renaiſſance des Lettres on conçut de l'éloignement pour la Philoſophie barbare & épineuſe de l'Ecole.

Il eſt des poëmes philoſophiques; mais la Philoſophie doit-elle s'aſſocier l'Eloquence? Pluſieurs penſent le contraire. Je ne ſais ſi ce n'eſt pas une ſuite de la Scholaſtique, & du mépris qu'on avoit alors pour les Lettres; la méthode géométrique qu'on a voulu introduire par-tout, a ſans doute contribué à établir ce ſentiment: mais l'expérience & le raiſonnement prouvent que cette méthode eſt peu applicable à la Philoſophie. Elle eſt au contraire propre à en impoſer; cet apparat de définitions & de Syllogiſmes ſubjugue l'eſprit plus que ne

feroient les ſéductions de l'Eloquence; la fatigue même qui en réſulte peut nuire à l'examen: comment ſuivre un Philoſophe dans ce labyrinthe épineux de termes, auſſi obſcurs que leurs définitions, & de raiſonnemens où le Sophiſme ſe cache d'autant mieux qu'il a pris l'apparence de la vérité!

Mais voudrions-nous transformer le Philoſophe en Orateur ou en Poëte? Ne confondons point ici les genres. Les vérités philoſophiques ſont de différente nature; plus elles ſont abſtraites, plus elles ſont du reſſort de l'entendement pur; mais il s'en faut bien qu'elles ſoient toutes de cette eſpece, & celles-là même tiennent quelquefois par leurs conſéquences à des vérités moins abſtruſes; il en eſt qui réveillent les plus grandes images, & qui touchent & embraſent le cœur. Le Philoſophe eſt ſenſible, & il parle ſurtout à des hommes qui le ſont. Doit-il alors étouffer ces impreſſions, comme s'il craignoit de trop perſuader? Je ne prétends pas le convertir en déclamateur; la véritable éloquence elle-même évite la déclamation, & c'eſt le propre du gout d'inſpirer le ton convenable à chaque ſujet; ainſi celui qui mal à propos s'animeroit ou entaſſeroit des images, pécheroit autant contre le gout que contre la ſévérité philoſophique. Il eſt un ſtile convenable à la Philoſophie; ce ſtile eſt en général plus ſimple qu'orné: mais comme tous les genres ſe mêlent ſouvent, & que l'un emprunte de l'autre, comme la Comédie éleve quelquefois ſon ton & que la Tragédie l'abaiſſe, comme l'Eloquence puiſe dans la Philoſophie, de-même celle-ci ne dédaigne pas de revêtir les embelliſſemens de l'Eloquence; du moins lui eſt-il utile d'y prendre une diction élégante & claire, & de ſuivre les loix du gout en évitant les longueurs & les redites. La réunion du beau & du vrai me paroit la perfection de la raiſon humaine; pour éclairer les autres hommes & pour ne pas ſe fatiguer ſoi-même dans la recherche de la vérité, il faut ſouvent donner du corps à nos penſées; la ſéchereſſe dégénere aiſément en ſubtilité, comme on l'a pu voir dans l'hiſtoire que j'ai tracée de la Philoſophie. Quel eſt le but du Philoſophe? Eſt-ce que la vérité demeure enfermée dans

des

des livres, qui ſemblables à des ruines ſavantes, n'attirent les regards que du plus petit nombre? ou croit-il qu'il importe aux Rois & aux peuples de n'être point plongés dans l'ignorance? Il ne peut ſe déclarer pour la premiere de ces alternatives ſans favoriſer le deſpotiſme & la ſuperſtition. Or dès que la Philoſophie eſt née pour l'utilité générale, elle ne doit pas s'approprier une méthode rebutante, que les initiés ſeuls puiſſent entendre; elle doit ſe ſouvenir qu'elle parle à tout le genre-humain, & non à ceux-là ſeulement qui voudroient ſe réſerver le titre de Philoſophe. Quoi de plus digne d'elle que de ramener à ſa véritable deſtination l'Eloquence dont tant d'hommes abuſent, & de l'employer à la défenſe de la vérité! L'erreur lui oppoſe tant d'obſtacles qu'elle ne doit négliger aucun moyen de les détruire. Si elle pouvoit à la fois éclairer l'eſprit, toucher le cœur, & flatter l'oreille, elle ſe feroit entendre des peuples & des Rois.

M'objectera-t-on qu'en prenant le langage de l'Eloquence elle riſque d'éblouir par des ſophiſmes? Mais j'ai montré qu'elle y eſt encor plus expoſée en prenant une méthode ſeche, qui conduit à des ſubtilités: dans ce dernier cas, c'eſt l'eſprit lui-même qui eſt ſéduit, & dès-lors il eſt très-difficile de le faire ſortir de la route épineuſe où il s'eſt égaré; au lieu que les ſéductions de l'Eloquence étant, pour l'ordinaire, de nature à entraîner le cœur plus que l'eſprit, dès que celui-ci eſt rendu à lui-même, il peut revenir de ſon erreur, & céder à une plus grande lumiere. Cependant je ne disconviens pas que la Philoſophie ne puiſſe abuſer de l'Eloquence: dequoi n'a-t-elle pas abuſé? Je regarde la réunion conſtante du beau & du vrai, dans toute l'étendue de ces termes, comme ce point exquis de perfection idéale que les Artiſtes ſe propoſent dans tous les arts, & qu'il eſt encore plus facile d'imaginer que d'atteindre: On eſt d'autant plus parfait qu'on en approche. Le Philoſophe en qui le beau domine ſur le vrai eſt encore bien éloigné du but, & il ſera effacé par celui en qui ces deux qualités ſe verront mieux réunies.

Que ſi on conſulte l'expérience, on voit que les Métaphyſiciens & les Moraliſtes qui vont à la poſtérité, n'ont pas dédaigné d'être éloquens; ils ſont donc les plus utiles. On nomme Platon l'Homere des Philoſophes. Cicéron en eſt peut-être le Virgile, tant ſa diction eſt pure & élégante. Séneque, quoique Stoïcien, n'avoit pas négligé la culture des Lettres, & il auroit emporté tous les ſuffrages s'il avoit eu autant de gout que d'eſprit. Pline, l'Hiſtorien de la nature, y a puiſé la force & l'agrément de ſon ſtile. Bacon, que l'on peut appeller le reſtaurateur de la Philoſophie, l'eſt auſſi de la ſaine Eloquence. Malebranche en combattant l'imagination, prend des armes d'elle-même, & il ne ceſſe d'être éloquent que lorſqu'il tombe dans de vaines ſubtilités. Locke même, qui ſembloit ne ſacrifier qu'au vrai, ſort quelquefois de la ſimplicité de ſon ſtile, & s'il avoit plus conſulté le gout en évitant les longueurs & les redites, la vérité y eût gagné, & il ſeroit plus lû encore. En Allemagne Wolff commence à tomber depuis qu'on y cultive plus les Lettres, & il doit ſans doute une grande partie de ſa réputation à ceux de ſes diſciples qui, en l'abrégeant, l'ont dégagé de la méthode ſcientifique & de l'extrême ſéchereſſe qui regne dans ſes ouvrages. Parlerai-je de Monteſquieu, cet homme auſſi profond qu'éloquent, & qui ſemble avoir le plus approché de ce point exquis de la perfection idéale dont j'ai parlé, & qui conſiſte dans la réunion du vrai & du beau? Je m'arrête ici, & craignant d'être ſuſpect de flatterie, je ne me permets pas de nommer les Philoſophes encore vivans; je me contente de remarquer que le caractere diſtingué de ce ſiecle eſt la Philoſophie aſſociée à l'Eloquence. Mais que fais-je? en parlant des Philoſophes modernes ne donné-je pas des armes contre moi-même? Ignoré-je combien on s'éleve contr'eux, & comme on rend leur éloquence coupable de leurs erreurs? Mon ſuffrage n'a point de poids: mais ſi l'on diſpute le nom de Philoſophe à tous ceux qui s'égarent, dès-lors nul ne le méritera. On ne peut nier du moins que ceux dont il eſt ici queſtion n'ayent des vues très-profondes. Il eſt des erreurs où les grands Génies ſeuls peuvent tomber, parce qu'ils creuſent les premiers un ſujet ou s'écartent de la route battue, où les

ſolutions étoient inſuffiſantes. Par-là ils réveillent les eſprits plus lents, que le paradoxe ſeul peut tirer de leur létargie; chacun s'empreſſe à l'examen d'une idée nouvelle, & la vérité ſort quelquefois du ſein de ces combats. Les chutes de ces Philoſophes ne ſont pas d'une autre nature que les chutes de tous les Génies créateurs: jamais on ne conteſtera à Corneille le nom de grand Poëte.

Je me flatte que toutes les parties de ce Diſcours ont concouru à établir que les Lettres, bien loin d'être nuiſibles à la Philoſophie, y ſont d'un grand ſecours. Ainſi il eſt de l'intérêt même des Philoſophes de les eſtimer & de n'en point négliger la culture. La forme de cette Académie qui les réunit eſt donc fort utile; elles peuvent ici ſe prêter la main & marcher d'un pas égal. Il eſt vrai que ſi l'on remonte à l'établiſſement de cette Société, on trouve qu'en réduiſant à la ſeule érudition la culture des Lettres, elles ont été reſſerrées dans des limites étroites: depuis a conſervé une inſtitution faite dans un tems où le gout commençoit ſeulement à ſe répandre en Allemagne: mais aujourd'hui qu'il y fait des progrès continuels, & qu'un grand Monarque lui-même l'inſpire, ceux qui préſideront à ce Corps, feront, à cet égard, les changemens qu'ils jugeront convenables.

# ELOGE
## DE
# Mr. SUSSMILCH.

JEAN PIERRE SUSSMILCH, Conſeiller du grand Conſiſtoire, Prevôt de cette partie de Berlin qu'on nomme Cologne, premier Paſteur de l'Egliſe de S. Pierre, Commiſſaire du Directoire des pauvres, Inſpecteur des Egliſes voiſines & du College de Cologne, Membre ordinaire de l'Académie Royale dans la Claſſe de Belles-Lettres, nâquit à Berlin le 3 de Septembre 1707. Sa famille, du côté paternel, étoit originaire de Boheme. Son grand-pere, *Elie Suſſmilch*, homme de bien & craignant Dieu, fut expoſé en 1650 à la violente perſécution que les Evangéliques de Boheme endurerent de la part de l'Empereur FERDINAND III, & préférant le ſalut de ſon ame à la conſervation de ſes biens temporels, il ſortit de ſa patrie le bâton de pélerin à la main. Le ſacrifice qu'il faiſoit n'étoit pas médiocre: il jouiſſoit d'un état honorable & d'un ſort avantageux. Dès l'an 1513 l'Empereur avoit accordé à un de ſes Ancêtres la dignité de Juge héréditaire du Château de *Tollenſtein*, ſitué à trois milles au delà de *Zittau*; & cette dignité avoit ſubſiſté dans la famille juſqu'au refuge de l'Ayeul de M. *Suſſmilch*; après quoi elle paſſa à la ligne féminine du nom de *Heltzel*. Lorſque le pere de notre Académicien fit un voyage en Boheme pour voir ſa famille, on lui offrit tous les biens & emplois que ſon pere avoit abandonnés, s'il vouloit embraſſer la Religion Catholique; mais le fils d'un Confeſſeur étoit bien éloigné de devenir Apoſtat.

L'un & l'autre éprouverent les effets les plus marqués de la protection divine, & de la rémunération promiſe à ceux qui *cherchent*

*pre-*

*premierement le Royaume de Dieu.* Le grand-pere ayant choiſi pour aſyle le Brandebourg où le grand Electeur tendoit généreuſement les bras à tous ceux qui étoient les victimes de l'oppreſſion, il eut le bonheur d'être attaché immédiatement à ſon ſervice, dans la Compagnie d'élite qu'on nommoit les Drabans de la Garde. Il ſuivit ce Héros dans toutes ſes expéditions. Après la bataille de Fehrbellin, accablé ſous le poids des travaux & des années, il obtint un congé qui ne détruiſit pas entierement ſes rélations avec ſon auguſte Maître. Ayant fait un mariage par lequel il avoit acquis un petit bien à Zehlendorff, lieu ſitué à mi-chemin entre Berlin & Potzdam, toutes les fois que l'Electeur y paſſoit, il mettoit pied à terre chez ſon vieux griſon, (c'eſt le nom dont il l'honoroit,) & lui renouvelloit les aſſurances de ſa protection.

Des deux fils d'*Elie Suſſmilch*, l'aîné *Jean Elie*, pere de l'Académicien, qui avoit beaucoup voyagé dans ſa jeuneſſe, en France, en Angleterre, en Hollande, & dans preſque toute l'Allemagne, poſſédoit la plûpart des Langues vivantes. Il s'attacha au négoce de grain, & fut propriétaire d'une braſſerie à Berlin. Son Epouſe, *Marie Blell*, étoit fille de *Pierre Blell*, Capitaine de la Ville & Maître Teinturier à Brandebourg, où ſon grand-pere, venu du Brabant, avoit apporté l'art de la Teinture, encore inconnu dans nos contrées.

Ces honnêtes parens, gens éclairés & vertueux, ſe trouvant fort à leur aiſe, n'épargnerent rien pour l'éducation de leur fils aîné, JEAN PIERRE, qui fait le ſujet de cet Eloge. Il paſſa les premieres années de ſon enfance chez ſon grand-pere maternel à Brandebourg. Après avoir acquis les connoiſſances élémentaires, il reçut la premiere teinture de celles qu'on nomme Humanités, par les leçons domeſtiques d'un fort habile homme, nommé *Hoppen*, qui a été depuis Recteur à Ruppin. On l'envoya enſuite au College de la nouvelle Ville de Brandebourg, à la tête duquel étoit un Homme de Lettres qui s'eſt acquis de la réputation, Mr. *Gottſchling*. En 1716, on le fit venir au College de Berlin où il paſſa ſix années, & fut inſtruit par le Recteur *Bodenburg*, par M. *Friſch* qui a été un Membre diſtingué de

la Société Royale, par Mrs. *Henning*, *Dietrich*, & par d'autres Maîtres qui enſeignoient avec applaudiſſement. Dès ce tems-là cependant, comme je le vois par quelques réflexions ſur les années de ſes études, qu'il a laiſſées en manuſcrit, & qui m'ont été communiquées; dès ce tems-là il ſentoit que les inſtructions publiques ſont défectueuſes à bien des égards, qu'on s'y traîne d'une maniere abſurde dans la route des connoiſſances, & qu'on s'y gâte d'une maniere funeſte dans celle des mœurs, faute d'arrangemens ſalutaires qui ôtent d'un côté à la pédanterie ce ſceptre de fer qu'elle appéſantit ſi impitoyablement, & qui préviennent de l'autre les écarts d'une jeuneſſe déréglée & la contagion du libertinage. Auſſi, en déplorant la perte d'un temps qui auroit pû être beaucoup mieux employé par rapport à la culture de l'eſprit, il rend les plus ferventes actions de graces à Dieu d'avoir été au moins préſervé de la dépravation du cœur; & il reconnoit qu'après Dieu il en a été redevable aux ſoins vigilans & aux bons exemples de ſon pere & de ſa mere. Il met auſſi en ligne de compte, avec beaucoup de raiſon, les ſolides enſeignemens de la Religion qu'il reçut de M. *Roloff* l'ancien, Paſteur de l'Égliſe de S. Marie, par lequel il fut admis à la Sainte Cene. Heureux ceux qui conſervent juſqu'au dernier ſoupir les impreſſions reçues dans ces circonſtances déciſives de la vie, où il s'agit d'opter entre Dieu & le Monde! La crainte de Dieu eſt le véritable commencement de la ſageſſe.

Il étoit tems de ſe fixer à un objet & de prendre un parti par rapport à la carriere de ces études qu'on nomme Supérieures, & qui conduiſent à un état, à une profeſſion dans la Société. Il ſembloit d'abord que M. SUSSMILCH fût tout décidé. Il avoit un grand penchant pour l'Hiſtoire Naturelle; & M. *Friſch*, que nous avons déjà nommé, alors Con-Recteur du College où il étudioit, fortifia puiſſamment ce goût inné. Il menoit promener ſes diſciples dans les campagnes pour y chercher des pierres, des coquillages, des inſectes, pour y herboriſer, en un mot pour ſe familiariſer avec les différentes parties du Spectacle de la Nature. Le jeune SUSSMILCH étoit un

un des plus ardens à recueillir les fruits de ces utiles promenades. En 1723, le Théatre Anatomique ayant été mis par le feu Roi ſur le pied diſtingué où il s'eſt ſoutenu depuis, M. SUSSMILCH aſſiſta au premier Cours qui s'y fit, & s'initia tout de ſuite aux autres parties dont l'aſſemblage forme le vaſte Corps de la Médecine. Il n'avoit donc plus qu'un pas à faire pour devenir Etudiant dans cette Faculté, & ſes parens ſemblerent d'abord entrer dans ſes vues. Mais, ayant changé d'idée bientot après, ils lui témoignerent qu'ils auroient plus de ſatisfaction de le voir ſe conſacrer à l'étude de la Théologie. En fils bienné, il déféra à leurs deſirs; & dans le fonds ce qu'il avoit fait juſqu'alors ne pouvoit être regardé comme une perte de ſon tems & de ſon application. L'étude de la Nature qui conduit à guérir le corps, ſi l'on ſçait bien l'appliquer, ſert encore mieux à la cure des ames.

Cependant, comme un Théologien a beſoin d'acquérir des connoiſſances d'un ordre particulier, il falloit de la diligence & un redoublement d'application pour arriver à ce but. Ses parens, en gens très ſenſés, ne crurent pas l'en détourner, en lui faiſant refaire ce qu'on appelle les claſſes, ou études ſcholaſtiques, qu'il avoit un peu négligées. Il fréquenta pour cet effet pendant deux ans & demi l'Ecole de la Maiſon des Orphelins de Halle; après quoi, en 1727, il fut immatriculé au nombre des Etudians de l'Univerſité de cette Ville. Les Langues Grecque, Hébraïque, & le Rabbinage l'occuperent d'abord; & il eut pour guides des Théologiens très érudits. L'année ſuivante il ſe rendit à Jena, où le célebre *Buddeus* donnoit des leçons de Théologie dogmatique, d'Hiſtoire eccléſiaſtique, & d'Hiſtoire littéraire; & Mrs. *Zimmermann*, *Carpow*, *Köhler* & *Reuſch* enſeignoient la Philoſophie & les Belles-Lettres. N'oublions pas M. *Hamberger*, qui s'eſt fait un grand nom en Mathématique & en Phyſique. Deux ans & demi ſe paſſerent à écouter ces Docteurs; & il ſe trouva en état d'enſeigner lui-même, ayant inſtruit avec ſuccès quelques jeunes Seigneurs dans les Mathématiques. Il prit pendant ce tems-là du goût pour la vie académique; & de retour à Berlin en 1732, il ſollicita ſes parens à conſentir

ſentir qu'il aſpirât à quelque Chaire d'Univerſité. Ils lui refuſerent ce conſentement; & tout ce qu'il obtint d'eux, ce fut de retourner à Jena pour y ſoutenir une Theſe publique: ce qu'il fit ſous M. *Hamberger*. La Theſe imprimée a pour titre *de adhæſione*.

Ici prit fin la carriere de ſes études, à laquelle en ſuccéda une autre fort gracieuſe pour lui, & qu'on peut regarder comme la principale ſource des avantages dont il a joui dans la ſuite. Il fut prépoſé à l'éducation du fils aîné de M. le Maréchal *de Kalckſtein*, dont la Maiſon étoit une Ecole de vertu & de religion. Il y paſſa quatre années remplies de douceurs; après leſquelles il eut la ſatisfaction de demeurer attaché au même Seigneur, en devenant Aumônier de ſon Régiment. Il reçut l'ordination le dixieme Dimanche après la Trinité, en 1736. Avant que de prendre poſſeſſion de ce poſte, il fit un tour en Hollande; & ce fut à ſon grand regret qu'il n'eut pas aſſez de tems pour viſiter l'Angleterre, dont il ſavoit déjà la Langue.

Pendant les heures de loiſir que lui laiſſoient ſes fonctions, il fit des études ſuivies, & compoſa même quelques Ecrits, parmi leſquels il y en a qui n'ont pas vu le jour, par exemple, une Diſſertation ſur un ancien peuple de l'Oſt-Friſe, nommé les *Stédingres*, que les fureurs de la perſécution anéantirent en quelque ſorte dans le XIII ſiecle.

Aux Fêtes de la Pentécôte 1739, le feu Roi de glorieuſe mémoire le fit prêcher dans ſon Cabinet; & pendant les derniers mois de la vie de ce Monarque il eut à diverſes repriſes le même honneur, étant même le dernier qui ait prononcé à Berlin un Sermon en préſence de S. M. En 1740, il y eut une Cure vacante à la nomination du Chapitre de Brandebourg, qui l'offrit à M. SUSSMILCH; mais il aima mieux ſuivre en Siléſie le Régiment auquel il étoit attaché, lorſqu'il marcha du côté de cette Province à l'entrée de la Campagne de 1740. Il partagea donc les fatigues, & juſqu'à un certain point les dangers des Troupes; il y en eut même un, auquel il échapa après la bataille de Molwitz, qu'il a toujours regardé comme une des grandes époques

de

de ſa vie, marquée par un effet ſignalé de la protection divine, s'étant trouvé ſur le point de périr dans les flammes d'une maiſon paſtorale à laquelle le Maréchal de Neuperg avoit fait mettre le feu, & d'où il ſe ſauva à cheval à travers le jardin & les champs qui étoient tout parſemés des détachemens de l'Armée ennemie.

Je ne ſai s'il crut devoir ſe mettre à l'abri de ſemblables événemens; ce qu'il y a de certain, c'eſt que bientôt après il vint prendre poſſeſſion de la Cure dont nous avons parlé, nommée *Ezien*, & y fit ſon entrée le 11 Dimanche après la Trinité. Mais à peine y paſſa-t-il un an. M. *Reinbeck*, ce Théologien dont la mémoire ne mourra jamais, ayant payé le tribut en 1741, M. SUSSMILCH fut un des Eccléſiaſtiques qu'on invita à prêcher pendant la vacance. Ayant été fort goûté, le Roi l'accorda aux deſirs de l'Egliſe, & le nomma Prevôt en Fevrier 1742. Il fit ſon premier Sermon dans l'Egliſe de S. Pierre, le même Dimanche, dixieme après la Trinité, auquel un an auparavant M. *Reinbeck* étoit monté pour la derniere fois en Chaire. Aux fonctions de Paſteur il joignit celles de Conſeiller Eccléſiaſtique; & quand le grand Conſiſtoire fut formé en 1750, il en devint un des Membres avec une augmentation d'appointemens.

Nous n'avons pas voulu interrompre le fil des circonſtances de ſa vie eccléſiaſtique; mais nous avons déjà eu ſoin de faire ſentir qu'il s'appliquoit fortement à des études propres à lui donner un rang honorable dans la République des Lettres. Dès l'an 1740, il donna le fruit d'un travail conſidérable & très intéreſſant, en faiſant paroître la premiere Edition de ſon Ouvrage intitulé: *L'Ordre de la Providence dans les révolutions auxquelles le genre humain eſt aſſujetti.* C'eſt là proprement l'occupation de toute ſa vie, le but de toutes ſes recherches, le centre de toutes ſes réflexions; depuis qu'il eut formé ce deſſein, il ne le perdit pas un inſtant de vue, il raſſembla de tous côtés les ſecours qui pouvoient le mettre en état de le perfectionner, il conſulta les Savans dont les lumieres pouvoient étendre les ſiennes, ſurtout notre célebre M. *Euler*; en un mot jamais on n'a vu un Auteur plus

rempli de ſon ſujet, plus livré à cette eſpece d'enthouſiaſme qui perſuade qu'il n'y a rien de mieux que ce qu'on fait, & qu'on le fait le mieux qu'il eſt poſſible de le faire. En diſant cela, je ne dis rien qui n'appartienne à ſon Eloge; car l'Ouvrage en queſtion n'ayant pour but que la gloire de l'Etre ſuprême & le bonheur du genre humain, il ne pouvoit y avoir d'excès dans l'ardeur avec laquelle il s'en occupoit & en occupoit les autres: ou du moins c'étoit un de ces excès louables dont il ſeroit à ſouhaiter que les exemples fuſſent plus fréquens. C'eſt par cette continuité de travaux que M. SUSSMILCH parvint à donner en 1761 une ſeconde Edition, groſſie de plus de la moitié. L'approbation publique lui a ſervi d'encouragement & de récompenſe. Quoique l'entrepriſe, à tout prendre, ne fût pas originale, & que divers Savans Anglois euſſent déjà rompu la glace, & ouvert la plûpart des routes, on peut dire que notre Académicien a beaucoup enchéri ſur eux, qu'il s'eſt procuré des détails auxquels ils n'avoient pas penſé, ou pu parvenir; & qu'il a donné aux idées de la Science qu'on nomme *Arithmétique Politique*, des développemens dont l'application ſeroit fort utile à la ſociété. Peut-être a-t-il quelques longueurs, quelques répétitions; mais on doit les attribuer à ce zele patriotique qui lui faiſoit ſouhaiter de mettre dans tout leur jour & d'inculquer fortement des choſes de l'importance deſquelles il étoit pénétré. J'ai toujours cru qu'une bonne réduction de ce Traité en François ſeroit bien reçue; il ſouhaitoit qu'on en fît une Traduction qui auroit peut-être moins de ſuccès; il m'a propoſé plus d'une fois de l'entreprendre, mais mes occupations ne me l'ont pas permis.

Connu donc avantageuſement par la premiere Edition de ſon Livre, les portes de l'Académie lui furent ouvertes peu après ſon renouvellement, dans le cours de l'année 1745; & je n'ai pas beſoin de vous dire, Meſſieurs, que depuis ce tems-là il a été un de nos meilleurs Académiciens, des plus attachés à cette Compagnie, des plus aſſidus à nos Aſſemblées, des plus diſpoſés à nous entretenir dans toutes les occaſions publiques & particulieres, & à fournir ſon contingent

gent pour nos Mémoires. Il apportoit au milieu de nous des diſpoſitions propres à le faire conſidérer & aimer; un air de candeur & d'affection que le mot de *bon-hommie* n'exprimeroit peut-être pas mal, & qu'il auroit été difficile de ne pas payer de retour; auſſi avons-nous pris un véritable intérêt aux ſituations qu'il a éprouvées, & nous aurions ſouhaité qu'elles euſſent été adoucies par les récompenſes auxquelles il a fortement aſpiré juſqu'à la fin, & dont il nous a toujours paru très digne.

Après l'objet que nous venons d'indiquer, celui qui paroiſſoit être le plus du goût de M. SUSSMILCH, c'étoient les recherches étymologiques. Il ſuivoit la piſte de ces traces ſi effacées & ſi équivoques qui rapprochent d'une ſource commune les Langues des contrées les plus éloignées les unes des autres, & des ſiecles entre leſquels il s'eſt écoulé le plus grand intervalle de temps. Il n'y a peut-être point de matiere plus flexible, ſi j'oſe m'exprimer ainſi, que celle-là, & qui ſe prête plus aiſement aux modifications que lui imprime une imagination vive & échauffée. Je comparerois ces mots qui voltigent ſur la ſurface des tems & des lieux, aux nuages diſperſés dans l'air, où nous voyons à chaque inſtant toutes ſortes de figures nouvelles. Il y a un échantillon de M. SUSSMILCH là-deſſus dans le premier Volume de nos Mémoires; il roule *ſur la convenance des Langues d'Orient & d'Occident*. Il avoit auſſi envoyé à M. *Jault* des Supplémens pour la nouvelle Edition du Dictionnaire de Ménage, faite à Paris en 1750.

Outre les Diſſertations qui ſe trouvent dans les Volumes ſuivans, & dont je m'abſtiens de rapporter les titres, il a fait imprimer ſéparément une *Réfutation de la doctrine d'*Edelmann, en 1748, deux Diſſertations *ſur le rapide accroiſſement de la Ville de Berlin*, en 1750, quelques Sermons de circonſtances, & un peu avant ſa mort un *Eſſai deſtiné à prouver que la premiere Langue parlée n'a pas été l'ouvrage des hommes, mais qu'elle doit ſon origine au Créateur.*

Il fal-

Il falloit que M. SUSSMILCH fût laborieux pour pouvoir aſſocier aux nombreuſes & pénibles fonctions de ſes charges eccléſiaſtiques les travaux académiques dont nous venons de rendre compte, ſurtout ſi l'on met encore en ligne de compte la multitude de ſes rélations, & des diſtractions qui le tiroient hors de chez lui preſque tous les jours, & lui faiſoient paſſer bien des heures perdues pour ſon Cabinet, & peut-être dommageables à ſa ſanté. Il aimoit pourtant ce Cabinet, & ſe ménageoit d'autres heures, au détriment peut-être encore de ſa conſervation, pour y jouir d'une très belle Bibliotheque qu'il avoit amaſſée à grands fraix, & qui fait, comme c'eſt aſſez l'ordinaire des gens de lettres, preſque tout l'héritage de ſa nombreuſe famille.

Il s'étoit marié le 27 Juin 1737 avec Mlle. *Charlotte Dorothée Lieberkühn*, autre nom auquel notre ſenſibilité ſe réveille. Il a goûté avec cette digne Epouſe toutes les douceurs de l'état conjugal, accompagnées de ce qu'on en nomme les bénédictions, ayant eu d'elle dix enfans, dont neuf avec la mere lui ſurvivent. Des deux fils, l'un eſt déjà dans les Emplois en Siléſie, & l'autre va commencer ſes études à l'Univerſité. Une bonne éducation que toute cette famille a reçue annonce qu'elle ſoutiendra le nom honorable que lui a tranſmis l'objet de ſon reſpect & de ſon attachement, trop tôt enlevé à ſes vœux & à ſes beſoins.

M. SUSSMILCH paroiſſoit bien conſtitué & naturellement vigoureux. Avec cela il étoit dans toute la force de l'âge, lorſqu'un coup d'apoplexie imprévu & foudroyant vint le terraſſer le 21 Mai 1763. Il s'en releva cependant, mais dans un état bien propre à faire craindre les rechûtes. Son bras gauche demeura paralytique. Il employa tous les ſecours de l'art pour ſa guériſon, & fit en particulier le voyage des bains de Töplitz. Mais tout cela n'aboutit qu'à lui procurer quelque répit, ſans faire diſparoître les ſymptômes qui caractériſoient ſon mal. Une retraite exacte & un régime rigoureux auroient peut-être prolongé ce répit. Au mois de Septembre de l'année paſ-

ſée

ſée il eut encore la conſolation d'officier en prononçant un Sermon pour la Dédicace d'une nouvelle Chaire conſtruite dans l'Egliſe de S. Pierre. La derniere de nos Aſſemblées à laquelle il a aſſiſté eſt celle du 12 Mars. Le 17 du même mois il fut frappé d'un violent coup, ſuivi des accidens les plus fâcheux, qui le priverent également de l'uſage des membres du corps & de celui des facultés de l'ame. La Nature, après avoir ſoutenu quelque tems ces aſſauts, ſuccomba, & il ceſſa de vivre le 22 Mars. Les derniers devoirs rendus à ſa mémoire par un excellent Orateur Chrétien ont attendri une foule prodigieuſe d'Auditeurs; & ceux dont je viens de m'acquitter, ſerviront à perpétuer ſa mémoire dans une Compagnie, à laquelle de ſemblables pertes ne peuvent manquer de cauſer les plus vifs regrets.

# OBSERVATION DU PASSAGE DE VENUS SUR LE SOLEIL

## FAITE A' COLOMBES PRÈS DE PARIS LE 3 JUIN 1769.

PAR M. J. BERNOULLI. (*)

Je dois aux bontés de Mr. le Marquis de Courtanvaux, l'agrément d'avoir fait cette obſervation avec un excellent inſtrument, toute la commodité poſſible, & tout le ſuccès que je pouvois eſpérer. (**) Ce fut le 2 de Juin que je me rendis, pour 2 ou 3 jours, à Colombes, où eſt l'Obſervatoire de ce Seigneur. J'étois impatient de connoître l'heure & la marche de la Pendule, qu'on ignoroit, mais je ne pus faire que peu de choſes à cet égard avant le 4: le tems ne permettoit pas d'obſerver beaucoup, il ſembloit même vouloir rendre l'obſervation du paſſage impraticable, & trois heures encore auparavant nous eumes un ouragan des plus violens, accompagné de beaucoup de pluye.

Je ne laiſſois pas de me préparer, pour obſerver l'entrée de Venus, avec toutes les attentions néceſſaires; & dans ce deſſein j'avois ajuſté à ma vue, au moyen des bandes de Jupiter & des taches du Soleil, un excellent Téleſcope Grégorien fait par Short, de 2 pieds de

(*) On n'a pas cru devoir attendre l'impreſſion du Volume de 1769 pour publier cette Obſervation.

(**) La complaiſance & la généroſité de M. le Marquis ſont allées plus loin que ne le pourroient croire ceux qui ne connoiſſent pas ſa façon de penſer. Un Téleſcope Equatorien duquel il ſe propoſoit de ſe ſervir, s'étant trouvé dérangé peu de tems avant l'obſervation, il ne voulut ni accepter le Téleſcope qu'il m'avoit deſtiné, ni même monter un autre de ſes Inſtrumens de peur de me troubler.

de foyer, & que j'ai trouvé, par une expérience, groſſir environ cent fois.

Le tems de l'entrée approchant, un homme habitué à compter les ſecondes ſe poſta auprès de la Pendule, & de mon côté je me fis une place très commode auprès du Téleſcope, & je regardai fréquemment le Soleil, muniſſant l'œil contre ſes rayons avec des morceaux de glace encadrés par Dollond & médiocrement enfumés. De fréquens nuages paſſoient ſur le Soleil; je vis bientôt qu'ils m'avoient empêché de voir le premier contact, & qu'il devoit être arrivé depuis pluſieurs ſecondes. De nouveaux nuages m'empêcherent de voir l'entrée continuer; mais, au bout de cinq à ſix minutes, le Soleil reparut & je vis ſur ſon diſque une partie conſidérable de celui de Venus; l'un & l'autre étoient déjà aſſez mal terminés à cauſe de leur voiſinage de l'horizon. J'attendois avec impatience le moment du ſecond contact lorſqu'après pluſieurs nuages il en vint un très épais & preſque immobile qui me fit craindre de manquer cet inſtant; heureuſement il diſparut à la fin tout à fait environ une demi-minute avant ce contact, que j'eus enſuite la ſatisfaction de ſaiſir dans un moment où il n'y avoit aucun nuage ſur le Soleil, où Venus étoit bien au milieu du champ du Téleſcope, & où mon œil n'étoit point fatigué. Il eſt vrai que les vapeurs qui s'élevoient de l'horizon rendoient les bords des diſques très mal terminés, le bord de Venus ſurtout étoit comme dentelé; mais voici ce que j'ai remarqué avec préciſion.

A $7^h. 31'. 28''$ de la Pendule, je vis qu'une ſeule des éminences du bord de Venus touchoit encore le bord du Soleil.

7. 31. 29 Je voyois la même apparition.

7. 31. 30 Je ne pouvois pas dire qu'elle eût ceſſé, mais ce contact n'étoit plus que très foible.

7. 31. 31 Enfin j'ai vu diſtinctement un filet de lumiere très délié entre l'éminence dont je parle & le bord du Soleil le plus proche.

Comme j'ai vu pendant pluſieurs ſecondes Venus s'éloigner de plus en plus du bord du Soleil, j'ai adopté ce tems de $7^h.\ 31'.\ 31''$ pour le tems obſervé du contact intérieur, & j'ai réduit cette heure en tems vrai en y ajoutant $6'.\ 43''$. Je vais indiquer ici les données ſur leſquelles je me fonde pour cette réduction.

Voici d'abord des hauteurs correſpondantes du Soleil, du 4 Juin, telles que j'ai pu les prendre avec un Quart de cercle de 2 pieds, bien travaillé, mais qui n'avoit pas ſervi de quelques ſemaines avant mon arrivée, & qui ne m'étoit pas familier.

| Matin. | Hauteurs du bord ſupér. du ⊙. | | Soir. | Sommes. | Heures à midi. |
|---|---|---|---|---|---|
| $20^h.\ 33'.\ 28''$ | 1ᶠ fil | $43°.3'.20''$ | $3^h.\ 13'.\ 17''$ | $23^h.\ 46'.\ 45''$ | $11^h.\ 53'.\ 22\frac{1}{2}''$ |
| $33.\ 48$ | 2ᵈ. | | $12.\ 55\frac{1}{2}$ | $46.\ 43\frac{1}{2}$ | $53.\ 22$ |
| $37.\ 27\frac{1}{2}$ | 1ᶠ fil | | $9.\ 20$ | $46.\ 47\frac{1}{2}$ | $53.\ 23\frac{3}{4}$ |
| $37.\ 48$ | 2ᵈ | $43.10.\ 15$ | $8.\ 58\frac{3}{4}$ | $46.\ 46\frac{3}{4}$ | $53.\ 23\frac{1}{2}$ |
| $38.\ 9$ | 3ᵉ | | $8.\ 37$ | $46.\ 46$ | $53.\ 23$ |
| $44.\ 58\frac{1}{2}$ | 1ᶠ fil | | $1.\ 53$ | $46.\ 51\frac{1}{2}$ | $53.\ 25\frac{3}{4}$ |
| $45.\ 19\frac{1}{2}$ | 2ᵈ | $44.51.\ 0$ | $1.\ 32$ | $46.\ 49\frac{1}{2}$ | $53.\ 24\frac{3}{4}$ |
| $45.\ 41$ | 3ᵉ | | $1.\ 10\frac{1}{2}$ | $46.\ 51\frac{1}{2}$ | $53.\ 25\frac{3}{4}$ |
| $48.\ 56\frac{1}{2}$ | 1ᶠ fil | | $2.\ 57.\ 55$ | $46.\ 51\frac{1}{2}$ | $53.\ 25\frac{3}{4}$ |
| $49.\ 17\frac{1}{2}$ | 2ᵈ | $45.29.\ 0$ | $57.\ 34$ | $46.\ 51\frac{1}{2}$ | $53.\ 25\frac{3}{4}$ |
| $51.\ 53\frac{1}{2}$ | 1ᶠ fil | | $54.\ 52$ | $46.\ 45\frac{1}{2}$ | $53.\ 22\frac{3}{4}$ |
| $51.\ 15$ | 2ᵈ | $45.56.\ 0$ | $54.\ 30\frac{1}{2}$ | $46.\ 45\frac{1}{2}$ | $53.\ 22\frac{3}{4}$ |
| $55.\ 58$ | 1ᶠ fil | | nuage | | |
| $56.\ 19$ | 2ᵈ | $46.31.\ 45$ | $50.\ 32$ | $46.\ 51$ | $53.\ 25\frac{1}{2}$ |
| $56.\ 40$ | 3ᵉ | | $50.\ 10$ | $46.\ 50$ | $53.\ 25$ |

Me rappellant que les premieres obſervations du matin avoient été un peu défectueuſes, j'ai cru pouvoir adopter $11^h.\ 53'.\ 24\frac{1}{2}''$ avec aſſez de certitude, & retranchant $4\frac{1}{2}''$ pour la correction du midi, j'ai conclu

clu que l'heure de la Pendule au midi vrai le 4 Juin avoit été $23^h. 53'. 20''$.

Or Mr. le Marquis de Courtanvaux avoit obſervé le paſſage du centre du Soleil à ſa lunette méridienne, qui ne dévioit pas conſidérablement

le 2 Juin à $11^h. 53'. 7''$
le 4 - - $11^h. 53'. 14''$.

La Pendule avoit donc avancé en 2 jours de $7''$ ſur le Soleil; elle avoit marqué $11^h. 53'. 16\frac{1}{2}''$ le 3 Juin à midi & ce jour-là il étoit $7^h. 38'. 14''$ Tems vrai lorſqu'elle marquoit $7^h. 31'. 31''$.

Ce qui confirme la juſteſſe de cette détermination ce ſont quelques hauteurs du bord ſupérieur du Soleil que j'ai priſes 2 heures avant le paſſage de Venus, & avec le même Quart de cercle; & que je n'ai calculées que longtems après. (*) Les voici:

| Hauteurs du 2d bord du Soleil. | Tems obſerv. | Tems calculés. | Retard de la Pendule. |
|---|---|---|---|
| $22°. 46'. 35''$ | $5^h. 17'. 20''$ | $5^h. 24'. 4\frac{1}{2}''$ | $6'. 44\frac{1}{2}''$ |
| 21. 47. 25 | 23. 27 | 5. 30. 10 | 6. 43 |
| 20. 57. 30 | 28. 37 | 5. 35. $19\frac{1}{5}$ | 6. $42\frac{1}{5}$ |
| 20. 28. 20 | 31. 37 | 5. 38. 15 | 6. 38 |
| 19. 23. 15 | 38. 22 | 5. 45. $7\frac{1}{2}$ | 6. $45\frac{1}{5}$ |

En prenant le milieu entre ces cinq obſervations, on trouve $6'. 42\frac{1}{2}''$ pour le retard de la pendule; mais en regardant la 4e obſervation comme ſuſpecte, on trouve $6'. 43''$.

Il eſt donc hors de doute que le tems obſervé du contact intérieur, $7^h. 31'. 31''$, eſt en tems vrai $7^h. 38'. 14''$.

J'ajoûterai que ce tems ſe réduit au Méridien de l'Obſervatoire de Paris en y ajoutant 20 à 21 ſecondes.



(*) La Latitude de Colombes eſt $48°. 55'. 28''$.

Avant que le Soleil ſe cachât derriere des arbres qui empêchoient de voir ſon coucher, je fis encore exactement avec le même Quart de cercle les obſervations ſuivantes :

à $7^h.\ 46'.\ 50''$ Tems vrai, paſſage du bord ſupérieur de ♀ (dans la lunette) au fil horizontal,

$47'.\ 2''$ — — bord inférieur du ☉ au même,

47. 26 — — bord oriental du ☉ au vertical,

48. 53 — — bord oriental de ♀ au même.

M. de la Lande les a jointes à quelques unes des ſiennes de la même eſpece pour les calculer.

Je joindrois ici pluſieurs diſtances de cornes que j'ai obſervées pendant l'éclipſe du Soleil du lendemain, mais les regardant comme incertaines à cauſe de l'inſtabilité de l'Inſtrument dont je me ſervois, & d'une forte indiſpoſition avec laquelle je m'étois levé, je me contenterai d'avoir fait ces obſervations pour m'exercer. Quant à la fin de l'éclipſe, je l'ai obſervée avec le même Téleſcope Grégorien dans un inſtant très favorable

le 3 Juin à $20^h.\ 27'.\ 26''$ tems vrai

& je compte ſur cette obſervation à $3''$ ou $4''$ près.

Ecrit à Bâle le 15 Juillet 1769.

À BERLIN

IMPRIMÉ CHEZ JEAN GODEF. MICHAELIS.